

Elektromagnetismus als Phänomen strömender Feinmasse

- Theorie der Koaxialleitung sowie Stellungnahme zum Stand der Wissenschaft
- Gemeinsame Basis von Elektromagnetismus und Mechanik
- Elektrische Ladung als strömende Feinmasse
- Die Faktoren des elektrischen Stromes
- Gravitation
- Relativitätstheorie - Deutung und Kritik
- Induktive Beeinflussung

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Der spezifische induktive Widerstand	3
3	Ohmscher und induktiver Widerstand	9
4	Differentialgleichung der Koaxialleitung	13
4.1	Grundfunktion der radialen Ausbreitung	13
4.2	Eindringtiefe	21
4.3	Normierte Form	22
4.4	Erweiterter Variablenbereich	24
4.5	Ableitung der Konstanten γ	30
5	Gesamtstromdichte und abhängige elektrische Größen	32
5.1	Einschränkung des Induktionsgesetzes	32
5.2	Innenleiter	33
5.2.1	$R_a - r_0 \geq D$	33
5.2.2	$R_a - r_0 \leq D$	41
5.3	Außenleiter	46
5.4	Zusammenfassende Betrachtung	50
5.4.1	Elektrische Irrelevanz	50
5.4.2	Ideale Kompensation und elektrisches „Paradoxon“	50
5.4.3	Restriktion des Induktionsgesetzes	50
5.4.4	Eindringtiefe	51
5.4.5	Vergleich mit dem Stand der Wissenschaft und Kritik	51
5.4.6	Zeigerdiagramm	53
5.4.7	Kurvenverläufe	54
6	Zusammenhang von Elektromagnetismus und Mechanik	59
6.1	Äquivalenz von Masse und Energie	59
6.2	Elektrische Energieströmung	60
6.3	Korrelation der physikalischen Einheiten	62
6.4	Elektroimpulssatz und KIRCHHOFFSche Lehrsätze	63
6.5	Energiedurchsatz	65
6.6	Strömungsfeld der Feinmasse	65
6.7	Freiraumstrahlung	69
6.8	Dynamische Verhältnisse der Feinmasse im Lichtstrahl	75
6.9	Induktionsgesetz, Durchflutungssatz und POYNTINGScher Vektor, Interpretation in Anlehnung an die Mechanik	90
6.10	Materie, Masse, Energie und Kraft	94
6.11	Elektrische und magnetische Feldkonstante; Eichkonstante	98
6.12	Energieinhalt einer Schwingung, PLANCK-Konstante	101
7	Elektrische Ladung	104
7.1	Zirkulierend geschlossene Strahlung als kugelförmiger Rotationskörper	104
7.2	Ladungs-Feinmasse, Stromdichte, Strom	116
7.3	Ableitung der Differentialgleichung	120
7.4	Kraftwirkung elektrischer Ladung	126
7.5	Die Induktion	132

7.6	Dualismus von Magnetismus und elektrischer Ladung	136
7.7	Das Atom	140
7.7.1	Ladungsträger in Interaktion	140
7.7.2	Das Atommodell	143
7.7.3	COMPTON-Wellenlänge der elektrischen Ladung	144
7.7.4	Bahnradius und -geschwindigkeit des Elektrons, BOHR-Postulat	145
7.7.5	Potential- und Energiestufen, Relativität der Ladungs-Feinmasse	147
7.7.6	Relativität der Masse	152
7.7.7	Das Atom als Energiespeicher	153
7.7.8	Das Neutron	155
7.7.9	Zusammenfassende Betrachtung	156
7.8	Die Faktoren des elektrischen Stromes	158
8	Gravitation	164
8.1	Ladungsleitung	164
8.2	Zusammenhang von mechanischer Kraft, Elektroimpuls und Gravitation	170
9	Raum und Zeit	174
9.1	Strukturloser Raum und Gesamtimpuls	174
9.2	Massenzuwachs, Längenkontraktion und Konstanz des Drehimpulses	175
9.3	Licht und Gravitation - Erhaltung von Masse und Energie	178
9.4	Kontraktion der Länge und Zeitdilatation	180
9.5	Relative und absolute Geschwindigkeit	184
9.6	Relative und absolute Zeit	189
9.7	Addition der Geschwindigkeiten	191
9.8	Die Wirkung der Gravitation	194
9.8.1	Licht senkrecht zu den Flächen gleicher Gravitation	194
9.8.2	Gravitationspotential und relative Zeit	202
9.8.3	Lichtbahn mit variablem Winkel gegen die Flächen gleicher Gravitation	205
9.8.4	COULOMB-Wechselwirkungskraft und Elektronenspin	216
9.9	Auswirkungen von Massenzuwachs und Längenkontraktion auf physikalische Gesetzmäßigkeiten	218
9.9.1	Elektrische Ladung	218
9.9.2	COULOMB-Wechselwirkungskraft	218
9.9.3	Gravitationsgesetz	219
9.9.4	Atomare Strukturen	219
9.9.5	Fadenpendel	220
9.9.6	3. KEPLER-Gesetz	220
9.10	Relativitätstheorie EINSTEINS - Vergleich, Diskussion, Kritik	221
9.10.1	LORENTZ - Transformation nach EINSTEIN	221
9.10.2	Hintergrund der LORENTZ - Transformation	223
9.10.3	Additionstheorem	227
9.10.4	Relativgeschwindigkeit von Inertialsystemen	228
9.10.5	Wahrnehmung von Lichtausbreitung und Körpern	231
9.10.6	Ausbreitung des Lichts als Kugelwelle	233
9.10.7	Gesetz von der Erhaltung der Energie, echtes Zwillingsparadoxon	237
9.10.8	Der Versuch von MICHELSON und die eindimensionale Kontraktion nach EINSTEIN	238
9.10.9	Allgemeine Relativitätstheorie	239

10 Induktive Beeinflussung durch eine Freileitung	241
10.1 Übergang vom Vollmodell zum Halbmodell	241
10.2 Das Übertragen der Beziehungen für die Senkrechte auf die Horizontale . . .	249
10.3 Vergleichende Betrachtung und Schlussfolgerung	260
11 Rechenverfahren für die induktive Beeinflussung	261
11.1 Einleitung	261
11.2 System verkoppelter Leitung	265
11.2.1 Allgemeines	265
11.2.2 Definitionen	265
11.2.3 Rechnerische Beziehungen	266
11.3 Die Darstellung der Ergebnisse und Anmerkungen zum Rechenverfahren . . .	268
11.4 Anwendung des Rechenverfahrens	270
11.4.1 Die induktive Beeinflussung im normalen Betriebsfall	272
11.4.2 Zweigleisige Strecke mit einer abgeschalteten Oberleitung	272
11.4.3 Eingleisige Strecke	272
11.4.4 Der Einfluss des spezifischen Erdwiderstandes	272
11.4.5 Alternative ohne Rückleiterseil	273
11.4.6 Der Einfluss der Frequenz	273
11.5 Schlussbetrachtungen	273
12 Literaturhinweise	280

Abbildungsverzeichnis

1	Stromfaden und magnetischer Fluss	4
2	Komponenten des magnetischen Flusses	5
3	Anwendung des Induktionsgesetzes	9
4	Wechselspannungsquelle mit ohmscher Belastung	10
5	Zeigerdiagramm Transformator	12
6	Runder Leiter	13
7	Eindringtiefe	27
8	Zeigerdiagramm	53
9	Innenleiter $c = 0.5$	54
10	Innenleiter $c = 1$	55
11	Innenleiter $c = 10$	55
12	Außenleiter $c = 1$	56
13	Außenleiter $c = 10$	56
14	Koaxialleitung Innenleiter $c = 2$ Außenleiter $c = 3, 5$	57
15	Innere Induktivität / Widerstand	58
16	Ersatzbild des Leiters	66
17	Ersatzbild einer Doppelleitung	67
18	Geschwindigkeit Feinmasse	83
19	Winkelgeschwindigkeit	83
20	Beschleunigung	83
21	Periodische Feinmasse-Strömung	86
22	Geometrie des Lichtstrahls	89
23	Rechnerische Beziehung für die Raumkurve	107
24	Elektron, Raumkurve der Strömung	108
25	Ersatzbild der Ladungsleitung	164
26	Ersatzbild Materiebaustein	187
27	Strömungsbahnen Materiebaustein	188
28	Addition der Geschwindigkeiten	191
29	Lichtbahn, geometrische Verhältnisse	206
30	Lichtbahn, kürzester Abstand zu M	207
31	Lichtbahn im Gravitationsfeld	214
32	LORENTZ-Transformation	223
33	Ersatzbild des Leiters	247
34	Zeigerdiagramm des Leiters	248
35	Zeigerdiagramm modifiziert	248
36	Erde als Rückleiter	258
37	Magnetische Feldlinien des Erdstromes	259
38	Gegeninduktivität M	269
39	Geometrische Daten der Oberleitung	271
40	Induktive Beeinflussung: Zweigleisige Strecke - Normalfall	274
41	Induktive Beeinflussung: zweigleisig - eine Oberleitung abgeschaltet	275
42	Induktive Beeinflussung: eingleisige Strecke	276
43	Induktive Beeinflussung: zweigleisig - $\rho = 50 \Omega m$	277
44	Induktive Beeinflussung: zweigleisige Strecke mit Bänderder	278
45	Induktive Beeinflussung: zweigleisige Strecke 16 2/3 Hz statt 50 Hz	279

1 Einführung

Die subatomaren Strukturen der Materiebausteine werden intensiv erforscht. Im Kontrast hierzu beschränkt sich die Wissenschaft bei elektromagnetischer Strahlung darauf, ein ambivalentes Verhalten, nämlich die Welle-Teilchen-Dualität zu konstatieren. Dabei besteht keine Ursache, diesen unbefriedigenden Erkenntnisstand einfach hinzunehmen. Vielmehr liegt die Erklärung des scheinbar widersprüchlichen Verhaltens elektromagnetischer Strahlung in der spezifischen Struktur jedes Strahlungsquants. Denn nicht nur Materiebausteine, sondern auch die kleinsten Elemente der Strahlung haben eine spezifische Struktur. Die von PLANCK und EINSTEIN vorgegebene fundamentale Gesetzmäßigkeit der Quantisierung der Strahlung setzt den Rahmen für Masse und Wellenlänge. Aus Durchflutungssatz und Induktionsgesetz ergibt sich für diese Portion an Masse - oder besser: Feinmasse - sowie die zugehörige Wellenlänge ein spezifisches Schwingungsverhalten, das transversal gerichtet ist und mit einer senkrecht dazu rotierenden Komponente verkettet ist. Dieser komplexen Schwingung ist abhängig von der Wellenlänge eine konkrete Zylinderform als räumliche Begrenzung vorgegeben. In dieser Interpretation ist Licht oder Freiraumstrahlung als strömende Feinmasse sowie als Spezialfall der Koaxialleitung zu betrachten. Strahlung ist eine einheitliche Erscheinungsform strömender Feinmasse, die sowohl die Wirkungen verursacht, die scheinbar nur den Teilchen zukommen wie auch die experimentellen Ergebnisse, die nur als elektromagnetische Schwingung gedeutet werden können.

So unverdächtig die Theorie der Koaxialleitung als fester Stand der Wissenschaft auch sein mag; sie verdient, hinterfragt zu werden, um auf tradierte Näherungslösungen verzichten zu können und eine Allgemeingültigkeit der Lösung zu erreichen, die auch dem Problem der Freiraumstrahlung gerecht wird. Dieser präzise Zugang und die in allen Fassetten diskutierte Lösung für den Problembereich „Koaxialleitung“ ist der Ansatzpunkt dieser Ausarbeitung und gleichzeitig das Sprungbrett, um den Elektromagnetismus aus seiner isolierten Betrachtungsweise herauszuführen: Einerseits wirkt er bekannterweise auf Masse, andererseits wird er jedoch nach dem Stand der Wissenschaft in seinem Wesensgrund als von der Masse unabhängiger Effekt gedeutet.

Nach den in dieser Ausarbeitung wiedergegebenen Vorstellungen ist aber Elektromagnetismus sehr wohl ein Effekt der Masse. Dazu darf freilich der Begriff der Masse nicht auf so „grobe“ Strukturen eingeengt werden, wie sie Atome oder Materiebausteine darstellen. Vielmehr haben wir uns Masse in feinsten Verteilung vorzustellen, deren Strömen identisch mit Elektromagnetismus ist und die natürlich - quasi als Spezialfall hoher lokaler Verdichtung - auch als „Material“ dient, aus dem die Materiebausteine gebildet sind.

Diese Betrachtungsweise ist an sich schon vorgezeichnet, wenn wir die von EINSTEIN angegebene, die Äquivalenz von Masse und Energie bezeichnende Gesetzmäßigkeit $E = mc^2$ strikt beachten. Denn deren Gültigkeit ist nicht auf Energieportionen kompletter Materiebausteine beschränkt. Vielmehr korrespondiert mit jeder noch so kleinen Energieportion zwingend das entsprechende Quantum an Feinmasse.

Die Einheiten aller elektromagnetischen Größen werden aus den Einheiten von Masse, Weg und Zeit gebildet. Elektrische und magnetische Feldkonstante sind keine unabhängigen Naturkonstanten, sondern stellen sich als abhängige Größen heraus.

Die Gesetzmäßigkeiten im Lichtstrahl als typischen Vertreter der Freiraumstrahlung lassen sich in Erweiterung des Theoriegebäudes auf die Ladungsträger übertragen. Im Gegensatz zu Licht sind aber Ladungsträger von Ladungs-Feinmasse wie von einer weit in den umgebenden Raum reichenden Aura umgeben, deren Wirkung freilich mit dem Abstand vom Zentrum abnimmt.

Damit ist die Nahtstelle zwischen Feinmasse und Materiebausteinen beschrieben. Die Interaktion der Ladungsträger führt in den Bereich der Atome. Dort zeigt sich einerseits die

innige Verwandtschaft von Elektromagnetismus und Mechanik, aber auch deren prinzipielle Unterschiede.

Bei der Interaktion gegenpoliger Ladungsträger in Atomen und Molekülen durchdringen sich die Feinmasse-Auren der Ladungsträger und neutralisieren sich hinsichtlich elektromagnetischer Wirkung. Die korrespondierenden Ladungs-Feinmassen neutralisieren sich also, ohne dass sie jedoch verschwinden. Dieser latente Elektromagnetismus wird aber wirksam als Gravitation, wenn sich die elektrisch neutralisierten Feinmasse-Auren von materiellen Körpern durchdringen. Feinmassen in Interaktion sind das exklusive Medium für alle Wirkungen in der Natur. Die in dieser Ausarbeitung dargestellten Zusammenhänge können Anstöße für die Erforschung der Vielfalt dieser Wirkungen und ihrer Gemeinsamkeiten geben. In diesem Lichte lassen sich an sich bekannte physikalische Effekte und ihre Hintergründe in aufschlussreicher Weise neu interpretieren. So greifen die Feinmasse-Auren von Sonne und Erde (als Beispiel) wie Arme ineinander und übertragen die Kräfte der Gravitation, deren Gesetzmäßigkeit nicht nur zufällig eine auffallende Affinität zu der der COULOMB-Wechselwirkungskraft hat.

Schließlich erlaubt die beschriebene Deutung von Elektromagnetismus und Gravitation einen direkten Zugang zu EINSTEINS Erkenntnissen von der Äquivalenz von Masse und Energie und zu seiner speziellen Relativitätstheorie. Für die Äquivalenz von Masse und Energie ist in dieser Ausarbeitung jede Barriere aufgehoben: Es gibt keine Energieform unabhängig von Masse! Einerseits werden die zentralen Erkenntnisse EINSTEINS wie Äquivalenz von Masse und Energie sowie Kontraktion der Körper abhängig von der Geschwindigkeit, untermauert und als zwingende Konsequenz strömender Feinmasse erklärt. Andererseits wird aber auch wesentlichen Aussagen EINSTEINS, die das Bizarre seiner Theorie ausmachen, widersprochen und die Begründung hierfür dargelegt. Unser an „nur“ 3 Dimensionen erprobtes Denkvermögen hat bei den in Rede stehenden Problemen von Elektromagnetismus, Mechanik und Gravitation einschließlich Relativitätstheorie noch keine unüberwindbare Barriere des Verständnisses und der Anschaulichkeit.

In den Schlusskapiteln wird das Thema „Induktive Beeinflussung durch eine Freileitung mit Rückleitung über Erde“ behandelt, das wohl als Spezialgebiet zu betrachten ist, aber den eigentlichen Ausgangspunkt zu allen Überlegungen in dieser Ausarbeitung darstellt.

In einem **Anhang** sind die Themen zusammengefasst, die eine Folge und Vertiefung der vorliegenden Ausarbeitung darstellen, aber erst zu einem späteren Zeitpunkt entstanden sind. Die physikalischen Grundlagen des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes werden aufgezeigt und deren Bedeutung für elektromagnetische Felder, wobei der grundlegende Unterschied zwischen statischen Feldern einerseits und Feldern mit strömender Energie andererseits beleuchtet wird. In einer kritischen Analyse werden die Konsequenzen hieraus für die MAXWELLSchen Feldgleichungen behandelt. Schließlich wird der physikalisch Hintergrund grundlegender Gesetze der Optik auf der Basis elektromagnetischer Gesetzmäßigkeit beschrieben.

2 Der spezifische induktive Widerstand

In einem Leiter kann sich niemals ein Wechselstrom mit räumlich konstanter Stromdichte ausbilden, weil von Stromfaden zu Stromfaden die selbstinduktive Spannung, die der auslösenden Ursache entgegenwirkt, abhängig vom umschlingenden magnetischen Feld räumlich variiert und damit eine räumlich variable Komponente der Stromdichte erzwingt. Räumlich konstante Stromdichte und Induktionsgesetz sind unvereinbar. Die Untersuchung der Zusammenhänge wird uns außerdem zu der Schlussfolgerung zwingen, dass das fundamentale Induktionsgesetz einer wesentlichen Restriktion unterliegt.

In den weiteren Betrachtungen wird von einem (theoretisch unendlich) langen, homogenen, geraden Leiter runden Querschnitts ausgegangen und nach den Wirkungen von innerem und äußerem Magnetfeld unterschieden. Außerdem wird die resultierende Stromdichte J in eine räumlich konstante Komponente J_k und eine variable Komponente J_v aufgetrennt.

Ohne das innere Magnetfeld zu berücksichtigen, kann in einem ersten gedanklichen Schritt allgemein gesagt werden: Im Leiter fließt unter dem Einfluss einer angelegten Wechselspannung ein Wechselstrom. Der Strom im Leiter entspricht einer unendlich großen Menge parallel verlaufender differentiell kleiner Stromfäden. Jeder Stromfaden weist den gleichen spezifischen Widerstand ρ auf und ist mit dem gleichen äußeren magnetischen Feld verkettet, das seine **äußere** Induktivität bestimmt. (Auf die Betrachtung kapazitiver Widerstände wird zunächst verzichtet.)

Für die Betrachtung des **inneren** magnetischen Feldes trennen wir strikt nach den Wirkungen der räumlich konstanten Komponente J_k der Stromdichte und den Wirkungen der variablen Komponente J_v . Der Anteil des inneren magnetischen Feldes, der auf die variable Komponente J_v zurückgeht, unterliegt speziellen Gesetzmäßigkeiten, die im folgenden näher untersucht werden und einen breiten Raum einnehmen. Diese an dieser Stelle postulierte Eingangsvoraussetzung darf bei allen nachfolgenden Ausführungen nicht aus dem Auge verloren werden. Jeder Stromfaden ist mit der unendlichen Zahl aller Nachbarstromfäden induktiv verkettet (Gegeninduktivität). Die Summe dieser gegeninduktiven Wirkungen realisiert einen eigengesetzlichen Gleichgewichtszustand, bei dem - wie nachfolgend gezeigt wird - im typischen Idealfall für jeden Stromfaden und damit auch für die Gesamtheit aller Stromfäden, die Gleichheit von ohmschem und induktivem Widerstand beziehungsweise Spannungsabfall gegeben ist. Die auf dieser Basis sich frei einstellende Stromverteilung der räumlich variablen Komponente steht in unmittelbarem Zusammenhang mit dieser Gleichheit von ohmscher und induktiver Komponente und folgt gleichzeitig der Gesetzmäßigkeit vom Weg des geringsten Widerstandes, oder präziser: des geringsten Scheinwiderstandes. Denn jede andere, gedanklich-theoretisch aufgezwungene Stromverteilung, würde nämlich nicht nur die obligatorische Gleichheit von ohmscher und induktiver Komponente verletzen, sondern zusätzlich einen größeren resultierenden Scheinwiderstand ergeben als bei dem sich frei einstellenden Optimum.

Dieser Ideal- oder Grenzfall stellt sich - wie später erkannt wird - nur in einem Leiter, der nicht hohl ist, und nur dann ein, wenn die galvanisch angelegte Wechselspannung kein anderes Verhältnis von ohmschem und induktivem Spannungsabfall erzwingt. Unter einem solchen, quasi äußeren Zwang beträgt dann das Spannungsverhältnis zwar nicht mehr 1 : 1, ist aber immerhin im maßgebenden Bereich konstant!

Wir müssen also von Anfang an unterscheiden zwischen dem typischen Idealfall mit seinem sich frei einstellenden Gleichgewichtszustand und **dem** Gleichgewichtszustand im Strömungsfeld des Leiters, das sich unter dem Zwang der angelegten Spannung und der Form des Leiters einstellt.

Konstante und variable Komponente zusammenfassend, gilt: Zusätzlich zu der Stromdichte J_k , die unter dem Zwang der angelegten Wechselspannung über den gesamten Leiterquer-

schnitt konstant ist, bildet sich also in freier Stromverteilung eine räumlich variable Stromdichte J_v aus, die I_k entgegenwirkt, so dass sich eine resultierende Stromdichte

$$J = J_k - J_v \tag{2.1}$$

ergibt. J_k ist also als Auslöser der Induktionswirkung anzusehen und J_v wirkt nach dem Induktionsgesetz J_k entgegen. Auch unter dem Gesichtspunkt der (zunächst) allein auf die variable Komponente J_v beschränkten Betrachtung kann der durch das innere magnetische Feld induzierte Strom in einem Leiter gedanklich in Stromfäden mit differentiell kleinem Querschnitt aufgelöst werden. Das Durchflutungsgesetz, angewandt auf den Stromfaden, führt für die räumlich variable Komponente zu nachfolgender Ableitung. Dabei sind:

- f Frequenz
- $\omega = 2\pi f$ Kreisfrequenz und
- μ_0 magnetische Feldkonstante.

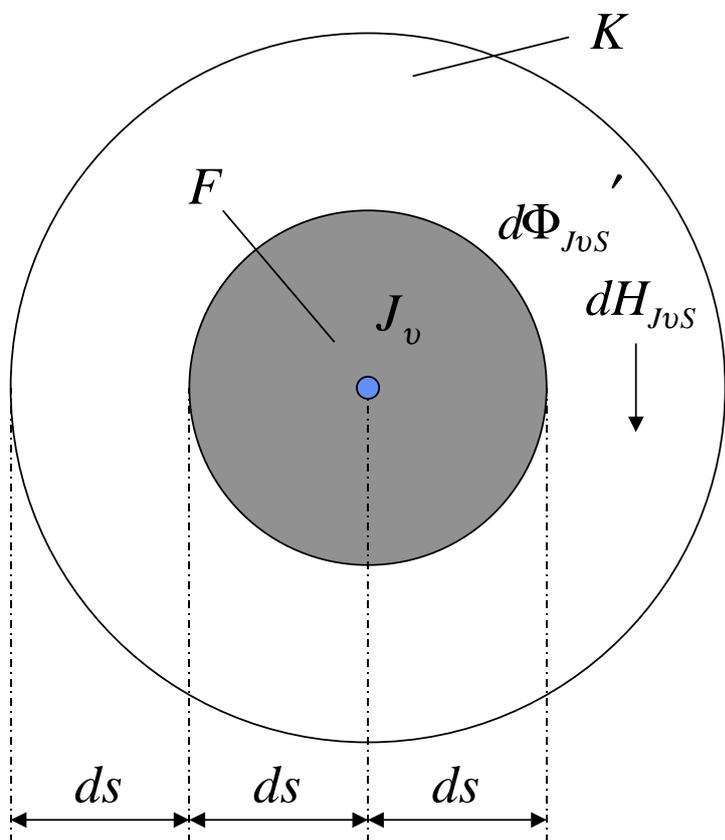


Abbildung 1: Stromfaden und magnetischer Fluss

In Abbildung 1 ist der Stromfaden F mit der Stromdichte J_v in einem kreisförmigen Querschnitt vom Radius ds dargestellt. In dem den Stromfaden umgebenden Kreisring K der Wandstärke ds fließt der zu J_v gehörige magnetische Fluss $d\Phi_{JvS}$. Der Strich im Symbol $d\Phi_{JvS}$ bringt zum Ausdruck, dass der magnetische Fluss auf die Längeneinheit bezogen ist. Die zugehörige magnetische Feldstärke ist dH_{JvS} .

In einem runden Leiter, für dessen Mittelpunkt

$$s = 0$$

gilt, errechnet sich die magnetische Feldstärke nach dem Durchflutungssatz allgemein zu:

$$H_{JvS} = \frac{\int_0^s J_v \cdot s \cdot ds}{s} \tag{2.2}$$

Daraus ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{dH_{JvS}}{ds} = J_v - \frac{\int_0^s J_v \cdot s \cdot ds}{s^2} \tag{2.3}$$

Wendet man diese, für den runden Leiter gültige, allgemeine Form auf den Spezialfall des differentiell kleinen Stromfadens F an, so kann mit

$$s \rightarrow ds$$

J_v als konstante Größe im Integrationsintervall betrachtet werden. Deshalb gilt:

$$\frac{\int_0^{s \rightarrow ds} J_v \cdot s \cdot ds}{s^2} = J_v \cdot \frac{\int_0^{s \rightarrow ds} s \cdot ds}{s^2} = \frac{J_v}{2}.$$

Eingesetzt in (2.3) erhält man:

$$\frac{dH_{JvS}}{ds} = J_v - \frac{J_v}{2} = \frac{J_v}{2}.$$

und

$$dH_{JvS} = \frac{J_v}{2} \cdot ds. \quad (2.4)$$

Mit dem Stromfaden ist der differentiell kleine magnetische Fluss $d\Phi'_{JvS}$ verknüpft, dessen räumliche Ausdehnung auf den differentiell kleinen umgebenden Kreisring K um den Stromfaden F beschränkt ist.

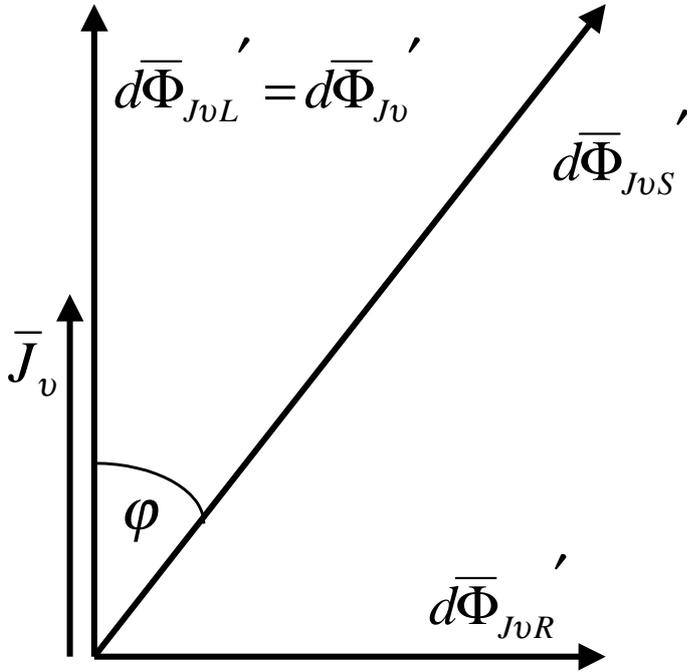


Abbildung 2: Komponenten des magnetischen Flusses

Dieser magnetische Fluss zerfällt in induktive (Index L) und ohmsche (Index R) Komponente. Zusätzlich zum phasengleichen Fluss $d\Phi'_{JvL}$ ist J_v nämlich im Hinblick auf den ohmschen Spannungsabfall mit dem magnetischen Fluss $d\Phi'_{JvR}$ verknüpft, der gegenüber J_v um 90° nacheilt (siehe Zeigerdiagramm nach Abbildung 2). Auf den, eine Wechselstromgröße kennzeichnenden Strich über dem Symbol ist außerhalb der Abbildung 2 verzichtet. Die Komponente $d\Phi'_{JvR}$ erklärt sich daraus, dass J_v ja den mit J_k verbundenen ohmschen Spannungsabfall reduziert und dies nur auf induktivem Wege leisten kann. Dies ist direkt vergleichbar mit der Primärwicklung eines Transformators, die nur induktiv auf die Sekundärwicklung mit ihrer ohmschen Belastung einwirken kann.

Hinsichtlich der Kopplung von resultierendem Magnetfluss $d\Phi'_{JvS}$ und Strom dI_{Jv} im Stromfaden liegen natürlich identische geometrische Gegebenheiten für ohmsche und induktive Komponente vor. Aber das von den geometrischen Gegebenheiten im weiteren Umfeld des Stromfadens abhängige Betragsverhältnis von ohmscher und induktiver Komponente ist letztlich bestimmend für den Phasenwinkel φ , der sich zwischen $d\Phi'_{JvS}$ und J_v bildet.

Für die induktive Komponente ist dann im Sinne einer Kopplung

$$\cos \varphi = k_L = \frac{d\Phi'_{JvL}}{d\Phi'_{JvS}} \quad (2.5)$$

und für die ohmsche Komponente

$$\sin \varphi = k_R = \frac{d\Phi'_{JvR}}{d\Phi'_{JvS}} \quad (2.6)$$

maßgebend. Für den typischen Idealfall ist das Betragsverhältnis von ohmscher und induktiver Komponente 1 : 1 und es gilt:

$$\cos \varphi = \sin \varphi = k_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.7)$$

Die strikte Anwendung des Durchflutungssatzes verlangt nun aber, dass die resultierende Wirkung des gesamten Stromes außerhalb des Stromfadens auf das Linienintegral der magnetischen Feldstärke um den Stromfaden gleich 0 ist. Deshalb lässt sich die isolierte Betrachtung des Stromfadens fortsetzen. Mit der abgekürzten Schreibweise

$$d\Phi_{J_v L}' = d\Phi_{J_v}', \quad dH_{J_v L} = dH_{J_v L}$$

errechnet sich der magnetische Fluss $d\Phi_{J_v}'$ im Kreisring K um den Stromfaden F mit (2.4) und (2.5) zu:

$$d\Phi_{J_v}' = \mu_0 \cdot dH_{J_v} \cdot ds = \mu_0 \cdot \frac{J_v}{2} \cdot ds^2 \cdot k_L. \quad (2.8)$$

Diejenigen vom Stromfaden F erzeugten Flussanteile außerhalb des Kreisrings K sind mit benachbarten Stromfäden verkoppelt und werden dabei, was den resultierenden Einfluss auf F betrifft, kompensiert. Mit dieser Kompensation haben wir unmittelbar den Gleichgewichtszustand vor uns. Wie bei einem idealen Transformator kompensieren sich bis auf den sogenannten Magnetisierungsfluss des Transformators die magnetischen Flüsse von „Primär- und Sekundärwicklung“. $d\Phi_{J_v}'$ ist also als Differenz von selbst- und gegeninduktiver Wirkung zu begreifen.

An dieser Stelle muss im Hinblick auf die gegenseitige Phasenlage von J_v und $d\Phi_{J_v}'$ noch eine prinzipielle Überlegung angestellt werden:

Zwei beliebige Stromfäden a und b können als Primär- und Sekundärwicklung eines Transformators aufgefasst werden. Unabhängig davon, ob a oder b die Rolle der Primärwicklung zugeordnet wird, die Kopplung von a und b ist für beide Richtungen $a \rightarrow b$ und $b \rightarrow a$ identisch. Deshalb ist der Anteil ΔJ der Stromdichte, der vom Stromfaden a mit Stromdichte J_a in den Stromfaden b mit Stromdichte J_b eingekoppelt wird, gedanklich in gleicher Höhe von J_a in Abzug zu bringen wie er zu J_b hinzuzufügen ist. Da aber ΔJ eine proportionale Größe zu der elektrischen Feldstärke des ohmschen Anteils

$$\Delta E_R = \Delta J \cdot \rho \quad (\text{Index } R \text{ für ohmschen Widerstand})$$

ist und

$$\Delta E_R = -\frac{d}{dt} (\Delta \Phi_R')$$

eine nach dem Induktionsgesetz proportionale Größe zum umschlingenden Magnetfluss, wird also der Gleichgewichtszustand, der sich einstellt, lediglich durch Verlagerung von Anteilen der Stromdichte und des Magnetflusses bewirkt. Diese Verlagerung unterliegt natürlich einer strengen Gesetzmäßigkeit, deren Resultat noch zu untersuchen sein wird.

Während ein Stromfaden einen immer gleichen ohmschen Widerstand hat, ist es aber im Gegensatz hierzu für die effektive Induktivität des Stromfadens von entscheidender Bedeutung, welcher Abstand zwischen a und b gegeben ist. Für den induktiv von a nach b übertragenen Anteil ΔJ wirken a und b wie Hin- und Rückleitung einer Doppelleitung und diese hat bekanntlich eine große Induktivität bei großem Abstand zwischen a und b und eine entsprechend kleinere Induktivität bei kleinem Abstand zwischen a und b .

Wir können alle Überlegungen zu den Wechselwirkungen zwischen a und b ohne Einschränkungen auf die resultierende Wechselwirkung aller unendlich vielen Stromfäden mit allen ihren Nachbarstromfäden übertragen. Dabei bleibt der entscheidende Unterschied zwischen ohmscher und induktiver Komponente erhalten: Die ohmsche Komponente ist nur abhängig vom

spezifischen Widerstand ρ . Dagegen ist die induktive Komponente davon abhängig, welche „Packungsdichte“ den Stromfäden durch die geometrische Form des Leiters unter dem Einfluss der treibenden Spannung aufgezwungen wird. Können sich die Stromfäden nach ihrer Eigennatur ausbilden, suchen sie den Weg des geringsten Widerstandes, d.h. die Betragsgleichheit von ohmscher und induktiver Komponente. Dabei beträgt der Kopplungsfaktor in Übereinstimmung mit (2.7)

$$k_L = k_R = k_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Unter dem Zwang der geometrischen Form stellt sich zwar auch jeweils ein Gleichgewichtszustand mit einheitlichen Kopplungsverhältnissen ein, aber mit Ausnahme des typischen Idealfalls gilt: $k_L \neq k_0$.

Da aber bei dem typischen Idealfall in markanter Form die theoretischen Gesetzmäßigkeiten aufscheinen, wird in der Folge von diesem Idealfall mit $k_L = k_R = k_0$ ausgegangen, bevor später zum allgemeinen Fall mit $k_L \neq k_0$ übergegangen wird.

Durch die Betragsgleichheit von

$$d\Phi_{JvL}' = d\Phi_{JvR}' = d\Phi_{Jv}'$$

ergibt sich aus der Ableitung des magnetischen Flusses $d\Phi_{Jv}'$ nach der Zeit die induzierte elektrische Feldstärke (ohmsche Komponente)

$$dE_{JvR} = -\frac{d}{dt} (d\Phi_{Jv}').$$

Wegen des zeitlich sinusförmigen Verlaufs führt dies zu der Form:

$$dE_{JvR} = -\omega \cdot d\Phi_{Jv}'. \quad (2.9)$$

Mit (2.8) ergibt sich:

$$dE_{JvR} = -\omega\mu_0 \cdot \frac{J_v}{2} \cdot ds^2 \cdot k_L. \quad (2.10)$$

Der zugehörige Strom errechnet sich zu:

$$dI_{Jv} = -dE_{JvR} \cdot \frac{\pi ds^2}{\rho}$$

und mit (2.10)

$$dI_{Jv} = \frac{\omega\mu_0\pi}{\rho} \cdot \frac{J_v}{2} \cdot ds^2 \cdot k_L. \quad (2.11)$$

Die auf die Längeneinheit bezogene Induktivität L' des Stromfadens errechnet sich zu:

$$L' = \frac{d\Phi_{Jv}'}{dI_{Jv}}$$

und mit (2.8) und (2.11)

$$L' = \frac{\mu_0 \cdot \frac{J_v}{2} \cdot ds^2 \cdot k_L}{\frac{\omega\mu_0\pi}{\rho} \cdot \frac{J_v}{2} \cdot ds^4 \cdot k_L}.$$

Durch Kürzen erhält man:

$$L' = \frac{\rho}{\omega\pi ds^2} \quad (2.12)$$

beziehungsweise

$$\omega L' = \frac{\rho}{\pi ds^2}. \quad (2.13)$$

L' ist der Induktivitätsbelag und $\omega L'$ der Belag des induktiven Widerstandes; Gleichung (2.13) lässt für den typischen Idealfall den Zusammenhang erkennen, dass bei Betrachtung eines beliebigen Stromfadens ohmsche und induktive Komponente stets betragsgleich sind! So wie der Querschnitt des Stromfadens differentiell klein ist, kommt dem Induktivitätsbelag L' dieses Stromfadens ein entsprechender Wert zu, der nach Unendlich strebt. Aber das Produkt beider Größen ist ein endlicher Wert, der identisch ist mit ρ , wie aus (2.13) unmittelbar erkennbar.

Der spezifische Erdwiderstand stellt mit der Beziehung

$$\rho = R' \cdot q$$

die feste Zuordnung dar, die beliebige Wertepaare des Widerstandsbelages R' und des jeweils zugehörigen Querschnitts q verknüpft. Analog dem spezifischen ohmschen Erdwiderstand wird der spezifische induktive Widerstand λ mit

$$\lambda = \omega L' \cdot \pi ds^2$$

eingeführt und wir erhalten, eingesetzt in (2.13) schließlich die Beziehung:

$$\lambda = \rho. \quad (2.14)$$

Für die variable Stromdichte J_v gilt also für den typischen Idealfall die Gleichheit von spezifischem ohmschen Widerstand und spezifischem induktiven Widerstand. Mit $\lambda = \rho$ hat der resultierende komplexe spezifische Erdwiderstand z den Wert

$$z = \sqrt{2} \cdot \rho \cdot e^{j45^\circ} \quad (2.15)$$

mit dem Betrag $\sqrt{2} \cdot \rho$ und dem festen Phasenwinkel von 45° .

Der kennzeichnende Faktor k_λ für den spezifischen induktiven Widerstand lässt sich aus der Beziehung

$$\lambda = k_\lambda \cdot \omega \mu_0 = \rho$$

ermitteln. Es ergibt sich:

$$k_\lambda = \frac{\rho}{\omega \mu_0}. \quad (2.16)$$

3 Ohmscher und induktiver Widerstand

Wird eine Spannungsquelle mit der Wechselspannung \bar{U} durch die Induktivität L belastet, so fließt der Wechselstrom \bar{I} , der der Spannung um 90° nacheilt. Wir stellen Wechselspannung und -strom und auch abhängige Größen wie den magnetischen Fluss üblicherweise als Zeigerdiagramm dar. Das heißt, die komplexe Zahlenebene dient uns als mathematisches Werkzeug, dessen hohe Praktikabilität leicht vergessen machen kann, dass es „nur“ ein Hilfsmittel ist, um die Lösung einer Differentialgleichung anschaulich darzustellen. So stellt für Abbildung 3 die Anwendung des Induktionsgesetzes in der Form $\bar{U} = -\frac{d\bar{\Phi}_L}{dt}$, nämlich der Ableitung einer zeitlich sinusförmigen Größe, den mathematischen Hintergrund dar.

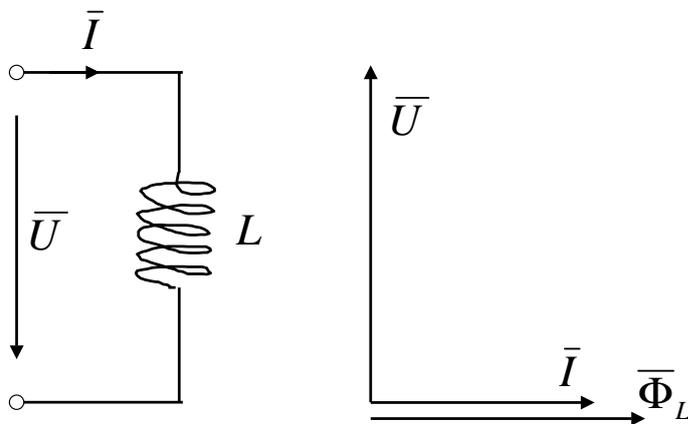


Abbildung 3: Anwendung des Induktionsgesetzes

Das in Abbildung 3 dargestellte Zeigerdiagramm erscheint uns als bare Selbstverständlichkeit.

Als Selbstverständlichkeit nehmen wir dabei auch, dass Strom und Magnetfluss phasengleich sind. Aber bereits der nächste Schritt zur Wechselspannungsquelle mit ohmscher Belastung nach Abbildung 4 führt uns bei dem Bemühen um eine präzise Durchdringung der physikalischen Zusammenhänge zu einem Punkt abseits des scheinbar Selbstverständlichen:

Vorausgeschickt sei, dass in Abbildung 4 die ja auch bei einem „reinen“ ohmschen Widerstand nie völlig vermeidbare Induktivität L ebenfalls eingezeichnet und für eine gute Anschaulichkeit im Zeigerdiagramm überproportional, aber in gestrichelter Darstellung berücksichtigt ist. Davon abgesehen sind wir es allerdings gewohnt, für die Verhältnisse nach Abbildung 4 uns auf ein Zeigerdiagramm zu beschränken, das lediglich Spannung und Strom bei Phasengleichheit darstellt. - Aber Halt! Aus dem ersten Beispiel mit der induktiv belasteten Spannungsquelle wissen wir, dass zur Erzeugung einer Spannung bzw. eines Spannungsabfalls ein magnetischer Fluss existieren muss, der einer zeitlichen Änderung unterworfen ist. Gibt es etwa eine zweite Möglichkeit, eine Spannung bzw. einen Spannungsabfall zu bewirken? Die auf den ersten Blick verblüffende Antwort lautet strikt: nein! Denn diese zweite physikalische Wirkungsmöglichkeit existiert nicht! Dass wir gleichwohl gewohnt sind, so zu operieren, als gäbe es diese zweite, quasi der ohmschen Wirkung vorbehaltene Möglichkeit, ist ein klassischer Fall für die Verdrängung der tatsächlichen physikalischen Zusammenhänge, wobei wir durch die Fülle erfolgreicher Anwendungsfälle in Theorie und Praxis der Elektrotechnik scheinbar darin bestärkt werden, diese physikalische Alternative der Spannungserzeugung stillschweigend zu unterstellen. Um die wirklichen Zusammenhänge aufzuklären, müssen wir uns gedanklich auf molekulare bzw. atomare Ebene begeben. Mit diesen Bausteinen der Materie kann nur auf der Basis elektromagnetischer Wirkungen kommuniziert werden. (Das Atom hat keinen diskreten Eingang für ohmsche Wirkungen.) Jedes Atom muss wie ein Transformator begriffen werden.

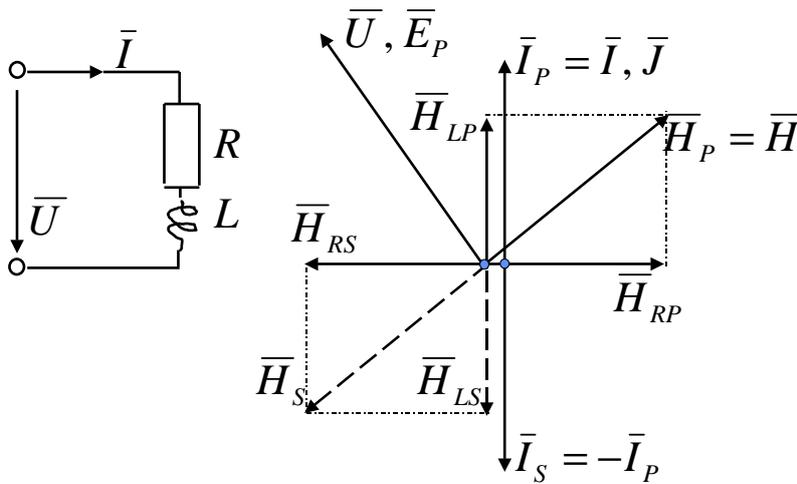


Abbildung 4: Wechselspannungsquelle mit ohmscher Belastung

Die maßgebenden Komponenten des magnetischen Flusses bzw. der magnetischen Feldstärke, die dabei im Spiele sind, sind in Abbildung 4 dargestellt. Die Indizes P und S stehen für primär und sekundär bzw. R und S für ohmsche und induktive Komponente. Dabei kommt das Betrachten der Vorgänge in der Feinstruktur der Materie physikalisch wie mathematisch durch den Übergang von dem auf die Längeneinheit bezogenen magnetischen Fluss

$$\Phi_P' = \Phi_S' = \Phi'$$

im Leiterquerschnitt, auf die **einem Stromfaden im Sinne von Abbildung 4 zuzuordnende** magnetische Feldstärke

$$H_P = H_S = H$$

zum Ausdruck. (Es ist zwischen Betragsdarstellung im Text und der Zeigerdarstellung in der Abbildung zu unterscheiden.) Die magnetische Feldstärke H ist ja nichts anderes als eine proportionale Größe zu dem **einem Stromfaden zuzuordnenden** Magnetfluss pro Flächeneinheit und steht nach (2.4) in direkter Beziehung zur Stromdichte J , also zum Strom pro Flächeneinheit oder anders ausgedrückt: zum Strom im extrem kleinen Stromfaden. (Für eine anschauliche Darstellung wird dem Stromfaden für den hier verfolgten Zweck eine extrem kleiner, aber endlicher Durchmesser zugeordnet. Außerdem wird im Gegensatz zu der Darstellung in (2.4) auf die Unterscheidung nach konstanter Komponente J_k und variabler Komponente J_v von Stromdichte J verzichtet und H für H_{JvS} gesetzt.) Der Übergang vom magnetischen Fluss zu der **einem Stromfaden zuzuordnenden** magnetischen Feldstärke bedeutet also den Übergang der Betrachtungsweise vom integrierten Gesamtfluss zum extrem kleinen Teilfluss pro Flächeneinheit, der mit einem Stromfaden verkettet ist.

Nach Beziehung (2.2) besteht eine feste räumliche Abhängigkeit zwischen Stromdichte J und magnetischer Feldstärke H , wobei jede der beiden Größen aus der jeweils anderen quasi maßstabsgerecht entwickelt werden kann.

Wir erkennen, dass dagegen die Phasenverschiebung zwischen J und H die eigentliche spezifische Größe darstellt, in der sich die Materialeigenschaften (spezifischer ohmscher Widerstand ρ) und die geometrische Form des Leiters widerspiegeln. Es zeichnet sich bereits an dieser Stelle ab, dass schließlich auch der spezifische ohmsche Widerstand ρ auf die geometrischen Bedingungen im Feinbau der Materie zurückzuführen sein wird.

Beim ohmschen Widerstand, projiziert auf das Modell „Transformator“, nimmt der Sekundärkreis das durch die induktive Komponente H_{LP} repräsentierte „Angebot“ an Energie nicht in Anspruch. Dagegen werden die betragsgleichen Größen

$$H_{RP} = H_{RS}$$

jeweils durch ihr gegenphasiges Pendant kompensiert. Hierbei ist die Existenz jeder dieser Größen zwingend erforderlich, um einerseits das Induktionsgesetz zu befriedigen und anderer-

seits den Energietransport in Richtung auf das einzelne Atom bzw. Molekül zu bewerkstelligen. Wegen der wechselseitigen Kompensation der Magnetflüsse $H_{RP} = H_{RS}$ ist das, was als Resultat nach außen primär in Erscheinung tritt, allerdings nur der ohmsche Spannungsabfall. Die auslösende Ursache, die magnetische Feldstärke H_{RP} wird nicht näher betrachtet.

Erst wenn z.B. der Leistungsdurchsatz in Form des POYNTINGSchen Vektors berechnet werden soll, wird mit dem Vektorprodukt der elektrischen Feldstärke E_P und der magnetischen Feldstärke H_{LP} nicht nur die induktive Komponente der magnetischen Feldstärke H_{LP} berücksichtigt, sondern indirekt durch die Größe E_P auch die ohmsche Komponente. Denn die zeitlich sinusförmige Größe E_P ist nach dem Induktionsgesetz nichts anderes als eine proportionale Größe des zeitlichen Differentialquotienten der wirksamen magnetischen Feldstärke H_P , die ja den maßgebenden, auf die Flächeneinheit bezogenen magnetischen Fluss darstellt. H_P enthält aber sowohl die induktive Komponente H_{LP} als auch die ohmsche Komponente H_{RP} .

Hinter der Wortwahl „**wirksame** magnetische Feldstärke“ verbirgt sich, dass der ohmsche Widerstand den klassischen Fall einer Restriktion des Induktionsgesetzes darstellt, wenn auch - wie später gezeigt wird - nicht etwa den einzigen Fall. Von dem „Angebot“ an Spannung wird nur in Höhe des ohmschen Spannungsabfalls Gebrauch gemacht, und zwar durch Kompensation des für die ohmsche Wirkung maßgebenden Magnetfeldes. Diese Kompensation vereitelt Bemühungen, für die ohmschen Wirkungen einen resultierenden magnetischen Fluss zu ermitteln und daraus dann die elektrische Feldstärke zu berechnen, die dann ja räumlich variabel sein müsste. Dieser Umstand erschwert es also zusätzlich, den ohmschen Spannungsabfall als Phänomen der Induktion zu erkennen. Gleichwohl führt daran kein Weg vorbei.

Bei einem Widerstand unter (galvanisch) angelegter Spannung ist es charakteristisch, dass für die ohmsche Komponente des Magnetflusses Entstehung und Kompensation als gleichzeitig ablaufender Prozess zu begreifen sind. Jeder Stromfaden ist deshalb bezüglich dieses Effekts autonom; Kopplung unterbleibt. Jeder Stromfaden antwortet im homogenen Material auf die angelegte Spannung mit der gleichen Antwort, die durch den einheitlichen spezifischen ohmschen Widerstand bestimmt ist.

Wenn auch in Abbildung 4 eine Darstellung des **zeitlichen** Ablaufs der elektrischen Größen darstellt, erkennen wir gleichwohl, dass das in dieser Darstellung gebildete Vektorprodukt von

$$H_{LP} \quad \text{und} \quad H_P$$

das identisch ist mit dem Vektorprodukt von

$$H_{LP} \quad \text{und} \quad H_{RP}$$

zu einer korrekten Ermittlung des Betrags des POYNTINGSchen Vektors für die ohmschen Verluste führt, wenn zusätzlich die Proportionalität von H_P und E_P beachtet wird. Denn in das Ergebnis des POYNTINGSchen Vektors für die ohmschen Verluste fließt nicht nur ein, dass E_P und H_{LP} räumlich senkrecht zueinander stehen, sondern auch die zeitliche Phasenverschiebung zwischen H_{LP} und H_P .

Dass ein körperlicher ohmscher Widerstand in dieser Sicht der physikalischen Zusammenhänge, also projiziert auf das Modell „Transformator“, natürlich nur als ein Kollektiv einer sehr großen Zahl solcher „atomarer Transformatoren“ aufgefasst werden kann, sei nur der Vollständigkeit halber noch angeführt. Nach diesem Exkurs ist es jetzt nur noch ein kleiner Schritt zu einem „echten“ Transformator mit dem Wicklungsverhältnis von 1:1, der mit einem ohmschen Widerstand belastet ist. Wir unterstellen ideale Eigenschaften dieses Transformators. Die Magnetflüsse sind ein getreues Abbild dessen, was wir bereits für den „atomaren Transformator“ erkannt haben, und die idealen Eigenschaften sind genau das, was

wir in weiterer Übertragung auf die induktiven Verhältnisse im Strömungsfeld einer Koaxialleitung in Ansatz bringen müssen. Denn es gibt dort z.B. keinen Streufluss außerhalb des Hauptflusses. Alle beteiligten Größen sind voll und gleichwertig in den Prozess integriert.

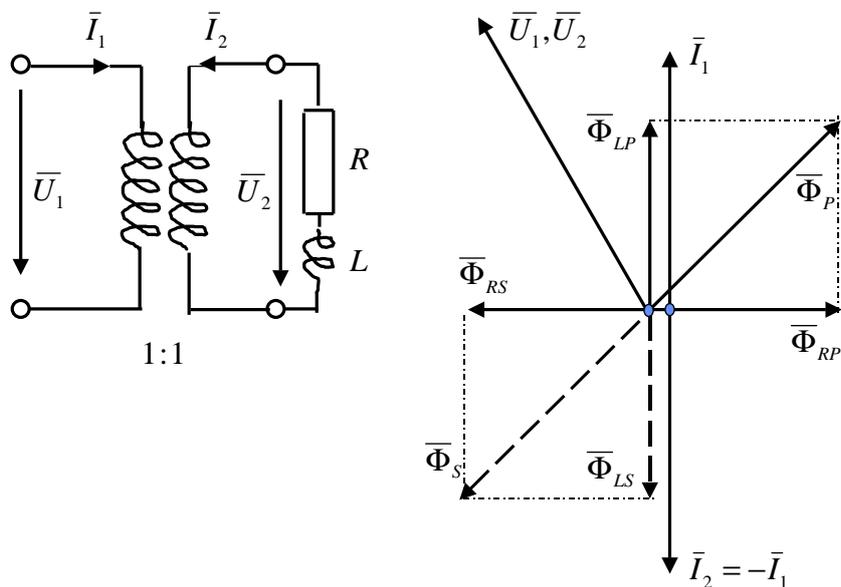


Abbildung 5: Zeigerdiagramm Transformator

Aus der Darstellung in Abbildung 5 erkennen wir, dass die uns aus Lehrbüchern vertrauten Zeigerdiagramme vom Transformator nicht unbedingt im Gegensatz zu Abbildung 5 stehen. Aber in der Regel werden, was die Darstellung der wirksamen magnetischen Flüsse betrifft, wesentliche Elemente für ein schlüssiges Gesamtbild weggelassen. Am Beispiel der induktiven Vorgänge in einer Koaxialleitung wird aber deutlich werden, dass hier ein Weglassen nicht mehr toleriert wird und mit aller

Konsequenz „Farbe bekannt“ werden muss.

4 Differentialgleichung der Koaxialleitung

4.1 Grundfunktion der radialen Ausbreitung

Durch Integration der induktiven Wirkungen der Gesamtheit aller Stromfäden, und zwar exklusiv für den variablen Anteil der Stromdichte J_v , kommen wir zu Beziehungen, deren Verwandtschaft zu den Gleichungen (2.8) - (2.15) evident ist. Gleichwohl müssen die differentielle Betrachtungsweise nach Abschnitt 2 einerseits und die nachfolgende integrative Methode, mit deren Hilfe die Grundbeziehungen abgeleitet werden, streng auseinandergehalten werden.

Ausgangsbasis dieser Grundbeziehungen ist ein runder Leiter wie bei einer Koaxialleitung. Die abzuleitenden Grundbeziehungen für die variable Stromdichte J_v und für alle korrespondierenden elektrischen Größen gelten dabei für Innen- und Außenleiter in gleicher Weise.

Für alle Wechselstromgrößen ist in der Folge die Betragsdarstellung gewählt.

Aus der Gleichheit von ohmscher und induktiver Komponente der induzierten Spannung bei isolierter Betrachtung jedes einzelnen Stromfadens ergibt sich bei dem typischen Idealfall auch für die Gesamtheit aller Stromfäden

analog (2.9)

$$E_{vR} = -\omega \cdot \Phi_v'(r). \quad (4.1)$$

Die Größen E_{vR} und Φ_v' beziehen sich nach Abbildung 6 auf den geometrischen Ort mit dem Radius r um den Mittelpunkt M , wobei E_{vR} die ohmsche Komponente der induzierten elektrischen Feldstärke darstellt und Φ_v' die mit J_v phasengleiche induktive Komponente des magnetischen Flusses, der den Kreis mit dem Radius r umschlingt.

Mit dem zunächst nicht definierten Grenzwert r_D ergibt sich durch Integration der magnetischen Feldstärke $H_v(r)$:

$$\Phi_v'(r) = \mu_0 \int_r^{r_D} H_v(r) \cdot dr. \quad (4.2)$$

Da es sich um den umschlingenden Magnetfluss handelt, verläuft das Integrationsintervall vom Betrachtungspunkt r nach außen!

Weiterhin gilt:

$$E_{vR} = -\rho \cdot J_v(r), \quad (4.3)$$

und eingesetzt in (4.1)

$$\rho \cdot J_v(r) = \omega \cdot \Phi_v'(r),$$

oder

$$\Phi_v'(r) = \frac{\rho}{\omega} \cdot J_v(r). \quad (4.4)$$

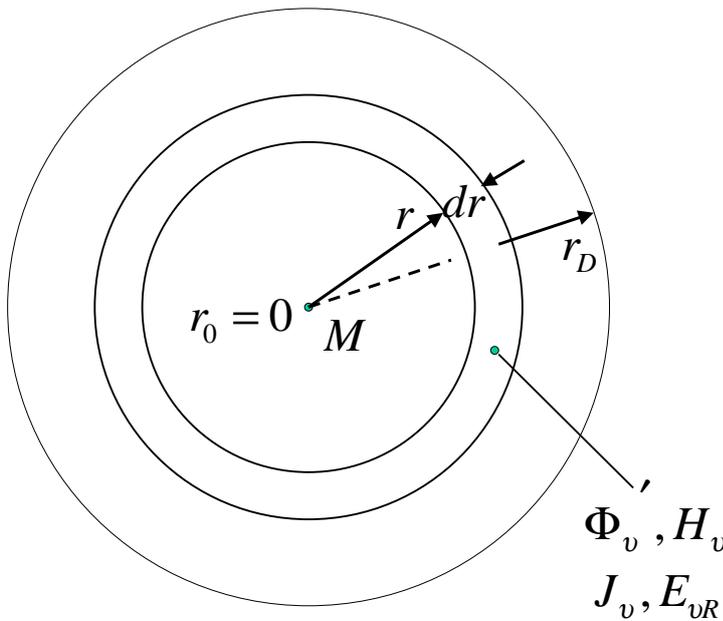


Abbildung 6: Runder Leiter

Mit Einsetzen von (4.2) in (4.4) ergibt sich:

$$\mu_0 \int_r^{r_D} H_v(r) \cdot dr = \frac{\rho}{\omega} \cdot J_v(r)$$

beziehungsweise

$$\int_r^{r_D} H_v(r) \cdot dr = \frac{\rho}{\omega \mu_0} \cdot J_v(r). \quad (4.5)$$

Mit

$$\alpha_0^2 = \frac{\omega k_0 \mu_0}{\rho} \quad (4.6)$$

und Differenzieren von (4.5) ergibt sich schließlich die Form:

$$H_v(r) = -\frac{k_0}{\alpha_0^2} \cdot \frac{d[J_v(r)]}{dr}. \quad (4.7)$$

Der Strom in dem Kreisring zwischen r_0 und r sowie mit M als Mittelpunkt (Abbildung 6) errechnet sich zu:

$$I_v(r) = \int_{r_0}^r 2\pi \cdot J_v(r) \cdot r \cdot dr. \quad (4.8)$$

r_0 ist also als Bezugspunkt oder Nullpunkt gewählt.

Der Wert von r_0 , für den in Abbildung 6 $r_0 = 0$ gewählt ist, muss später noch bestimmt werden. Nach dem Differenzieren von (4.5) tritt r_D in (4.7) nicht mehr explizit in Erscheinung. Das für (4.7) Gesagte gilt in der Folge bezogen auf r_0 analog für (4.10).

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke errechnet sich nach dem Durchflutungssatz zu:

$$\oint H_v(r) \cdot dr = k_0 \cdot I_v(r). \quad (4.9)$$

Der in (4.9) eingeführte Kopplungsfaktor k_0 nach (2.7) ergibt sich daraus, dass $H_v(r)$ nur die induktive Komponente der zu $I_v(r)$ gehörigen (aus ohmschem und induktivem Anteil gebildeten) gesamten magnetischen Feldstärke darstellt.

Mit (4.8) ergibt sich daraus:

$$H_v(r) \cdot 2\pi r = k_0 \cdot \int_{r_0}^r 2\pi \cdot J_v(r) \cdot r \cdot dr.$$

Nach Division durch 2π und Differenzieren erhält man die Form:

$$\frac{d}{dr} [H_v(r) \cdot r] = k_0 \cdot I_v(r). \quad (4.10)$$

Für die nachfolgenden Gleichungen (4.11) - (4.13) bedienen wir uns zur Vereinfachung der abgekürzten Schreibweise

$$J_v(r) = J_v$$

und

$$H_v(r) = H_v.$$

Durch Division der Gleichungen (4.7) und (4.10) lässt sich die Form ableiten:

$$\frac{\frac{d}{dr}(J_v)}{J_v} \cdot \frac{\frac{d}{dr}(H_v \cdot r)}{H_v \cdot r} = -\alpha_0^2, \quad (4.11)$$

und weiterhin:

$$\left[\frac{d}{dr}(\ln J_v) \right] \cdot \frac{d}{dr} [\ln(H_v \cdot r)] = -\alpha_0^2, \quad (4.12)$$

Mit Gleichung (4.7) errechnet sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [\ln(H_v \cdot r)] &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{\frac{dJ_v}{dr} \cdot r \cdot k_0}{\alpha_0^2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ_v}{dr} \right) + \ln r - \ln \left(\frac{\alpha_0^2}{k_0} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ_v}{dr} \right) \right] + \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (4.12) ergibt sich schließlich die Form:

$$\left[\frac{d}{dr}(\ln J_v) \right] \cdot \left\{ \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ_v}{dr} \right) \right] + \frac{1}{r} \right\} = -\alpha_0^2. \quad (4.13)$$

Diese allgemeine Form der Differentialgleichung ist für alle Werte von r und deshalb auch für alle Werte

$$r = c_R \cdot s \quad \text{mit} \quad c_R = \text{konst.}$$

maßgebend. Der Index R deutet auf die später dargelegte Abhängigkeit von Innen- beziehungsweise Außenradius des Leiters hin. In Abschnitt 4 und 5 wird vereinfacht c für c_R gesetzt, weil keine Verwechslung mit der Lichtgeschwindigkeit c zu befürchten ist. Mit Einführen des konstanten Faktors c und dem Übergang von der Variablen r auf s wird die Lösung der Differentialgleichung auf die spätere Einführung der physikalischen Anfangsbedingungen vorbereitet. Die Bedeutung des Faktors c wird später noch aufgezeigt.

An dieser Stelle wählen wir für den typischen Idealfall

$$c = c_0 = 1$$

und erhalten in völliger Analogie zu (4.13):

$$\left[\frac{d}{ds}(\ln J_v) \right] \cdot \left\{ \frac{d}{ds} \left[\ln \left(-\frac{dJ_v}{ds} \right) \right] + \frac{1}{s} \right\} = -\alpha_0^2, \quad (4.14)$$

Mit der abgekürzten Schreibweise

$$J_v = J_v(s) = J_0 \cdot e^{f(s)} \quad (4.15)$$

ist

$$\ln J_v = \ln J_0 + f(s)$$

und

$$\frac{d}{ds} (\ln J_v) = \frac{d}{ds} [f(s)]. \quad (4.16)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{dJ_v}{ds} = J_0 \cdot \frac{d}{ds} [f(s)] \cdot e^{f(s)}$$

und

$$\ln \left(-\frac{dJ_v}{ds} \right) = \ln J_0 + \ln \left\{ -\frac{d}{ds} [f(s)] \right\} + f(s)$$

sowie

$$\frac{d}{ds} \left[\ln \left(-\frac{dJ_v}{ds} \right) \right] + \frac{1}{s} = \frac{-\frac{d^2}{ds^2} [f(s)]}{-\frac{d}{ds} [f(s)]} + \frac{d}{ds} [f(s)] + f(s) + \frac{1}{s}. \quad (4.17)$$

(4.16) und (4.17) ergeben, eingesetzt in (4.14):

$$\left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\} \cdot \left\{ \frac{\frac{d^2}{ds^2} [f(s)]}{\frac{d}{ds} [f(s)]} + \frac{d}{ds} [f(s)] + \frac{1}{s} \right\} = -\alpha_0^2.$$

Nach Multiplizieren ergibt sich:

$$\frac{d^2}{ds^2} [f(s)] + \left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\}^2 + \frac{d}{ds} [f(s)] = -\alpha_0^2. \quad (4.18)$$

Der den typischen Idealfall kennzeichnende Faktor

$$c = c_0 = 1$$

korrespondiert mit der Bedingung

$$r_0 = 0.$$

Mit $r_0 = 0$ beschränken wir die Lösung der Differentialgleichung also zunächst auf den Vollleiter, wobei diese Lösung mathematisch die Grundfunktion des typischen Idealfalls darstellt, aus der später die speziellen Lösungen für Wertepaare

$$r_0 > 0, \quad c > 1$$

unschwierig abgeleitet werden können. Zur Unterscheidung wird der Grundfunktion mit $r_0 = 0$ statt des Index v der Index v_0 zugeordnet:

$$J_{v_0}, \quad H_{v_0}, \quad \Phi_{v_0}' \quad \text{und} \quad I_{v_0}.$$

Auf der Basis dieser Festlegungen und mit

$$s = r \quad c = c_0 = 1 \quad \text{und} \quad r_0 = 0$$

leitet sich aus (4.7) ab:

$$H_{v_0}(s) = -\frac{k_0}{\alpha_0^2} \cdot \frac{d[J_{v_0}(s)]}{ds}. \quad (4.19)$$

Unter Einsetzen von (4.6) folgt aus (4.4) weiterhin:

$$\Phi_{v_0}'(s) = -\frac{k_0 \mu_0}{\alpha_0^2} \cdot J_{v_0}(s). \quad (4.20)$$

Für die Berechnung von $I_{v_0}(s)$ bedienen wir uns der aus dem Durchflutungssatz abgeleiteten Beziehung:

$$I_{v_0}(s) = 2\pi s \cdot H_{v_0}(s) \cdot \frac{1}{k_0},$$

und erhalten mit (4.19)

$$I_{v0}(s) = \frac{2\pi s}{\alpha_0^2} \cdot \frac{d[J_{v0}(s)]}{ds}. \quad (4.21)$$

Hinter der Beziehung (4.18) verbirgt sich, wie die Multiplikation mit dem Faktor $e^{f(s)}$ zeigt, die spezielle Form der Besselschen Differentialgleichung:

$$e^{f(s)} \cdot \frac{d^2}{ds^2} [f(s)] + e^{f(s)} \cdot \left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\}^2 + e^{f(s)} \cdot \frac{\frac{d}{ds} [f(s)]}{s} = -\alpha_0^2 \cdot e^{f(s)} \quad (4.22)$$

oder:

$$\frac{d^2}{ds^2} [e^{f(s)}] + \frac{\frac{d}{ds} [e^{f(s)}]}{s} = -\alpha_0^2 \cdot e^{f(s)}. \quad (4.23)$$

Um bei der nachfolgenden Ableitung über diese spezielle Form der Besselschen Differentialgleichung hinaus, ein erweitertes Spektrum an modifizierten Differentialgleichungen dieses Typs zu erfassen, wird als Ausgangspunkt eine durch Parameter erweiterte Form der Besselschen Differentialgleichung zugrunde gelegt. Damit wird u. a. im Vorgriff auf die später abgeleitete maßgebende Differentialgleichung für die Strömungsverhältnisse in einem Elektron die Lösung vorbereitet. Die erweiterte, gegenüber (4.15) allgemein gehaltene Form der Differentialgleichung soll von der Funktion

$$P(s) = e^{f(s)} \quad (4.24)$$

ausgehen und wird mit den Parametern p und q wie folgt definiert:

$$p \cdot \frac{d^2}{ds^2} [e^{f(s)}] + q \cdot \frac{\frac{d}{ds} [e^{f(s)}]}{s} = -\alpha_0^2 \cdot e^{f(s)}. \quad (4.25)$$

Für die weitere Ableitung setzen wir in dem Lösungsansatz nach (4.25) für

$$f(s) = a_{-1} \cdot \ln s + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \dots \quad (4.26)$$

Durch Differenzieren erhält man aus (4.26):

$$\frac{d}{ds} [f(s)] = a_{-1} \cdot \frac{1}{s} + a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + 4a_4 s^3 + \dots \quad (4.27)$$

und

$$\frac{d^2}{ds^2} [f(s)] = -a_{-1} \cdot \frac{1}{s^2} + 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 s + 3 \cdot 4a_4 s^2 + \dots \quad (4.28)$$

Eingesetzt in der nach (4.25) erweiterten Form von (4.18) ergibt sich unter Übergang von der speziellen Form mit $n = 0$ zur allgemeinen Form der Besselschen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & \left(-a_{-1} \cdot \frac{1}{s^2} + 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 s + 3 \cdot 4a_4 s^2 + \dots \right) \cdot p \\ & + \left(a_{-1} \cdot \frac{1}{s} + a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + 4a_4 s^3 + \dots \right)^2 \cdot p \\ & + \left(a_{-1} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{a_1}{s} + 2a_2 + 3a_3 s + 4a_4 s^2 + \dots \right) \cdot q \\ & = -\alpha_0^2 + \frac{n^2}{s^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

und umgeformt:

$$\begin{aligned}
& p \cdot (2^2 \cdot a_2 + 3^2 \cdot a_3 s + 4^2 \cdot a_4 s^2 + 5^2 \cdot a_5 s^3 + \dots) \\
& + (q - p) \cdot \left(a_{-1} \cdot \frac{1}{s^2} + 2a_2 + 3a_3 s + 4a_4 s^2 + 5a_5 s^3 + \dots \right) \\
& + p \cdot \left(a_{-1} \cdot \frac{1}{s} + a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + 4a_4 s^3 + \dots \right) \\
& + q \cdot \frac{a_1}{s} = -\alpha_0^2 + \frac{n^2}{s^2}. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Für die Glieder mit s^{-2} gilt die Gleichung:

$$a_{-1} \cdot (q - p) + p \cdot a_{-1}^2 = n^2. \tag{4.31}$$

Durch Koeffizientenvergleich erkennt man, dass mit

$$d^2 = \frac{4 \cdot p}{\alpha_0^2} \tag{4.32}$$

vorstehende Gleichung (4.30) für alle Werte von s erfüllt wird, wenn die Werte a_i wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
s^{-2}: \quad a_{-1} &= \sqrt{\frac{n^2}{p} + \left(\frac{q-p}{2 \cdot p}\right)^2} - \frac{q-p}{2 \cdot p} = m_q - \frac{q-p}{2 \cdot p} \\
&\text{mit } m_q = \sqrt{\frac{n^2}{p} + \left(\frac{q-p}{2 \cdot p}\right)^2} \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$s^{-1}: \quad a_{-1} = 0 \tag{4.34}$$

$$s^0: \quad 2 \cdot a_2 \cdot (2 + 2 \cdot m_q) = -\frac{4}{d^2} \tag{4.35}$$

$$s^1: \quad 3 \cdot a_3 \cdot (3 + 2 \cdot m_q) + 2a_1 \cdot 2a_2 = 0 \quad a_3 = 0$$

$$s^2: \quad 4 \cdot a_4 \cdot (4 + 2 \cdot m_q) + 2^2 a_2^2 = 0 \quad *)$$

$$s^3: \quad 5 \cdot a_5 \cdot (5 + 2 \cdot m_q) = 0 \quad a_5 = 0$$

$$s^4: \quad 6 \cdot a_6 \cdot (6 + 2 \cdot m_q) + 2 \cdot 2a_2 \cdot 4a_4 = 0$$

$$s^5: \quad 7 \cdot a_7 \cdot (7 + 2 \cdot m_q) = 0 \quad a_7 = 0$$

$$s^6: \quad 8 \cdot a_8 \cdot (8 + 2 \cdot m_q) + 2 \cdot 2a_2 \cdot 6a_6 + 4^2 a_4^2 = 0$$

$$s^7: \quad 9 \cdot a_9 \cdot (9 + 2 \cdot m_q) = 0 \quad a_9 = 0$$

$$s^8: \quad 10 \cdot a_{10} \cdot (10 + 2 \cdot m_q) + 2 \cdot 2a_2 \cdot 8a_8 + 2 \cdot 4a_4 \cdot 6a_6 = 0$$

$$s^9: \quad 11 \cdot a_{11} \cdot (11 + 2 \cdot m_q) = 0 \quad a_{11} = 0$$

$$s^{10}: \quad 12 \cdot a_{12} \cdot (12 + 2 \cdot m_q) + 2 \cdot 2a_2 \cdot 10a_{10} + 2 \cdot 4a_4 \cdot 8a_8 + 6^2 a_6^2 = 0$$

⋮
⋮
⋮

*) Für alle Zeilen s^i mit $i \geq 2$ ist auf die Angabe aller Produkte von Faktoren a_i mit ungeradem i verzichtet, weil in aufsteigender Folge, beginnend mit $a_1 = 0$ für ungerade i alle Werte $a_i = 0$ werden. Deshalb wird in der Folge auch i durch $2 \cdot v$ substituiert.

Daraus ergibt sich für die Faktoren a_i :

$$\begin{aligned}
 a_i &= 0 \quad \text{für } i \text{ ungerade und} \\
 -2a_2 &= \frac{2^2}{2 + 2 \cdot m_q} \cdot \frac{1}{d^2} \\
 -4a_4 &= \frac{2a_2 \cdot 2a_2}{4 + 2 \cdot m_q} \\
 -6a_6 &= \frac{2 \cdot 2a_2 \cdot 4a_4}{6 + 2 \cdot m_q} \\
 -8a_8 &= \frac{2 \cdot a_2 \cdot 6a_6 + 4a_4 \cdot 4a_4}{8 + 2 \cdot m_q} \\
 -10a_{10} &= \frac{2 \cdot 2a_2 \cdot 8a_8 + 2 \cdot 4a_4 \cdot 6a_6}{10 + 2 \cdot m_q} \\
 -12a_{12} &= \frac{2 \cdot 2a_2 \cdot 10a_{10} + 2 \cdot 4a_4 \cdot 8a_8 + 6a_6 \cdot 6a_6}{12 + 2 \cdot m_q} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned}$$

$$\text{Mit } \beta_i = -i \cdot a_i \cdot d^i \text{ beziehungsweise } \beta_{2 \cdot v} = -2 \cdot v \cdot a_{2 \cdot v} \cdot d^{2 \cdot v} \quad (4.36)$$

lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= \frac{2^2}{2 + 2 \cdot m_q} \\
 \beta_4 &= \frac{\beta_2^2}{4 + 2 \cdot m_q} \\
 \beta_6 &= \frac{2 \cdot \beta_2 \cdot \beta_4}{6 + 2 \cdot m_q} \\
 \beta_8 &= \frac{2 \cdot \beta_2 \cdot \beta_6 + \beta_4^2}{8 + 2 \cdot m_q} \\
 \beta_{10} &= \frac{2 \cdot \beta_2 \cdot \beta_8 + 2 \cdot \beta_4 \cdot \beta_6}{10 + 2 \cdot m_q} \\
 \beta_{12} &= \frac{2 \cdot \beta_2 \cdot \beta_{10} + 2 \cdot \beta_4 \cdot \beta_8 + \beta_6^2}{12 + 2 \cdot m_q} \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot
 \end{aligned}$$

Für die nachfolgenden Ableitungen ist zu beachten, dass alle Werte $a_{2 \cdot v}$ und $\beta_{2 \cdot v}$ abhängige Werte von m_q darstellen.

Der Quotient $\frac{\beta_{2 \cdot v}}{\beta_{2 \cdot v+2}}$ nähert sich mit wachsendem Wert von v sehr rasch einem Grenzwert

$$\begin{aligned}
 \tau_m &= \tau_m(m_q) \quad \text{mit} \\
 \tau_m^2 &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{\beta_{2 \cdot v+2}} \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Die Glieder $\beta_{2 \cdot v}$ nähern sich also rasch einer geometrischen Reihe. Aus (4.37) ergibt sich:

$$\tau_m = \sqrt{\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{\beta_{2 \cdot v+2}}}. \quad (4.38)$$

Für die spezielle Form der Besselschen Differentialgleichung nach (4.22) mit dem Parametertripel:

$$n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 1$$

ergibt sich nach (4.33) der Wert:

$$m_q = 0$$

und

$$\tau = \tau_m(m_q = 0) = 1,202\,412\,778\,85 \quad (4.39)$$

Die später abgeleiteten Strömungsverhältnisse im Elektron verlangen dagegen das Parametertripel:

$$n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 2,$$

aus dem sich nach (4.33)

$$m_q = \frac{1}{2}$$

ergibt. Der zugehörige Wert τ_2 ergibt sich zu:

$$\tau_2 = \tau_m \left(m_q = \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \quad (4.40)$$

Für höhere Werte v (z.B. $v \geq 6$) lassen sich die Werte von $\beta_{2 \cdot v}$ mit sehr guter Genauigkeit durch die folgende Beziehung errechnen:

$$\beta_{2 \cdot v} = \frac{2}{\tau_m^{2 \cdot v}}. \quad (4.41)$$

Diese Beziehung gilt für $v \rightarrow \infty$ exakt und stellt - wie gesagt - mit Ausnahme des Bereichs kleiner Werte von (z.B. $v \leq 6$) eine sehr gute Näherung dar. Damit ergibt sich die Form:

$$P(s) = e^{f(s)}$$

mit der aus (4.26) und (4.36) gebildeten Beziehung

$$f(s) = a_{-1} \cdot \ln s - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \left(\frac{s}{d} \right)^{2 \cdot v}. \quad (4.42)$$

Mit (4.41) ergibt sich daraus für höhere Werte von v (z.B. $v > 6$) die Näherungsbeziehung :

$$\begin{aligned} f(s) &\approx a_{-1} \cdot \ln s - \sum_{v=1}^{v \rightarrow 6} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \left(\frac{s}{d} \right)^{2 \cdot v} - \sum_{v=7}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v \cdot \tau_m^{2 \cdot v}} \cdot \left(\frac{s}{d} \right)^{2 \cdot v}, \\ f(s) &\approx a_{-1} \cdot \ln s - \sum_{v=1}^{v \rightarrow 6} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \left(\frac{s}{d} \right)^{2 \cdot v} - \sum_{v=7}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{s}{d \cdot \tau_m} \right)^{2 \cdot v}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Für die Ableitung der Beziehungen für die Koaxialleitung gilt die spezielle Form der Besselschen Differentialgleichung mit $n = 0$, $p = 1$ und $q = 1$ sowie $m_q = 0$ und $a_{-1} = 0$ nach Beziehung (4.33), weiterhin $\tau_m(m_q = 0) = \tau$:

$$f(s) \approx - \sum_{v=1}^{v \rightarrow 6} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \left(\frac{s}{d}\right)^{2 \cdot v} - \sum_{v=7}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{s}{d \cdot \tau}\right)^{2 \cdot v} \quad (n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 1) \quad (4.44)$$

Sowohl diese spezielle Form nach (4.44) wie auch die allgemeine Form nach (4.43) lassen erkennen, dass $s = d \cdot \tau_m = s_D = D_m$ den Grenzwert darstellt, bei dem $f(s)$ ins (negativ) Unendliche anwächst und $e^{f(s)}$ zu 0 wird. Dem Grenzwert

$$D_m = d \cdot \tau_m \quad (4.45)$$

kommt somit besondere Bedeutung zu, die im nachfolgenden Kapitel aufgezeigt wird.

4.2 Eindringtiefe

Die physikalische Bedeutung des Grenzwertes D_m wird nachfolgend zwar an der für die Verhältnisse in einer Koaxialleitung maßgebenden Differentialgleichung mit $m_q = 0$ festgemacht. Die mathematische Bedeutung dieses Grenzwertes ist aber allgemeiner Natur, insbesondere im Hinblick auf die nachstehend aufgezeigte normierte Form. Der Faktor D_m repräsentiert (bei der Koaxialleitung) die Eindringtiefe und kann in der Folge zweckmäßig für eine normierte Darstellung dienen. Die Eindringtiefe D_m definiert einen konkreten Punkt, bei dem die räumlich variable Stromdichte J_v auf 0 abgeklungen ist. Die wichtige Bedeutung dieser markanten Größe und der Konflikt mit der Definition der Eindringtiefe, wie sie uns aus der Hochfrequenztechnik vertraut ist, wird später noch detailliert dargestellt, wenn konstante Stromdichte J_k und variable Stromdichte J_v in Zusammenhang gebracht werden.

Aus (4.32) ergibt sich:

$$d = \frac{2 \cdot \sqrt{p}}{\alpha_0}. \quad (4.46)$$

Damit kann für die Eindringtiefe nach (4.45)

$$D_m = d \cdot \tau_m$$

gesetzt werden:

$$D_m = \frac{2\tau_m \cdot \sqrt{p}}{\alpha_0}. \quad (4.47)$$

Für den wichtigen Spezialfall der Koaxialleitung mit den Parametern

$$n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 1$$

sowie dem resultierenden Wert

$$m_q = 0$$

ergibt sich aus (4.6) mit (2.7), wobei an die Erläuterungen zu (4.9) erinnert wird

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega k_0 \mu_0}{\rho}} \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$D_m = D :$$

$$D = \frac{2\tau}{\alpha_0} = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\omega k_0 \mu_0}} = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega \mu_0}}. \quad (4.48)$$

Umgeformt ergeben sich die Beziehungen:

$$\alpha_0^2 = \frac{\omega k_0 \mu_0}{\rho} = \frac{4\tau^2}{D^2}, \quad (4.49)$$

$$\alpha_0^2 D^2 = 4\tau^2. \quad (4.50)$$

4.3 Normierte Form

Für die weiteren Betrachtungen wird die auf die Eindringtiefe D (allgemein: D_m) normierte Größe z eingeführt. Sie folgt bei Verknüpfung mit Faktor τ (allgemein: τ_m) der Beziehung:

$$z = \frac{s}{D} \quad \text{mit} \quad s = s_z \quad \text{und} \quad D = d \cdot \tau.$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{s}{D} = \tau \cdot z.$$

Mit Einführen dieser Beziehung wird (4.42) überführt in die Form:

$$g(z) = a_{-1} \cdot \ln(z \cdot D) - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot (\tau \cdot z)^{2 \cdot v}. \quad (4.51)$$

Die zugehörige Näherungsbeziehung für die Koaxialleitung lautet analog (4.44):

$$g(z) \approx - \sum_{v=1}^{v=6} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot (\tau \cdot z)^{2 \cdot v} - \sum_{v=7}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} \cdot z^{2 \cdot v} \quad (n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 1) \quad (4.52)$$

Zusammenfassend lässt sich also schreiben:

$$f(s) = g(z) \quad \text{mit} \quad z = \frac{s}{D},$$

und unter Rückgriff auf (4.52):

$$J_{v0}(s) = J_{v0}(z) = J_0 \cdot e^{g(z)} \quad \text{mit} \quad z = \frac{s}{D} \quad \text{und} \quad c = 1. \quad (4.53)$$

Die Funktion $e^{g(z)}$ mit $g(z)$ nach (4.51)(für $a_{-1} = 0$) beziehungsweise (4.52) lässt sich auch in der speziellen Form der Besselfunktion für $n = 0$ darstellen:

$$e^{g(z)} = \sum_{v=0}^{v \rightarrow \infty} \frac{-1^v}{(v!)^2} \cdot (\tau \cdot z)^{2 \cdot v}; \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (4.54)$$

In (6.55) wird später (für andere Zwecke) mit

$$J = J_0 \cdot e^{g(z)}$$

eine Form abgeleitet, die nach Division durch J_0 folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{1}{4\tau^2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} [e^{g(z)}] + \frac{1}{4\tau^2 \cdot z} \cdot \frac{d}{dz} [e^{g(z)}] + e^{g(z)} = 0. \quad (4.55)$$

Dies ist die zur Besselfunktion nach (4.54) gehörige Besselsche Differentialgleichung. Beide Methoden zur Berechnung von $e^{g(z)}$ sind mathematisch gleichwertig. Freilich lässt sich in der Form unter Verwendung von (4.51) beziehungsweise (4.52) die markante Nullstelle bei $z = 1$ und damit das Ende des physikalisch sinnvollen Bereichs unmittelbar erkennen.

Mit

$$s = z \cdot d \quad \text{und} \quad ds = dz \cdot D$$

ergibt sich:

$$\frac{d[J_{v0}(s)]}{ds} = \frac{d[J_{v0}(z)]}{dz \cdot D}.$$

Die Beziehungen (4.19) - (4.21) werden deshalb wie folgt in die normierte Form überführt:

$$H_{v0}(z) = -\frac{k_0}{\alpha_0^2 D} \cdot \frac{d[J_{v0}(z)]}{dz},$$

$$\Phi_{v0}'(z) = \frac{k_0 \mu_0}{\alpha_0^2} \cdot J_{v0}(z),$$

$$I_{v0}(z) = -\frac{2\pi z}{\alpha_0^2} \cdot \frac{d[J_{v0}(z)]}{dz}.$$

Mit Einsetzen von (4.50)

$$\alpha_0^2 D^2 = 4\tau^2$$

ergibt sich:

$$H_{v0}(z) = -\frac{k_0 D}{4\tau^2} \cdot \frac{d[J_{v0}(z)]}{dz}, \quad (4.56)$$

$$\Phi_{v0}'(z) = \frac{k_0 \mu_0 D^2}{4\tau^2} \cdot J_{v0}(z), \quad (4.57)$$

$$I_{v0}(z) = -\frac{\pi z D^2}{2\tau^2} \cdot \frac{d[J_{v0}(z)]}{dz}. \quad (4.58)$$

Die Menge sinnvoller Lösungswerte beschränkt sich bei der Grundfunktion nach (4.53) auf den Bereich der Variablen von

$$0 \leq s \leq D \quad \text{oder} \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Damit werden die Verhältnisse im Vollleiter mit Radius D lückenlos abgebildet.

4.4 Erweiterter Variablenbereich

Gleichung (4.18) beruht noch auf der Identität von r und s , nämlich

$$r = s \cdot c = s \quad \text{mit} \quad c = c_0 = 1.$$

Mit Einsetzen von (4.49)

$$\alpha_0^2 = \frac{4\tau^2}{D^2}$$

ergibt sich aus (4.18):

$$\frac{d^2}{ds^2} [f(s)] + \left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\}^2 + \frac{\frac{d}{ds} [f(s)]}{s} = -\frac{4\tau^2}{D^2}. \quad (4.59)$$

Wird jetzt die Variable s bei unverändertem Lösungsansatz nach (4.15) durch c dividiert, ergibt sich die Form:

$$c^2 \cdot \frac{d^2}{ds^2} [f(s)] + \left\{ c \cdot \frac{d}{ds} [f(s)] \right\}^2 + \frac{c \cdot \frac{d}{ds} [f(s)]}{s \cdot \frac{1}{c}} = -\frac{4\tau^2}{D^2},$$

oder:

$$\frac{d^2}{ds^2} [f(s)] + \left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\}^2 + \frac{\frac{d}{ds} [f(s)]}{s} = -\frac{4\tau^2}{c^2 D^2}. \quad (4.60)$$

Die Menge der Lösungswerte erweitert sich in dieser allgemeinen Form auf den Bereich der Variablen von

$$0 \leq s \cdot c \leq c \cdot D \quad \text{oder} \quad 0 \leq z = \frac{s \cdot c}{c \cdot D} \leq 1.$$

Die allgemeine Transferbeziehung lautet:

$$r = s \cdot c \quad \text{mit} \quad c \geq 1.$$

Mit

$$f(s) = g(z) \quad \text{und} \quad s = z \cdot D$$

ergibt sich aus (4.59) die normierte Form:

$$\frac{1}{D^2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} [g(z)] + \left\{ \frac{1}{D} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \right\}^2 + \frac{\frac{1}{D} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{z \cdot D} = -\frac{4\tau^2}{D^2},$$

oder multipliziert mit D^2 :

$$\frac{d^2}{dz^2} [g(z)] + \left\{ \frac{d}{dz} [g(z)] \right\}^2 + \frac{\frac{d}{dz} [g(z)]}{z} = -4\tau^2, \quad (4.61)$$

wobei gilt:

$$s = z \cdot D, \quad r = z \cdot cD \quad \text{mit} \quad c \geq 1.$$

(4.60) korrespondiert unmittelbar mit der Besselschen Differentialgleichung nach (4.55).

Rechnet man:

$$\frac{\frac{d}{dz} \left\{ e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \right\}}{e^{g(z)} \cdot z} = \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d^2}{dz^2} [g(z)] \cdot z + e^{g(z)} \cdot \left\{ \frac{d}{dz} [g(z)] \right\}^2 \cdot z + e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{e^{g(z)} \cdot z},$$

so ergibt sich nach Kürzen die Beziehung:

$$\frac{\frac{d}{dz} \left\{ e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \right\}}{e^{g(z)} \cdot z} = \frac{d^2}{dz^2} [g(z)] + \left\{ \frac{d}{dz} [g(z)] \right\}^2 + \frac{d}{dz} [g(z)] = -4\tau^2. \quad (4.62)$$

Diese Form wird später noch gebraucht.

Wir erkennen, dass bei dieser vorstehend entwickelten Substitution nach (4.60) der Lösungsansatz nur formal der gleiche wie für $c = 1$ geblieben ist. Tatsächlich findet eine Variablentransformation statt von

$$r = s \quad \text{auf} \quad r = s \cdot c.$$

Der Variablenbereich wird also gleichmäßig um den multiplikativen Faktor c gedehnt. Aber auch die „Eindringtiefe“ wird um den multiplikativen Faktor c gedehnt, wie ein Vergleich von (4.59) und (4.60) zeigt: Die linken Gleichungsseiten sind identisch. Die rechte Gleichungsseite von (4.60) wird gegenüber (4.59) durch den Faktor c^2 dividiert. Dies bedeutet aber eine um den multiplikativen Faktor c gewachsene „Eindringtiefe“. Wenn aber die Variable und die „Eindringtiefe“ im gleichen Maßstab gedehnt werden, bleibt die formale Struktur der Lösung gemäß (4.53) erhalten! Es gilt damit:

$$J_v(s) = J_v(z) = J_0 \cdot e^{g(z)} \quad \text{mit} \quad z = \frac{c \cdot s}{c \cdot D} = \frac{s}{D} \quad \text{und} \quad c \geq 1. \quad (4.63)$$

Wir erkennen also zusammenfassend, dass der Faktor $c > 1$ einer gleichmäßigen radialen Dehnung um den Faktor c entspricht. Deshalb gehen die Beziehungen (4.56) - (4.58) für die abhängigen Beziehungen $H_{v0}(z)$, $\Phi_{v0}'(z)$ und $I_{v0}(z)$ durch die Dehnung wie folgt in die allgemeine Form für

$$c \geq 1$$

über:

$$H_v(z) = -\frac{k_0 c D}{4\tau^2} \cdot \frac{d[J_v(z)]}{dz}, \quad (4.64)$$

$$\Phi_v'(z) = \frac{k_0 \mu_0 c^2 D^2}{4\tau^2} \cdot J_v(z), \quad (4.65)$$

$$I_v(z) = -\frac{\pi z c^2 D^2}{2\tau^2} \cdot \frac{d[J_v(z)]}{dz}. \quad (4.66)$$

Wie ein Vergleich der Beziehungen (4.59) und (4.60) zeigt, geht auch die Beziehung

$$\alpha_0^2 = \frac{\omega k_0 \mu_0}{\rho} = \frac{4\tau^2}{D^2} \quad \text{für} \quad c = c_0 = 1$$

in die allgemeine Form über:

$$\alpha^2 = \frac{\omega k_0 \mu_0}{c^2 \rho} = \frac{4\tau^2}{c^2 D^2} \quad \text{für} \quad c \geq 1. \quad (4.67)$$

Aus dem Verhältnis von induktivem Spannungsabfall

$$\omega \Phi_v'(z)$$

zum ohmschen Spannungsabfall

$$\rho \cdot J_v(z)$$

ergibt sich mit (4.65) und (4.67) die Beziehung

$$k = \frac{\omega \Phi_v'(z)}{\rho \cdot J_v(z)} = \frac{\omega k_0 \mu_0 c^2 D^2 \cdot J_v(z)}{4\tau^2 \cdot \rho \cdot J_v(z)} = c^2. \quad (4.68)$$

Ist der Kopplungsfaktor für den ohmschen Spannungsabfall mit

$$k_R$$

definiert, so ist also der Kopplungsfaktor des induktiven Spannungsabfalls entsprechend (4.68)

$$k_L = c^2 \cdot k_R. \quad (4.69)$$

In Analogie zu Abbildung 2 erhalten wir weiterhin die Beziehung für die Phasenverhältnisse:

$$\tan \varphi = \frac{1}{c^2}. \quad (4.70)$$

Markieren wir den Startpunkt der (echten) Eindringtiefe, über die noch zu reden sein wird, mit

$$r_0 > 0 \quad \text{und} \quad z_0 = \frac{r_0}{c \cdot D} > 0,$$

so irritiert zunächst im Hinblick z.B. auf den hohlen Innenleiter einer Koaxialleitung, dass gemäß (4.64) und (4.66)

$$\begin{aligned} H_v(z_0) &\neq 0 \quad \text{und} \\ J_v(z_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

sind. Wir dürfen aber bei der Interpretation nicht aus dem Auge verlieren, dass sich die resultierenden Werte der Stromdichte J aus der Differenz von konstantem Anteil J_k und variablem Anteil J_v ergeben mit dem entsprechenden Einfluss auf die abhängigen Größen H , Φ' und I !

(Einzelheiten folgen später an gegebener Stelle.)

Beim Vergleich von (4.56) bis (4.58) mit (4.63) bis (4.66) ergeben sich unter Berücksichtigung von

$$J_{v0} = J_v$$

folgende, durch die Dehnung bedingten Verhältnisse:

$$\frac{H_v(z)}{H_{v0}(z)} = c, \quad (4.71)$$

$$\frac{\Phi_v'(z)}{\Phi_{v0}'(z)} = c^2, \quad (4.72)$$

$$\frac{I_v(z)}{I_{v0}(z)} = c^2. \quad (4.73)$$

Außerdem gilt mit (4.49) und (4.67):

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} = \frac{1}{c^2}. \quad (4.74)$$

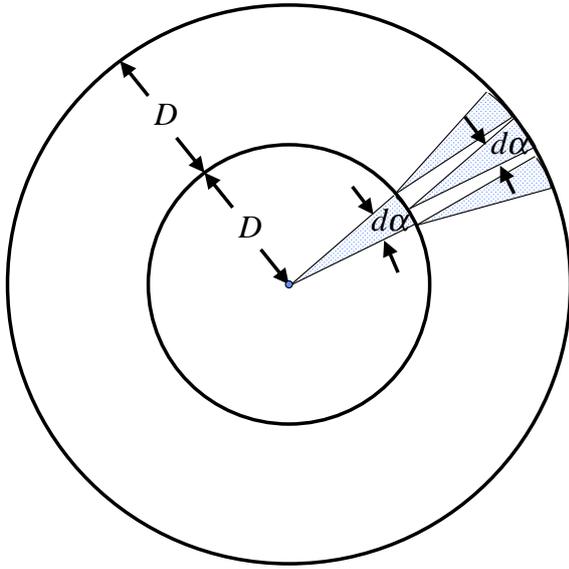


Abbildung 7: Eindringtiefe

Bei der vorstehenden Beschreibung der Dehnung der Eindringtiefe um den multiplikativen Faktor c steht im Text diese gedehnte Eindringtiefe in Anführungszeichen, denn mathematisch ist der Wert mit $c \cdot D$ zwar klar definiert, aber physikalisch kann sie ja z.B. nicht den hohlen Teil eines hohlen Leiters mit einschließen. Wie groß ist nun die tatsächliche physikalische Eindringtiefe in den Kreisring, der den hohlen Leiter bildet? Hierzu vergleichen wir nach Abbildung 7 einen Vollleiter, dessen Radius gleich der Eindringtiefe D ist, mit einem umgebenden konzentrischen Außenleiter mit einer Wandstärke, die ebenfalls gleich D ist. Dabei erkennen wir folgende prinzipielle Gemeinsamkeiten:

Sowohl der Querschnitt des Vollleiters wie der des hohlen Leiters kann in unendlich viele differentiell kleine identische Sektoren mit dem Öffnungswinkel $d\alpha$ unterteilt werden. In jeder dieser aus der sektoriellen Teilung hervorge-

gangenen differentiellen Teilflächen müssen identische Beziehungen für J_v und H_v vorliegen. Betrachtet man nämlich das Linienintegral der magnetischen Feldstärke, so muss der auf die radiale Richtung entfallende Teil durch Kompensation zu 0 werden, in der dazu senkrechten Richtung sind dagegen die Beziehung zwischen J_v und H_v nach (4.7) sowie Beziehung (4.14) maßgebend. Bei Berücksichtigung des durch r_0 fixierten Nullpunktes ergibt sich also nach dieser Überlegung für den Vollleiter und den schraffierten Teil des hohlen Leiters ein identischer Verlauf von J_v und H_v ! Diese Überlegung erlaubt zwar nicht etwa J_v und die abhängigen Größen im Kreisring zu berechnen, weil ja auch für den Grenzwert mit nach 0 gehendem Winkel $d\alpha$ der schraffierten Sektoren oder Dreiecke immer auch die Verhältnisse in den **nicht** schraffierten Dreiecken im Gesamtergebnis Berücksichtigung finden müssen. Aber unbeschadet dessen bleibt **eine** Größe erhalten, nämlich die Eindringtiefe, die nach dieser Überlegung offensichtlich in Kreisring und Vollleiter identisch ist!

Für die weitere Betrachtung wählen wir zusätzlich zum Radius r_0 als Beginn der Eindringtiefe, den Radius r_D für das Ende der Eindringtiefe. Deshalb gilt:

$$r_D = r_0 + D. \quad (4.75)$$

r_D korrespondiert mit dem Punkt

$$s = s_D = D \quad \text{und} \quad z = z_D = 1$$

entsprechend der Variablentransformation, die allgemein lautet:

$$r = s \cdot c,$$

und speziell für r_D :

$$r_D = D \cdot c.$$

Daraus ergibt sich:

$$c = \frac{r_D}{D}. \quad (4.76)$$

Dabei korrespondiert mit r_D die normierte Größe

$$z_D = \frac{r_D}{c \cdot D} = \frac{r_D}{r_D} = 1,$$

und mit r_0 die normierte Größe z_0 . Es errechnet sich mit (4.75) und (4.76):

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{r_0}{c \cdot D} = \frac{r_0}{r_D} = \frac{r_D - D}{c \cdot D}, \\ z_0 &= 1 - \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ist R_a der Außenradius des Leiters, so muss beim Innenleiter die Stromdichte J_v bei R_a auf 0 abgeklungen sein (Endpunkt der Eindringtiefe), und r_D errechnet sich zu:

$$r_D = R_a.$$

(Jeder hypothetische Endpunkt $R_h < R_a$ würde ja für $r > R_h$ zu induktiv erzeugten Werten $J_v \neq 0$ führen, was der Bedingung $J_v = 0$ für den Endpunkt der Eindringtiefe widerspricht.) Mit (4.75) und (4.76) lässt sich also zusammenfassend schreiben für den

$$\textbf{Innenleiter} : \quad r_0 = R_a - D, \quad (4.78)$$

$$r_D = R_a, \quad (4.79)$$

$$c = \frac{R_a}{D}. \quad (4.80)$$

Ist R_i der Innenradius, so muss beim Außenleiter die Stromdichte J_v bei $R_i + D$ auf 0 abgeklungen sein und r_D errechnet sich zu:

$$r_D = R_i + D.$$

(Dass R_i Anfangspunkt der induktiven Wirkungen ist und damit $R_i + D$ Endpunkt der Eindringtiefe, bedarf keiner näheren Erläuterung.) Mit (4.75) und (4.76) lässt sich somit zusammenfassend schreiben für den

$$\textbf{Außenleiter} : \quad r_0 = R_i, \quad (4.81)$$

$$r_D = R_i + D, \quad (4.82)$$

$$c = \frac{R_i}{D} + 1. \quad (4.83)$$

Nachdem nun die Gleichungen (4.80) und (4.83) für den Faktor c vorliegen, fahren wir fort, indem Gleichung (4.63) in die Gleichungen (4.64) - (4.66) eingebracht wird. Dabei erhalten wir die Beziehungen:

$$H_v(z) = -\frac{k_0 c D}{4\tau^2} \cdot J_0 \cdot e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)], \quad (4.84)$$

$$\Phi_v'(z) = \frac{k_0 \mu_0 c^2 D^2}{4\tau^2} \cdot J_0 \cdot e^{g(z)}, \quad (4.85)$$

$$I_v(z) = -\frac{\pi z c^2 D^2}{2\tau^2} \cdot J_0 \cdot e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]. \quad (4.86)$$

Gleichung (4.86) lässt sich auch in der Schreibweise des bestimmten Integrals darstellen, denn eine Integration entsprechend (4.8) muss ja prinzipiell zum gleichen Ergebnis führen. Gleichung (4.86) wird also wie folgt umgeformt:

$$I_v(z) = -\frac{\pi c^2 D^2}{2\tau^2} \cdot J_0 \cdot \left[z \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot e^{g(z)} \right]_{z=0}^{z=z}. \quad (4.87)$$

Das unbestimmte Integral

$$- \left[z \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot e^{g(z)} \right]$$

nimmt für

$$z = 0$$

den Wert 0 an. Für

$$z \rightarrow 1$$

ergibt sich dagegen unter den Bedingungen des Parametertripels

$$n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 1$$

der Grenzwert

$$\gamma \approx 1,25. \tag{4.88}$$

(Die Ableitung von γ ist im Unterabschnitt 4.5 dargestellt.)

Zusammenfassend erkennt man aber auch die Identität von (4.86) und (4.87).

Um den gesamten Bogen der mathematischen Zusammenhänge aufzuzeigen, wird noch auf folgendes hingewiesen: Berücksichtigt man (4.63) mit

$$z = \frac{s}{D}$$

und die für (4.76) in Ansatz gebrachte Variablentransformation

$$r = s \cdot c = z \cdot D \cdot c,$$

kann (4.8) wie folgt in die normierte Form überführt werden:

$$I_v(z) = \int_{z_0}^z 2\pi \cdot I_v(z) \cdot z \cdot D \cdot c \cdot dz \cdot D \cdot c,$$

oder:

$$I_v(z) = J_0 \cdot 2\pi c^2 D^2 \int_{z_0}^z z \cdot e^{g(z)} \cdot dz. \tag{4.89}$$

Differenziert ergibt (4.89):

$$\frac{d}{dz} [I_v(z)] = J_0 \cdot 2\pi c^2 D^2 \cdot z \cdot e^{g(z)}.$$

Ermittelt man die Ableitung $\frac{d}{dz} [I_v(z)]$ nicht aus (4.89), also ausgehend von (4.8), sondern ausgehend von (4.86), so muss dies zum gleichen Ergebnis führen. Unter Nutzung der Gleichung (4.62) lässt sich dies in der Tat nachweisen.

4.5 Ableitung der Konstanten γ

Aus der Funktion nach (4.51)

$$g(z) = a_{-1} \cdot \ln(z \cdot D) - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot (\tau \cdot z)^{2 \cdot v}$$

ergibt sich:

$$-\frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z = -a_{-1} + \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \beta_{2 \cdot v} \cdot (\tau \cdot z)^{2 \cdot v}.$$

Für $z \rightarrow 1$ tritt die Konvergenz der höherrangigen Glieder und damit der Einfluss der niederrangigen Glieder sowie von a_{-1} immer mehr in den Hintergrund. Damit lässt sich mit (4.41)

$$\beta_{2 \cdot v} = \frac{2}{\tau^{2 \cdot v}} \quad \text{für } v \rightarrow \infty$$

schreiben:

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ -\frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \right\} \\ &= \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{2}{\tau^{2 \cdot v}} \cdot (\tau \cdot z)^{2 \cdot v} \\ &= \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} 2 \cdot z^{2 \cdot v} \\ &= v \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot v. \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ -\frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \right\} = 2 \cdot v. \quad (4.90)$$

Den weiteren Betrachtungen stellen wir folgende unendliche Reihen voran:

$$\sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} = \ln v,$$

$$A = g(z \rightarrow 1) = - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \tau^{2 \cdot v}.$$

Das Glied $a_{-1} \cdot \ln(z \cdot D)$ darf dabei als endlicher Wert vernachlässigt werden. Mit steigendem Wert von v nähert sich nach (4.41) $\beta_{2 \cdot v}$ sehr rasch dem Grenzwert:

$$\beta_{2 \cdot v} = \frac{2}{\tau^{2 \cdot v}}.$$

Diese Beziehung ergibt, eingesetzt in

$$\begin{aligned} A &= g(z \rightarrow 1) \\ A' &= - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{2}{\tau^{2 \cdot v}} \cdot \tau^{2 \cdot v} = - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v} = - \ln v. \end{aligned}$$

Damit lässt sich schreiben:

$$g(z \rightarrow 1) = A - A' + A',$$

wobei gilt:

$$A' = -\ln v,$$

während sich

$$A - A' = \Delta A$$

in der folgenden Form darstellen lässt:

$$\Delta A = - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \tau^{2 \cdot v} + \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v}.$$

ΔA nähert sich bereits bei Berücksichtigung nur der Glieder bis z. B. $v = 6$ sehr weitgehend seinem exakten Grenzwert für

$$v \rightarrow \infty \quad \text{an!}$$

Damit ergibt sich:

$$g(z \rightarrow 1) = \Delta A - \ln v$$

und mit (4.90)

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left\{ -\frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \cdot e^{g(z)} \right\} = 2 \cdot v \cdot e^{\Delta A - \ln v},$$

oder

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ -\frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \cdot e^{g(z)} \right\} = 2 \cdot e^{\Delta A}; & (4.91) \\ \Delta A &= - \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{\beta_{2 \cdot v}}{2 \cdot v} \cdot \tau^{2 \cdot v} + \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Der Zahlenwert von γ beträgt für das für die Koaxialleitung maßgebende Parametertripel

$$n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 1$$

$$\gamma_m(q = 1) = \gamma = 1,248\,459\,169\,7\dots \quad (4.92)$$

Aus dem Parametertripel für die später dargestellten Verhältnisse im Elektron, nämlich

$$n = 0, \quad p = 1 \quad \text{und} \quad q = 2$$

ergibt sich:

$$\gamma_m(q = 2) = \gamma_2 = 1. \quad (4.93)$$

5 Gesamtstromdichte und abhängige elektrische Größen

5.1 Einschränkung des Induktionsgesetzes

Wenn in der Folge die Gesamtstromdichte J und ihre abhängigen Größen aus der Zusammenfassung von räumlich konstantem Teil und räumlich variablem Teil gebildet werden, müssen folgende Abhängigkeiten und Zusammenhänge berücksichtigt werden:

- Die am Leiter angelegte Wechselspannung ist die Ursache der konstanten Stromdichte J_k .
- Das durch J_k erzeugte phasengleiche magnetische Wechselfeld ist Ursache der variablen Stromdichte J_v mit einer zugehörigen magnetischen Feldstärke H_{vS} , die sich aus der induktiven Komponente $H_{vL} = H_v$ und der ohmschen Komponente H_{vR} zusammensetzt. Die ohmsche Komponente der magnetischen Feldstärke erfährt eine komplette Kompensation durch eine betragsgleiche magnetische Feldstärke, die zur auslösenden Stromdichte J_k in Beziehung steht, und als überlagerter, durch J_v aufgezwungener Teil aufgefasst werden muss. Wegen dieser Kompensationswirkung tritt zwar keine resultierende ohmsche Komponente der magnetischen Feldstärke im Leiterquerschnitt auf, und natürlich auch kein zugehöriger resultierender Magnetfluss. Aber der entsprechende ohmsche Spannungsabfall ist sehr wohl wirksam. An die mehrfach zitierte Analogie dieser Gegebenheiten zum Transformator sei deshalb auch hier nochmals erinnert.
- Die induktive Komponente der magnetischen Feldstärke H_v und die Stromdichte J_v selbst erfahren eine analoge Kompensation, wobei hier allerdings die resultierenden Größen

$$J(z) = J_k - J_v \quad \text{und} \quad H(z) = H_k - H_v$$

nicht wie bei der ohmschen Komponente zu Null werden.

- Wir erkennen bereits an dieser Stelle die erstaunliche Tatsache, dass innerhalb der Strombahn das fundamentale Induktionsgesetz einer Restriktion unterliegt, die durch die Dominanz der Eigengesetzlichkeit der sich ausbildenden räumlich variablen Stromdichte begründet ist. Einerseits basiert diese Eigengesetzlichkeit der variablen Stromdichte intern ohne Einschränkungen auf dem Induktionsgesetz. Aber in seinem externen Umfeld ist für einen Stromfaden in der Strombahn das von J_k herrührende, ihn umschlingende Magnetfeld wie ein Angebot an induzierter Spannung, von dem er nur in dem Umfange Gebrauch macht, wie es der Eigengesetzlichkeit der sich ausbildenden räumlich variablen Stromdichte J_v entspricht. Für den nicht in Anspruch genommenen „Rest“ des Magnetfeldes wirkt der Stromfaden elektrisch wie ein Vakuum, also wie frei von Materie!

Analog zu dieser Gegebenheit wird auch die für die Stromdichten J_k , J_v und J maßgebende Spannung am Leiter, die an sich über den gesamten Leiterquerschnitt konstant ist, hinsichtlich ihrer induktiven Komponente jeweils nur angepasst an J_v wirksam, für den überschüssigen Teil der Spannung wirkt der Leiter wie ein Vakuum.

5.2 Innenleiter

5.2.1 $R_a - r_0 \geq D$

Das durch

$$r = r_D = R_a$$

gekennzeichnete Ende der Eindringtiefe kann nur erreicht werden, wenn die geometrischen Dimensionen des Innenleiters der Bedingung

$$R_a - r_0 \geq D$$

genügen. Die im folgenden beschriebenen Gesetzmäßigkeiten gehen von dieser Voraussetzung aus.

Nach (4.77) gilt:

$$z_0 = \frac{r_0}{r_D} = 1 - \frac{1}{c}$$

Für die variable Komponente der Stromdichte muss zwischen den Bereichen von

$$0 \leq r < r_0, \quad \text{und} \quad r_0 \leq r \leq r_D$$

unterschieden werden.

Mit Rücksicht auf die Kompensation des resultierenden Stromes der variablen Stromdichte nach (4.86) im Bereich zwischen

$$0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq z < z_0 :$$

$$I_v(z_0) = -J_0 \cdot \frac{c^2 D^2 \pi}{2\tau^2} \cdot e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0$$

durch den resultierenden Strom I_k' der konstanten Stromdichte J_k'

$$I_k'(z_0) = J_k' \cdot r_0^2 \pi = J_k' \cdot c^2 D^2 \pi z_0^2$$

gilt:

$$J_k' \cdot c^2 D^2 \pi z_0^2 = -J_0 \cdot \frac{c^2 D^2 \pi}{2\tau^2} \cdot e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0.$$

Damit ist für

$$0 \leq z < z_0 :$$

$$J_k' = J_0 \cdot \frac{-e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)]}{2\tau^2 \cdot z_0},$$

oder:

$$J_k' = J_0 \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 \cdot z_0^2} \quad \text{mit} \quad \gamma_0 = -e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0. \quad (5.1)$$

Es liegt in der Natur des Beginns der Eindringtiefe, also des Beginns von J_v , dass dort die resultierende Stromdichte

$$J = J_k - J_v$$

zu Null werden muss, denn wäre es anders, würde bereits vor dem Beginn ein Magnetfeld existieren, das eine variable Stromdichte zur Folge hätte. Deshalb gilt für:

$$r = r_0, \quad z = z_0$$

$$J_k(z_0) = J_k = J_v(z_0).$$

Mit (4.63) ergibt sich:

$$J_k = J_0 \cdot e^{g(z_0)}. \quad (5.2)$$

Damit für J_v die Verhältnisse im Bereich

$$0 \leq r < r_0$$

richtig abgebildet werden, muss die Differenz

$$\Delta J_k = J_k' - J_k \quad (5.3)$$

von dem über die Fläche gemittelten Wert von J_v (identisch mit J_k' nach (5.1)) in Abzug gebracht werden, damit der Verlauf von J_v ohne Unstetigkeit fortgesetzt wird. Mathematisch ausgedrückt heißt das in Übereinstimmung mit (5.2):

$$J_v(z_0) = J_k' - \Delta J_k = J_k' - (J_k' - J_k) = J_k.$$

Der Einfluss von ΔJ_k auf die abhängigen Größen von J_v und J_k im Bereich

$$r_0 \leq r \leq r_D$$

wird später noch im einzelnen dargestellt.

Am Ende der Eindringtiefe mit

$$r = r_D \quad \text{und} \quad z = 1$$

muss der resultierende Gesamtstrom I_0 erreicht sein. Die im folgenden gewählte Differenzbildung bei der Berechnung der Ströme I_{kD} und I_{vD} kommt durch das Symbol D im Index zum Ausdruck:

$$I(z = 1) = I_{kD}(z = 1) - I_{vD}(z = 1) = I_0. \quad (5.4)$$

Wir berechnen

$$I_{kD}(z = 1) = J_k(r_D^2\pi - r_0^2\pi),$$

oder:

$$I_{kD}(z = 1) = J_k c^2 D^2 \pi (1 - z_0^2), \quad (5.5)$$

und aus (4.86)

$$I_{vD}(z = 1) = -J_0 c^2 D^2 \pi \cdot \frac{-\gamma - e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0}{2\tau^2},$$

oder:

$$I_{vD}(z = 1) = J_0 c^2 D^2 \pi \cdot \frac{\gamma + e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0}{2\tau^2}. \quad (5.6)$$

(5.5) und (5.6) eingesetzt in (5.4) ergibt:

$$J_k c^2 D^2 \pi (1 - z_0^2) - J_0 c^2 D^2 \pi \cdot \frac{\gamma + e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0}{2\tau^2} = I_0.$$

Mit J_k nach (5.2) eingesetzt, ergibt sich

$$J_0 c^2 D^2 \pi \cdot e^{g(z_0)} \cdot (1 - z_0^2) - J_0 c^2 D^2 \pi \cdot \frac{\gamma + e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0}{2\tau^2} = I_0,$$

und aufgelöst nach J_0 erhalten wir für den

Innenleiter:

$$J_0 = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{1}{f}, \quad (5.7)$$

und eingesetzt in (5.2)

$$J_k = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{e^{g(z_0)}}{f}, \quad (5.8)$$

mit

$$f = e^{g(z_0)} \cdot (1 - z_0^2) - \frac{\gamma + e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0}{2\tau^2},$$

oder

$$f = e^{g(z_0)} \cdot (1 - z_0^2) - \frac{\gamma - \gamma_0}{2\tau^2} \quad \text{mit} \quad \gamma_0 = -e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0.$$

(5.7) eingesetzt in (4.63) sowie (4.84) - (4.86) ergibt für

$$z_0 \leq z \leq 1$$

$$J_v(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{e^{g(z)}}{f}, \quad (5.9)$$

$$H_{va}(z) = -\frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{k_0}{2\tau^2 f} \cdot e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)], \quad (5.10)$$

$$\Phi_{va}'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k_0}{\tau^2 f} \cdot e^{g(z)}, \quad (5.11)$$

$$I_{va} = -I_0 \cdot \frac{1}{2\tau^2 f} \cdot e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z. \quad (5.12)$$

Die abhängigen Größen nach (5.10) - (5.12) stellen aber noch nicht die maßgebenden Größen dar, sondern die Ausgangswerte und tragen deshalb den Index va . Um diese maßgebenden Größen zu erhalten, muss vielmehr noch das aus der Differenzbildung von J_k' und J_k im Bereich

$$0 \leq r < r_0$$

hervorgegangene Glied ΔJ_k berücksichtigt werden.

Die zu ΔJ_k gehörigen abhängigen Größen, die sich jeweils in eine Korrekturgröße für die konstante Komponente (Index k) und eine solche für die variable Komponente (Index v) aufteilen, errechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \Delta H(z) &= \Delta J_k \cdot \frac{c^2 D^2 \pi z_0^2}{2\pi c D z}, \\ \Delta H(z) &= \Delta H_k(z) + \Delta H_v(z) = \frac{c D}{2} \cdot \Delta J_k \cdot \frac{z_0^2}{z}; \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\Delta \Phi'(z) = \mu_0 \cdot \int_z^1 \Delta H(z) \cdot dz \cdot c D = \mu_0 \cdot \frac{c^2 D^2}{2} \cdot \Delta J_k \cdot z_0^2 \cdot [\ln z]_z^1,$$

$$\Delta \Phi'(z) = \Delta \Phi_k'(z) + \Delta \Phi_v'(z) = -\frac{\mu_0}{2} \cdot c^2 D^2 \cdot \Delta J_k \cdot z_0^2 \cdot \ln z; \quad (5.14)$$

$$\Delta I(z) = \Delta I_k(z) + \Delta I_v(z) = \Delta J_k \cdot c^2 D^2 \pi \cdot z_0^2. \quad (5.15)$$

Mit (5.2) und (5.8) ergibt sich:

$$J_k = J_0 \cdot e^{g(z_0)} = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{e^{g(z_0)}}{f}. \quad (5.16)$$

Mit (5.1) und (5.7) ergibt sich weiterhin:

$$J_k' = J_0 \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z_0^2} = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z_0^2}. \quad (5.17)$$

Hinsichtlich der Differenzgröße:

$$\Delta J_k = J_k' - J_k$$

ist die physikalisch gebotene Aufteilung der Werte von $\Delta H(z)$, $\Delta \Phi'(z)$ und $\Delta I(z)$ in die Werte ΔH_k , $\Delta \Phi_k'$ und ΔI_k zur Korrektur von H_k , Φ_k' und I_k sowie in die Werte ΔH_v , $\Delta \Phi_v'$ und ΔI_v für die Korrektur von H_v , Φ_v' und I_v zu beachten.

(5.16) beziehungsweise (5.17) eingesetzt in (5.13) - (5.15) ergibt:

$$\Delta H_k(z) = -\frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot \frac{z_0^2}{z}, \quad (5.18)$$

$$\Delta H_v(z) = -\frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z}; \quad (5.19)$$

$$\Delta \Phi_k'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot 2 \cdot e^{g(z_0)} \cdot z_0^2 \cdot \ln z, \quad (5.20)$$

$$\Delta \Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{\tau^2}; \quad (5.21)$$

$$\Delta I_k(z) = -I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot z_0^2, \quad (5.22)$$

$$\Delta I_v(z) = -I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2}. \quad (5.23)$$

Der nachfolgenden Zusammenfassung der Werte von $H_{va}(z)$, $\Phi_{va}'(z)$ mit $\Delta H_v(z)$, $\Delta \Phi_v'(z)$ muss folgende Überlegung vorausgeschickt werden: Die konstante Stromdichte $J_k(z)$ kompensiert mit ihrer zugehörigen ohmschen Komponente des magnetischen Feldes komplett die entsprechende ohmsche Komponente des zu $J_v(z)$ gehörigen Magnetfeldes. Dies hat zwei sich gegenseitig bedingende Auswirkungen:

- Durch diese induktive Entdämpfung erstreckt sich die Wirkung von $J_v(z)$ nur noch auf $H_v(z)$ beziehungsweise $\Phi_v'(z)$, also auf den induktiven Teil und hebt deren Wert gegenüber (5.10) und (5.11) um den multiplikativen Faktor $\frac{1}{k_0}$ an.
- Die später in (5.33) und (5.34) berechneten, zur konstanten Stromdichte J_k gehörigen Werte von $H_k(z)$ und $\Phi_k'(z)$ beziehen sich analog auf „reine“ Induktivität!

Mit dieser Maßgabe ergeben sich aus der Zusammenfassung von (5.9) - (5.12) mit (5.19) - (5.23) die maßgebenden Werte der variablen Stromdichte und ihrer abhängigen Größen zu:

$$J_v(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{e^{g(z)}}{f}, \quad (5.24)$$

$$H_v(z) = \frac{H_{va}(z)}{k_0} + \Delta H_v(z) = -\frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{2\tau^2 z} + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{2\tau^2} \right], \quad (5.25)$$

$$\Phi_v'(z) = \frac{\Phi_{va}'(z)}{k_0} + \Delta \Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{\tau^2} \cdot \ln z + \frac{e^{g(z)}}{\tau^2} \right], \quad (5.26)$$

$$I_v(z) = I_{va}(z) + \Delta I_v(z) = -I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{2\tau^2} + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2\tau^2} \right]. \quad (5.27)$$

Für die konstante Komponente der Stromdichte J_k und ihre abhängigen Größen errechnet sich (zunächst) ohne Korrekturgröße für

$$\begin{aligned} z_0 \leq z \leq 1 \\ J_k(z) = J_k = \text{konst.}; \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} H_{ka}(z) &= \frac{J_k \cdot c^2 D^2 \pi z^2}{2\pi c D z} = \frac{cD}{2} \cdot J_k \cdot z, \\ H_{ka}(z) &= \frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{e^{g(z_0)}}{f} \cdot z; \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ka}'(z) &= \mu_0 \cdot \int_z^1 H_k(z) \cdot dz \cdot cD = \frac{\mu_0}{4} \cdot c^2 D^2 \cdot J_k \cdot (1 - z^2), \\ \Phi_{ka}'(z) &= I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot (1 - z^2); \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$I_{ka}(z) = J_k \cdot c^2 D^2 \pi z^2 = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot z^2. \quad (5.31)$$

(5.28) - (5.31) ergibt unter Einschluss der Korrekturgrößen nach (5.18) - (5.22) die maßgebenden Werte:

$$J_k(z) = J_k = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{e^{g(z_0)}}{f}, \quad (5.32)$$

$$H_k(z) = H_{ka}(z) + \Delta H_k(z) = \frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot \left(z - \frac{z_0^2}{z} \right), \quad (5.33)$$

$$\Phi_k'(z) = \Phi_{ka}'(z) + \Delta \Phi_k'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot (1 - z^2 + 2z_0^2 \cdot \ln z), \quad (5.34)$$

$$I_k(z) = I_{ka}(z) + \Delta I_k(z) = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z_0)} \cdot (z^2 - z_0^2). \quad (5.35)$$

Schließlich werden die Gleichungen (5.32) - (5.35) und (5.24) - (5.27) zusammengefasst, wobei $H(z)$ und $\Phi'(z)$ die induktive Komponente betreffen. Zusammenfassend ergibt sich durch Subtraktion $J_k(z) - J_v(z)$ sowie der abhängigen Größen für den

Innenleiter bei $R_a - r_0 \geq D$ für $c \geq 1$ und $z_0 \leq z \leq 1$:

$$J(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot [e^{g(z_0)} - e^{g(z)}] \quad (5.36)$$

$$H(z) = \frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[e^{g(z_0)} \cdot \left(z - \frac{z_0^2}{z} \right) + \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z} + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{2\tau^2} \right] \quad (5.37)$$

$$\Phi'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[e^{g(z_0)} \cdot (1 - z^2 + 2z_0^2 \cdot \ln z) - \frac{\gamma_0}{\tau^2} \cdot \ln z - \frac{e^{g(z)}}{\tau^2} \right] \quad (5.38)$$

$$I(z) = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[e^{g(z_0)} \cdot (z^2 - z_0^2) + \frac{\gamma_0}{2\tau^2} + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2\tau^2} \right] \quad (5.39)$$

$$\text{mit } f = e^{g(z_0)} \cdot (1 - z_0^2) - \frac{\gamma - \gamma_0}{2\tau^2} \quad c = \frac{R_a}{D} \quad D = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega\mu_0}}$$

$$\text{und } \gamma_0 = -e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0 \quad z_0 = 1 - \frac{1}{c}$$

Mit Rücksicht auf die bereits geschilderte Restriktion, der das Induktionsgesetz unterliegt, muss die wirksame innere Induktivität M_i (Index i für Innenleiter) für den Startpunkt der Eindringtiefe berechnet werden. Aus (5.38) ergibt sich unmittelbar

$$M_i = \frac{\Phi'(z_0)}{I_0},$$

$$M_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left\{ e^{g(z_0)} \cdot (1 - z_0^2) + 2 \left(e^{g(z_0)} \cdot z_0^2 - \frac{\gamma_0}{2\tau^2} \right) \cdot \ln z_0 - \frac{e^{g(z_0)}}{\tau^2} \right\}. \quad (5.40)$$

M_i ist wie $\Phi'(z)$ eine auf die Längeneinheit bezogene Größe. Im Hinblick auf die Restriktion, der das Induktionsgesetz unterliegt, ist festzustellen, dass zwar einerseits gilt:

$$M_i(z) = \frac{\Phi'(z)}{I_0 - I(z)} \approx \text{konst.} \quad \text{für } z = z_0 \dots 1$$

aber sich andererseits mathematisch streng ergibt:

$$M_i(z) = \frac{\Phi'(z)}{I_0 - I(z)} \neq \text{konst.} \quad \text{für } z = z_0 \dots 1$$

Für den Grenzfall mit

$$c = 1 \quad \text{und} \quad z_0 = 0$$

wird entsprechend der Ableitung von (4.52), die sich auf das Glied mit

$$v = 1, \quad \text{und} \quad \beta_2 = 2$$

beschränken darf:

$$\frac{d}{dz} [g(z_0 \rightarrow 0)] = -2\tau^2 z_0,$$

und man erhält

$$\gamma_0(z_0 \rightarrow 0) = -e^{g(z_0 \rightarrow 0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0 \rightarrow 0)] \cdot z_0 = 2\tau^2 z_0^2 = 0. \quad (5.41)$$

Weiterhin gilt für $z_0 \rightarrow 0$

$$2 \left[e^{g(z_0)} \cdot z_0^2 - \frac{\gamma_0}{2\tau^2} \right] \cdot \ln z_0 = 2 \left[1 \cdot z_0^2 - \frac{2\tau^2 z_0^2}{2\tau^2} \right] \cdot \ln z_0 = 0.$$

Nachdem also dieses Teilglied in der Formel (5.40) für M_i zu Null wird, errechnet sich mit

$$f(z_0 \rightarrow 0) = 1 \cdot (1 - 0) - \frac{\gamma - 0}{2\tau^2} = 1 - \frac{\gamma}{2\tau^2}$$

$$M_i(c = 1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\tau^2}}{1 - \frac{\gamma}{2\tau^2}}. \quad (5.42)$$

Der Zahlenwert beträgt:

$$M_i(c = 1) \approx 0,543 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Für den Grenzfall mit $c \rightarrow \infty$ ist

$$z_0 = \frac{cD - D}{cD} = 1 - \frac{1}{c} \quad \text{für } c \rightarrow \infty$$

und

$$c = \frac{1}{1 - z_0}.$$

Weiterhin lässt sich für

$$z_0 \rightarrow 1$$

schreiben:

$$\gamma - \gamma_0 = -e^{g(1)} \cdot \frac{d}{dz} [g(1)] \cdot 1 + e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0.$$

Werden beide Gleichungsseiten durch

$$1 - z_0$$

dividiert, erkennt man, dass dies dem Grenzwert für $z \rightarrow 1$ (mit $z = z_0$) des Differentialquotienten nach (4.62) entspricht:

$$\frac{d}{dz} \left\{ e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z \right\} = -4\tau^2 \cdot e^{g(z)} \cdot z.$$

Deswegen gilt

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{1 - z_0} \approx 4\tau^2 \cdot e^{g\left(\frac{1+z_0}{2}\right)} \cdot \frac{1 + z_0}{2},$$

oder:

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{2\tau^2} = e^{g\left(\frac{1+z_0}{2}\right)} \cdot (1 - z_0^2). \quad (5.43)$$

Die Ableitung

$$\frac{d}{dz} [e^{g(z)}] = e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]$$

strebt, multipliziert mit z , für

$$z \rightarrow 1$$

dem Grenzwert $-\gamma$ zu (siehe Unterabschnitt 4.5). Deshalb kann für

$$z_0 \rightarrow 1$$

geschrieben werden:

$$e^{g(z_0)} = \gamma \cdot \frac{1 - z_0}{z_0},$$

und

$$e^{g\left(\frac{1+z_0}{2}\right)} = \gamma \cdot \frac{(1 - z_0) \cdot 2}{(1 + z_0) \cdot 2} = \frac{e^{g(z_0)}}{2}.$$

Deshalb gilt nach Einsetzen in (5.43):

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{2\tau^2} = e^{g(z_0)} \cdot \frac{1 - z_0^2}{2}. \quad (5.44)$$

Weiterhin gilt, empirisch ermittelt, für

$$z_0 \rightarrow 1$$

$$1 - z_0^2 + 2 \cdot z_0^2 \cdot \ln z_0 \approx \frac{2}{c^2} \quad (5.45)$$

und

$$\frac{\gamma_0 \cdot \ln z_0}{e^{g(z_0)}} + 1 \approx \frac{4}{3 \cdot c^2}. \quad (5.46)$$

Die Grenzwerte nach (5.44), (5.45) und (5.46) ergeben eingesetzt in (5.40) nach Kürzen durch $e^{g(z_0)}$ die Form:

$$M_i(c \rightarrow \infty) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\frac{2}{c^2} - \frac{4}{3 \cdot c^2}}{1 - z_0^2 - \frac{1 - z_0^2}{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\frac{2}{3 \cdot c^2}}{\frac{1}{c}}.$$

$$M_i(c \rightarrow \infty) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2}{3 \cdot c}. \quad (5.47)$$

Die Widerstandserhöhung im Vollleiter bei Wechselstrom gegenüber Gleichstrom lässt sich mit Hilfe von Gleichung (5.36) berechnen, und zwar als Quotient der elektrischen Feldstärken (auf die Längeneinheit bezogener Spannungsabfall):

$$k_{Rw} = \frac{R \sim}{R =} = \frac{E \sim}{E =} = \frac{J(z=1) \cdot \rho}{I_0 \cdot \frac{\rho}{c^2 D^2 \pi}} = \frac{e^{g(z_0)}}{f}. \quad (5.48)$$

Mit $z = 1$ wählen wir den Punkt, an dem der ganze ohmsche Spannungsabfall galvanisch bedingt ist. Der ohmsche Spannungsabfall muss über den gesamten Leiterquerschnitt konstant bleiben. Mit fortschreitendem Eindringen in den Leiter nimmt die Stromdichte $J(z)$ und damit der galvanisch bedingte Anteil des Spannungsabfalls ab. Aber im gleichen Maße steigt der durch die variable Stromdichte $J_v(z)$ induktiv erzeugte ohmsche Spannungsabfall. Da induktiver und ohmscher Spannungsabfall von $J_v(z)$ nach (4.68) in einem festen Verhältnis stehen, lässt sich dieser aus dem mit der variablen Stromdichte korrelierenden Anteil des magnetischen Flusses nach (5.11) berechnen:

$$\Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{k_0}{f} \cdot \frac{e^{g(z)}}{\tau^2}.$$

Die zugehörige elektrische Feldstärke, also der auf die Längeneinheit bezogene Spannungsabfall beträgt dann:

$$E_{vR} = \frac{1}{c^2} \cdot E_{vL} = \frac{1}{c^2} \cdot E_v = \frac{1}{c^2} \cdot \omega \Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\omega k_0 \mu_0}{c^2 4\tau^2} \cdot \frac{1}{\pi f} \cdot e^{g(z)}.$$

Aus (4.67) ergibt sich:

$$\frac{\omega k_0 \mu_0}{c^2 4\tau^2} = \frac{\rho}{c^2 D^2},$$

und eingesetzt erhalten wir:

$$E_{vR} = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{\rho}{f} \cdot e^{g(z)}. \quad (5.49)$$

Addiert man, ausgehend von (5.36) $J(z) \cdot \rho$ mit E_{vR} nach (5.49), so erkennt man die über den gesamten Querschnitt gleichbleibende elektrische Feldstärke des ohmschen Spannungsabfalls. Betrachtet man nun Beziehung (5.48) für den Grenzfall

$$c \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad z_0 \rightarrow 1,$$

so ergibt sich mit (5.44)

$$f = e^{g(z_0)} \cdot (1 - z_0^2) - e^{g(z_0)} \cdot \frac{1 - z_0^2}{2} = e^{g(z_0)} \cdot \frac{1 - z_0^2}{2}.$$

Für z_0 gilt:

$$z_0 = \frac{cD - D}{cD} = 1 - \frac{1}{c}$$

und

$$\frac{1 - z_0^2}{2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{2c^2}.$$

Damit wird für $c \rightarrow \infty$

$$f = e^{g(z_0)} \cdot \frac{1}{c}.$$

Eingesetzt in (5.48) ergibt sich also:

$$k_{Rw}(c \rightarrow \infty) = \frac{R \sim}{R =}(c \rightarrow \infty) = c. \quad c = \frac{R_a}{D} \quad (5.50)$$

Aus (4.48) errechnet sich:

$$\omega = \frac{4\tau^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \rho}{\mu_0 \cdot D^2}.$$

Damit wird die k_{Rw} entsprechende Größe für den induktiven Widerstand:

$$k_{Lw} = \frac{\omega M_i}{R =} = \frac{4\tau^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \rho}{\mu_0 \cdot D^2} \cdot M_i,$$

$$k_{Lw} = \frac{\omega M_i}{R =} = \sqrt{2} \cdot \tau^2 \cdot c^2 \cdot \frac{M_i}{\frac{\mu_0}{4\pi}}, \quad (5.51)$$

und mit (5.47):

$$k_{Lw}(c \rightarrow \infty) = \frac{\omega M_i}{R =}(c \rightarrow \infty) \approx \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \tau^2}{3} \cdot c. \quad (5.52)$$

5.2.2 $R_a - r_0 \leq D$

Unter der Bedingung

$$R_a - r_0 \leq D$$

wird das Ende der Eindringtiefe nicht erreicht. Die im folgenden beschriebenen Gesetzmäßigkeiten gehen von dieser Voraussetzung aus, wobei als weitere Bedingung die Forderung

$$r_0 = 0$$

erfüllt sein soll. D.h., es handelt sich um den im Vordergrund des Interesses stehenden Fall des Vollleiters.

Für die Bestimmung der maßgebenden Größen für einen Leiter des Radius

$$R_a = c \cdot D \quad \text{mit} \quad c < 1$$

dient zweckmäßig der Vergleich mit einem Leiter mit Radius

$$R_a = D.$$

Hierfür gilt nämlich gemäß (5.2) mit $z_0 = 0$ (Vollleiter!):

$$J_k = J_0.$$

Außerdem ist

$$J(z = 0) = J_k - J_0 = 0,$$

$$J(z = 1) = J_k - 0 = J_0.$$

Für den damit zu vergleichenden Leiter mit dem Radius

$$R_a = c \cdot D \quad \text{mit} \quad c < 1$$

existieren zwischen

$$c \cdot D < r < D, \quad c < z < 1$$

einerseits die separat zu betrachtenden, auf den resultierenden Strom I_0 zurückzuführenden Werte der magnetischen Feldstärke und des magnetischen Flusses, die der äußeren Induktivität zuzurechnen sind. (Erinnert sei daran, dass I_0 ja aus der Differenzbildung von konstanter Stromdichte J_k und variabler Stromdichte J_v hervorgeht und deshalb die Anteile des zu J_v gehörigen Magnetflusses zwischen

$$0 \leq z \leq c$$

im folgenden nicht etwa vernachlässigt werden, sondern in den Wert der äußeren Induktivität einfließen.)

Für die gedachte Verlängerung der variablen Stromdichte über den Punkt

$$r = cD, \quad z = c$$

hinaus, ist andererseits die vollständige Kompensation hinsichtlich Stromdichte und Magnetfluss durch die (gedachte) konstante Stromdichte gegeben.

Deshalb ist zwischen

$$0 \leq r \leq cD, \quad 0 \leq z \leq c$$

zur Berechnung der wirksamen variablen Stromdichte $J_v(z)$ die konstante Stromdichte

$$J_{va}(c) = J_0 \cdot e^{g(c)}$$

von $J_{va}(z)$ (Index *va* für den Ausgangswert **ohne** Korrektur) in Abzug zu bringen:

$$\begin{aligned} J_v(z) &= J_{va}(z) - J_{va}(c), \\ J_v(z) &= J_0 \left(e^{g(z)} - e^{g(c)} \right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Der zugehörige wirksame Strom $I_v(z)$ ergibt sich mit $I_v(z) = I_{va}(z)$ nach (4.86) für $c = 1$ demgemäß zu:

$$\begin{aligned} I_v(z) &= I_{va}(z) - z^2 D^2 \pi \cdot J_v(c) = -\frac{D^2 \pi}{2\tau^2} \cdot J_0 \cdot e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z - z^2 D^2 \pi \cdot J_0 \cdot e^{g(z)}, \\ J_v(z) &= -c^2 D^2 \pi \cdot J_0 \left[\frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2c^2 \tau^2} + e^{g(c)} \cdot \frac{z^2}{c^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Am Punkt

$$r = cD, \quad z = c$$

gilt:

$$J_v(z) = -c^2 D^2 \pi \cdot J_0 \left[\frac{e^{g(c)} \cdot \frac{d}{dz} [g(c)]}{2c\tau^2} + e^{g(c)} \right]. \quad (5.55)$$

Weiterhin gilt:

$$I_k(c) = c^2 D^2 \pi \cdot J_0 \quad (5.56)$$

und

$$I_0 = I_k(c) - I_v(c) = c^2 D^2 \pi \cdot J_0 \left[1 + e^{g(c)} + \frac{e^{g(c)} \cdot \frac{d}{dz} [g(c)]}{2c\tau^2} \right],$$

sowie schließlich:

$$J_0 = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{c^2}{f} \quad \text{mit} \quad f = c^2 \cdot \left[1 + e^{g(c)} + \frac{e^{g(c)} \cdot \frac{d}{dz} [g(c)] \cdot c}{2c^2 \tau^2} \right]. \quad (5.57)$$

(5.57) eingesetzt in (5.53) und (5.54) ergibt für den Bereich

$$0 \leq z \leq c :$$

$$J_v(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{c^2}{f} \left[e^{g(z)} - e^{g(c)} \right], \quad (5.58)$$

$$H_v(z) = -\frac{I_0}{2cD\pi} \cdot \frac{c}{f} \left[e^{g(c)} \cdot z + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{2\tau^2} \right], \quad (5.59)$$

$$\Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \left[e^{g(c)} \cdot (z^2 - c^2) + \frac{e^{g(z)} - e^{g(c)}}{\tau^2} \right], \quad (5.60)$$

$$I_v(z) = -I_0 \cdot \frac{1}{f} \left[e^{g(c)} \cdot z^2 + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2\tau^2} \right]. \quad (5.61)$$

(5.59) ergibt sich dabei aus (5.61) durch Division durch $2zD\pi$ und (5.60) durch Integration von (5.59) im Intervall zwischen z und c .

Die der Bildung der Größen $H_v(z)$ und $\Phi_v'(z)$ nach den (5.25) und (5.26) vorausgeschickten Betrachtungen zur induktiven Entdämpfung und ihrer Konsequenzen gelten für die Bildung $H_v(z)$ und $\Phi_v'(z)$ nach (5.59) und (5.60) in gleicher Weise.

Für die konstante Komponente der Stromdichte J_k und ihre abhängigen Größen errechnet sich für

$$0 \leq z \leq c :$$

$$J_k(z) = J_k = J_0 = \text{konst.}, \quad (5.62)$$

$$H_k(z) = J_0 \cdot \frac{D}{2} \cdot z, \quad (5.63)$$

$$\Phi_k'(z) = J_0 \cdot \frac{\mu_0}{4} \cdot D^2 \cdot (c^2 - z^2), \quad (5.64)$$

$$I_k(z) = J_0 \cdot z^2 D^2 \pi. \quad (5.65)$$

Mit (5.57) eingesetzt erhält man:

$$J_k(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{c^2}{f}, \quad (5.66)$$

$$H_k(z) = \frac{I_0}{2cD\pi} \cdot \frac{c}{f} \cdot z, \quad (5.67)$$

$$\Phi_k'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot (c^2 - z^2), \quad (5.68)$$

$$I_k(z) = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot z^2. \quad (5.69)$$

Zusammenfassend ergibt sich schließlich für den

Innenleiter bei $R_a - r_0 \leq D$ für $c \leq 1$ und $0 \leq z \leq c$:

$$J(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{c^2}{f} \cdot \left[1 + e^{g(c)} - e^{g(z)} \right] \quad (5.70)$$

$$H(z) = \frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{c}{f} \cdot \left[\left(1 + e^{g(c)} \right) \cdot z + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{2\tau^2} \right] \quad (5.71)$$

$$\Phi'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\left(1 + e^{g(c)} \right) \cdot (c^2 - z^2) - \frac{e^{g(z)} - e^{g(c)}}{\tau^2} \right] \quad (5.72)$$

$$I(z) = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\left(1 + e^{g(c)} \right) \cdot z^2 + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2\tau^2} \right] \quad (5.73)$$

$$f = c^2 \cdot \left[1 + e^{g(c)} + \frac{e^{g(c)} \cdot \frac{d}{dz} [g(c)] \cdot c}{2c^2 \tau^2} \right] \quad c = \frac{R_a}{D} \quad z_0 = 0 \quad D = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega\mu_0}}$$

Die wirksame innere Induktivität M_i errechnet sich aus (5.72) für den Punkt $z = z_0 = 0$ mit

$$M_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\left(1 + e^{g(c)} \right) \cdot c^2 - \frac{1 - e^{g(c)}}{\tau^2} \right]. \quad (5.74)$$

Für den Grenzfall mit

$$c \rightarrow 0$$

errechnet sich analog (5.41)

$$\frac{e^{g(c)} \cdot \frac{d}{dz} [g(c)] \cdot c}{2c^2 \tau^2} = -1, \quad (5.75)$$

und damit ist:

$$f = c^2. \quad (5.76)$$

Die Beziehung

$$\frac{e^{g(z)} - e^{g(c)}}{z - c}$$

ist für den Grenzwert

$$z, c \rightarrow 0$$

identisch mit dem Differentialquotienten

$$e^{g\left(\frac{z+c}{2}\right)} \cdot \frac{d}{dz} \left[g\left(\frac{z+c}{2}\right) \right].$$

Da weiterhin analog (5.41) gilt:

$$e^{g\left(\frac{z+c}{2}\right)} \cdot \frac{d}{dz} \left[g\left(\frac{z+c}{2}\right) \right] = -2\tau^2 \cdot \frac{z+c}{2},$$

ist:

$$\frac{e^{g(z)} - e^{g(c)}}{z - c} = -\tau^2 \cdot (z + c),$$

und nach Umformung:

$$\frac{e^{g(z)} - e^{g(c)}}{\tau^2} = c^2 - z^2. \quad (5.77)$$

(5.77) ist aber die in (5.72) enthaltene Ausgangsform, die für den Grenzfall von $z \rightarrow 0$ in (5.74) einfließt!

Deshalb ist mit (5.76) und (5.77) eingesetzt in (5.74) für $z = 0$

$$M_i(c \rightarrow 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot [(1+1) \cdot c^2 - c^2],$$

$M_i(c \rightarrow 0) = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (5.78)$

Dies ist genau der doppelte Wert dessen, was üblicherweise in Lehrbüchern der Elektrotechnik für die innere Induktivität angegeben wird. Der in den Lehrbüchern gewählte Weg der Berechnung ist die Auflösung des Querschnitts in differentiell kleine Kreisringe, die Ermittlung der diesen Kreisringen zukommenden Teilinduktivitäten sowie Integration dieser Teilinduktivitäten unter Berücksichtigung einer Gewichtung nach dem Anteil des Stromes, der auf den jeweiligen Kreisring trifft.

Die Methode ist zwar suggestiv einfach; aber gerade in der Gewichtung liegt der Trugschluss und die Unvereinbarkeit mit der physikalischen Gesetzmäßigkeit. Denn damit wird der prinzipielle Fehler nicht geheilt, dass die Integration von Teilinduktivitäten gleichbedeutend ist mit Addition von parallel anliegenden Spannungen: Eine Karikatur auf die KIRCHHOFFSchen Gesetze!

Für $c \rightarrow 0$ ergibt sich für (5.72) unter Verwendung von (5.76) und (5.77)

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot [(1+1) \cdot (c^2 - z^2) - (c^2 - z^2)], \\ \Phi'(z) &= I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{c^2 - z^2}{c^2}; \end{aligned} \quad (5.79)$$

und für (5.73) unter analoger Verwendung ($c \rightarrow z$) von (5.75)

$$\begin{aligned} I(z) &= I_0 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot [(1+1) \cdot z^2 - z^2], \\ I(z) &= I_0 \cdot \frac{z^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Aus (5.80) errechnet sich

$$I_0 - I(z) = I_0 \cdot \frac{c^2 - z^2}{c^2}. \quad (5.81)$$

Dass für den Grenzfall von $c \rightarrow 0$ das Induktionsgesetz keiner Restriktion unterliegt, kann durch Division von (5.79) durch (5.81) unmittelbar erkannt werden:

$$\begin{aligned} M_i(z) &= \frac{\Phi'(z)}{I_0 - I(z)} = \frac{I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{c^2 - z^2}{c^2}}{I_0 \cdot \frac{c^2 - z^2}{c^2}}, \\ M_i(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} = \text{konst.} \quad \text{für } c \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Also gerade das Gegenteil des mit der Gewichtung verfolgten Gedankens ist richtig: Man kann für diesen Sonderfall den Leiter von außen nach innen vordringend, durch zum Leiterumfang konzentrische Kreise in beliebige Teilmengen des magnetischen Feldes und des

zugehörigen Stromes unterteilen und erhält immer den gleichen, also konstanten Wert der inneren Induktivität!

Für die Widerstandserhöhung gilt das zu Gleichung (5.48) Gesagte analog. Maßgebender Punkt für die Berechnung ist

$$z = c.$$

Somit ist:

$$k_{Rw} = \frac{R \sim}{R =} = \frac{E \sim}{E =} = \frac{J(z=c) \cdot \rho}{I_0 \cdot \frac{\rho}{c^2 D^2 \pi}} = \frac{\frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{c^2}{f} [1 + e^{g(c)} - e^{g(c)}] \cdot \rho}{\frac{I_0 \cdot \rho}{c^2 D^2 \pi}},$$

$$k_{Rw} = \frac{R \sim}{R =} = \frac{c^2}{f} = \frac{1}{1 + e^{g(c)} + \frac{e^{g(c)} \cdot \frac{d}{dz} [g(c)] \cdot c}{2c^2 \tau^2}}. \quad (5.83)$$

Für den Grenzfall mit

$$c \rightarrow 0.$$

errechnet sich mit (5.75):

$$k_{Rw} = \frac{R \sim}{R =} (c \rightarrow 0) = \frac{1}{1 + 1 - 1} = 1. \quad (5.84)$$

5.3 Außenleiter

Das durch

$$r = r_D$$

gekennzeichnete Ende der Eindringtiefe kann nur erreicht werden, wenn die geometrischen Dimensionen des Außenleiters der Bedingung

$$R_a - R_i \geq D$$

genügen. Die im folgenden beschriebenen Gesetzmäßigkeiten gehen von dieser Voraussetzung aus. Ausgangspunkt zu deren Bestimmung soll die Beweisführung sein, dass die konstante Komponente der Stromdichte im Außenleiter den Wert Null annimmt. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung:

Am Ende der Eindringtiefe mit

$$r = r_D, \quad z = 1$$

ist die variable Stromdichte

$$J_v(z=1) = 0.$$

Damit muss aber ab diesem Punkt auch die Gesamtstromdichte

$$J(z=1) = 0$$

sein, denn jede andere Möglichkeit würde implizieren, dass über $z = 1$ hinaus umschlingendes Magnetfeld und induktive Spannung fortschreitend sich ändern und damit die variable Komponente der Stromdichte nicht auf Null abgeklungen wäre, was der gefundenen Lösung für J_v widerspricht. Wenn aber für den Punkt

$$r = r_D, \quad z = 1$$

gilt, dass J_v und J zu Null werden, muss auch

$$J_k(z = 1) = 0$$

sein. Diese Beziehung gilt dann natürlich auch für den gesamten Querschnitt des Außenleiters:

$$J_k(z \geq z_0) = 0. \quad (5.85)$$

Nach (4.77) gilt:

$$z_0 = \frac{r_0}{r_D} = 1 - \frac{1}{c}.$$

Für die variable Stromdichte gelten im Bereich

$$0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq z < z_0$$

die unter Punkt 5.2.1 für den Innenleiter gemachten Ausführungen bis einschließlich Beziehung (5.3) in identischer Weise.

Am Ende der Eindringtiefe mit

$$r = r_D, \quad \text{und} \quad z = 1$$

muss der resultierende Gesamtstrom $-I_0$ erreicht sein, wobei das negative Vorzeichen der Gegenrichtung zum Strom I_0 im Innenleiter Rechnung trägt.

Aus der Differenzbildung ergibt sich analog (5.4):

$$I(z = 1) = 0 - I_{vD}(z = 1) = -I_0, \quad (5.86)$$

und mit (5.6)

$$J_0 c^2 D^2 \pi \cdot \frac{\gamma + e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0}{2\tau^2} = I_0.$$

Aufgelöst nach J_0 erhalten wir für den

Außenleiter:

$$J_0 = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{1}{f} \quad \text{mit} \quad f = \frac{\gamma - \gamma_0}{2\tau^2} \quad \text{und} \quad \gamma_0 = -e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0. \quad (5.87)$$

Für die weiteren Ableitungen dürfen wir die für den Innenleiter abgeleiteten Beziehungen (5.9) - (5.12) sowie (5.13) - (5.15) direkt auf den Außenleiter übertragen, wobei lediglich beachtet werden muss, dass der Faktor f und die Größe ΔJ_k beim Außenleiter andere Werte annehmen.

Für ΔJ_k ergibt sich, da

$$J_k = 0$$

ist, unter Verwendung von (5.1) und (5.3)

$$\Delta J_k = J_k' = J_0 \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z_0^2}. \quad (5.88)$$

und mit (5.87)

$$\Delta J_k = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z_0^2}, \quad (5.89)$$

Eingesetzt in (5.13) - (5.15) ergibt sich:

$$\Delta H_v(z) = -\frac{I_0}{2\pi cD} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2 z}, \quad (5.90)$$

$$\Delta \Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{\tau^2} \cdot \ln z, \quad (5.91)$$

$$\Delta I_v(z) = -I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\gamma_0}{2\tau^2}. \quad (5.92)$$

Auch die nachfolgenden Beziehungen für J_v samt abhängigen Größen werden in weitgehender Analogie zu den Beziehungen (5.24) - (5.27) für den Innenleiter gebildet.

Für den Außenleiter erhält man:

$$J_v(z) = \frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{e^{g(z)}}{f}, \quad (5.93)$$

$$H_v(z) = \frac{I_0}{2\pi cD} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[-\frac{\gamma_0}{2\tau^2 z} - \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{2\tau^2} \right], \quad (5.94)$$

$$\Phi_v'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{\tau^2} \cdot \ln z + \frac{e^{g(z)}}{\tau^2} \right], \quad (5.95)$$

$$I_v(z) = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[-\frac{\gamma_0}{2\tau^2} - \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2\tau^2} \right]. \quad (5.96)$$

Hinsichtlich der konstanten Stromdichte J_k haben wir zwar nachgewiesen, dass sie den Wert Null annimmt. Aber die Wirkung des Stromes I_0 im Innenleiter darf hinsichtlich magnetischer Feldstärke und magnetischem Fluss nicht außer Acht gelassen werden. Deshalb gilt:

$$J_k(z) = 0, \quad (5.97)$$

$$H_k(z) = \frac{I_0}{2\pi cD} \cdot \frac{1}{z}, \quad (5.98)$$

$$\Phi_k'(z) = -I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \ln z, \quad (5.99)$$

$$I_k(z) = 0. \quad (5.100)$$

Schließlich werden die Gleichungen (5.93) - (5.96) und (5.97) - (5.100) zusammengefasst und es ergibt sich für den

Außenleiter bei $R_a - R_i \geq D$ für $c \geq 1$ und $z_0 \leq z \leq 1$:

$$J(z) = -\frac{I_0}{c^2 D^2 \pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{g(z)} \quad (5.101)$$

$$H(z) = \frac{I_0}{2\pi c D} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{\gamma}{2\tau^2 z} + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)]}{2\tau^2} \right] \quad (5.102)$$

$$\Phi'(z) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[-\frac{\gamma}{\tau^2} \cdot \ln z - \frac{e^{g(z)}}{\tau^2} \right] \quad (5.103)$$

$$I(z) = I_0 \cdot \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{\gamma_0}{2\tau^2} + \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{2\tau^2} \right] \quad (5.104)$$

$$\text{mit } f = \frac{\gamma - \gamma_0}{2\tau^2} \quad c = \frac{R_i}{D} + 1 \quad D = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}\rho}{\omega\mu_0}}$$

$$\text{und } \gamma_0 = -e^{g(z_0)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z_0)] \cdot z_0 \quad z_0 = 1 - \frac{1}{c}$$

In (5.102) und (5.103) ist dabei gesetzt:

$$\frac{\gamma}{2\tau^2} = f + \frac{\gamma_0}{2\tau^2}.$$

Für die innere Induktivität des Außenleiters M_a (Index a für Außenleiter), in die die induktive Wirkung des Stromes im Innenleiter auf den Außenleiter einbezogen ist, errechnet sich:

$$M_a = \frac{\Phi'(z_0)}{I_0},$$

$$M_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{f} \left[-\frac{\gamma}{\tau^2} \cdot \ln z_0 - \frac{e^{g(z_0)}}{\tau^2} \right]. \quad (5.105)$$

Für kleine Werte von z_0 , also

$$z_0 \rightarrow 0, \quad R_i \ll D,$$

ist nach (5.41)

$$\gamma_0 \approx 2\tau^2 z_0^2.$$

Für f ergibt sich dann:

$$f \approx \frac{\gamma - 2\tau^2 z_0^2}{2\tau^2} \approx \frac{\gamma}{2\tau^2}. \quad (5.106)$$

Für z_0 setzen wir:

$$z_0 = \frac{R_i}{R_i + D} = \frac{1}{1 + \frac{D}{R_i}} \approx \frac{R_i}{D} \quad (R_i \ll D), \quad (5.107)$$

und erhalten

$$\ln z_0 \approx \ln \frac{R_i}{D}. \quad (5.108)$$

(5.106) - (5.108) eingesetzt in (5.105) ergibt:

$$M_a(R_i \ll D) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\tau^2}{\gamma} \cdot \left(-\frac{\gamma}{\tau^2} \cdot \ln \frac{R_i}{D} - \frac{1}{\tau^2} \right),$$

$$M_a(R_i \ll D) \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(\ln \frac{D}{R_i} - \frac{1}{\gamma} \right). \quad (5.109)$$

5.4 Zusammenfassende Betrachtung

Die Unterabschnitte 5.1 - 5.3 sollen mit der Bemerkung abgeschlossen werden, dass mit der Summe aller vorstehenden Ableitungen die Gesamtheit aller elektrischen Größen in der Koaxialleitung ohne Rückgriff auf Näherungen berechnet werden kann. Dass dabei auch der Bereich des Dielektrikums zwischen Innen- und Außenleiter mit seiner einfachen Berechnung einbezogen werden muss, sei der Vollständigkeit halber erwähnt.

Bevor nachfolgend Zeigerdiagramm und Kurvenverlauf der maßgebenden Größen diskutiert werden, soll ein erstes Fazit aus diesem Abschnitt gezogen werden.

5.4.1 Elektrische Irrelevanz

Der Stromfluss im Innen- wie im Außenleiter einer Koaxialleitung ist auf einen Querschnitt in der Form eines Kreisrings begrenzt. Die Wandstärke dieses Kreisrings ist identisch mit der Eindringtiefe D . Der Teil des Leiterquerschnitts, der den nachfolgenden Grenzbedingungen unterliegt, ist an der Ausbildung der resultierenden Stromdichte J **nicht** beteiligt, ist also elektrisch irrelevant!

Elektrische Irrelevanz:

$$\text{Innenleiter: } r < R_a - D \quad (5.110)$$

$$\text{Außenleiter: } r > R_i + D \quad (5.111)$$

5.4.2 Ideale Kompensation und elektrisches „Paradoxon“

- Im elektrisch irrelevanten Teil des Innenleiters wird die galvanisch angelegte Spannung durch die vom resultierenden Magnetfeld der resultierenden Stromdichte induzierte Spannung ideal kompensiert. In scheinbarer Paradoxie wird also eine Spannung induziert, damit kein Strom fließt!
- Im stromdurchflossenen Teil des Außenleiters wird durch das Magnetfeld des Innenleiters der aus ohmscher und induktiver Komponente resultierende Spannungsabfall der variablen Komponente der Stromdichte ebenfalls ideal kompensiert. Dadurch fließt im Außenleiter in scheinbarer Paradoxie ein Strom, ohne dass ein Spannungsabfall zu messen wäre!
- Im elektrisch irrelevanten Teil des Außenleiters kompensieren sich die Magnetfelder der (einander entgegengesetzt verlaufenden) Ströme von Innen- und Außenleiter.

5.4.3 Restriktion des Induktionsgesetzes

Im stromdurchflossenen Teil von Innen- und Außenleiter unterliegt das Induktionsgesetz einer Restriktion. Es gilt für den variablen Teil der Stromdichte zwar in idealer Weise. Aber von dem mit der konstanten Komponente verbundenen „Angebot“ an induzierter Spannung wird für die Kompensation des Spannungsabfalls der variablen Komponente der Stromdichte nur in dem Umfang Gebrauch gemacht, wie es der Eigengesetzlichkeit der Ausbildung der variablen Stromdichte entspricht. Für den überschießenden Teil an induzierter Spannung verhält sich das Leitermaterial wie ein Vakuum!

5.4.4 Eindringtiefe

Die in der wissenschaftlichen Literatur eingeführte Definition der Eindringtiefe, auch Eindringmaß genannt, ist vom Denkansatz her nicht haltbar. Hier hat sich eine brauchbare Näherungslösung des Problems, die von einer (theoretisch) bis ins Unendliche reichenden Wirkung ausgeht, quasi verselbständigt. Dabei spielt eine wesentliche Rolle, dass die aus der Näherung hervorgehenden Ungenauigkeiten für ingenieurmäßiges Arbeiten in aller Regel ohne Bedeutung sind.

Es gibt aber prinzipiell keine ins Unendliche reichende Wirkung, und dies auch im streng theoretischen Sinn. Tatsächlich ist die Eindringtiefe eine mit Beziehung (4.48) eindeutig definierte endliche Größe. Sie markiert einen Punkt, an dem praktisch und theoretisch jede elektromagnetische Wirkung komplett abgeklungen ist.

5.4.5 Vergleich mit dem Stand der Wissenschaft und Kritik

In [1] ist dargelegt, auf welcher obskuren Art die unter Punkt 5.4.4 angesprochene Näherung gewonnen wird:

Ausgangspunkt dieser Ableitung ist die Phasengleichheit von (resultierender) Stromdichte und (resultierender) elektrischer Feldstärke, also wie wenn quasi keine Induktivität im Spiel wäre! (?) - Dieser fundamental falsche Ansatz rührt daher, dass unzulässigerweise die entsprechende Beziehung für das stationäre (!) Strömungsfeld übernommen wird. In der Folge wird die elektrische Feldstärke E u.a. partiell nach der Zeit t abgeleitet, und der Phasenfehler aus dem Ansatz schlägt voll auf das Resultat in Form der partiellen Differentialgleichung [Gleichung (6)] durch:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} = \sigma \mu \cdot \frac{\partial E}{\partial t}.$$

(r entspricht dem Leiterradius und σ ist der Kehrwert von ρ .) Bei kritischer Betrachtung und sorgfältiger Unterscheidung von räumlicher und zeitlicher Ableitung lässt sich schnell erkennen, dass diese Differentialgleichung buchstäblich für keinen einzigen reellen Wert

$$E \neq 0$$

befriedigt werden kann. Nicht immer bietet die Mathematik ein derart perfektes Warnsystem, um physikalische Trugschlüsse zu erkennen. Aber die „roten Lampen, die aufleuchten“, werden ignoriert und der Fehler **dadurch** oberflächlich „repariert“, dass für die Feldstärke E auf die komplexe Darstellung übergegangen wird. Nun ist die komplexe Zahlenebene ein bewährtes mathematisches Werkzeug in der Wechselstromtheorie, aber eben nur ein Werkzeug. Die vorstehende Differentialgleichung muss aber unabhängig von diesem Werkzeug auf sinnvollen Grundannahmen aufbauen. Dass es hieran gebricht, lässt sich leicht überprüfen.

Setzen wir für die Feldstärke die Beziehung für eine sinusförmige Wechselgröße

$$E(r) = E_m(r) \cdot \sin \omega t$$

ergibt sich:

$$\frac{\partial E(r)}{\partial t} = \omega E_m(r) \cdot \cos \omega t.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [E_m(r) \cdot \sin \omega t] + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [E_m(r) \cdot \sin \omega t] = \sigma \mu \omega E_m(r) \cdot \cos \omega t.$$

Mit

$$a(r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} [E_m(r)] + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} [E_m(r)]$$

und

$$b(r) = \sigma \mu \omega E_m(r)$$

geht die Differentialgleichung über in die Form:

$$a(r) \cdot \sin \omega t = b(r) \cdot \cos \omega t.$$

$a(r)$ und $b(r)$ sind aber zeitunabhängige, allein vom Raumpunkt r abhängige Größen. Deshalb kann vorstehende Gleichung nicht eine für alle Zeitpunkte t gültige Beziehung sein, wie es erforderlich wäre. Die Differentialgleichung ist damit falsifiziert!

Folgen wir aber dennoch der weiteren Ableitung in [1], so sehen wir, wie das Werkzeug „komplexe Zahlenebene“ über den Meister triumphiert, indem das räumliche Element (Abhängigkeit vom Radius r), für das an sich keine imaginären Werte zulässig sind, als Lückenbüßer herhalten muss, um den zeitlichen Fehler (Phasengleichheit von Stromdichte und elektrischer Feldstärke als Grundannahme) zu „heilen“.-

Und in der Tat, der Trick scheint zu funktionieren: Es ergibt sich als Lösung eine Besselfunktion mit (räumlich!) komplexem Argument. Interpretiert man diese Lösung, so muss man zur Kenntnis nehmen, dass danach nicht nur der Betrag der Stromdichte (als phasengleich mit der elektrischen Feldstärke angenommen) räumlich, also abhängig vom Radius variiert, sondern auch ihre Phasenlage! Das führt zu dem kuriosen Ergebnis, dass getreu der (falschen) Grundannahme für jeden Punkt Stromdichte und elektrische Feldstärke gleiche Phasenlage aufweisen (Die Induktivität scheint keine Rolle zu spielen.), dagegen hat die magnetische Feldstärke gegenüber der Stromdichte einen festen Phasenwinkel.

Der räumlich variable Phasenwinkel würde dazu führen, dass eine angelegte Wechselspannung definierter Phasenlage bei jeder Schicht des Leiters einem Spannungsabfall von jeweils anderer Phasenlage gegenübersteht. Wie lässt sich das vereinbaren?

Die Versuchung ist trotzdem groß, diesen räumlich variablen Phasenwinkel als radiale Welle zu interpretieren. Hier liegen aber keine vergleichbaren Verhältnisse wie bei den MAXWELLSchen Feldgleichungen vor, die ja zwingend die Beteiligung des elektrischen Verschiebestromes (kapazitives Element) zur Voraussetzung haben. Davon kann aber bei dem gewählten Ansatz nicht die Rede sein. Die scheinbare Welle ist im vorliegenden Fall lediglich die Folge der fehlerhaften Grundannahme.

Klammert man nämlich kapazitive Einflüsse und korrespondierende Verschiebestrome aus, die sich in den Bereich außerhalb des Leiters erstrecken, so schwingen alle (untereinander verkoppelten) Fasern des Leiterquerschnitts im gleichen Takt (phasengleich). Allein der Betrag der Stromdichte variiert räumlich und realisiert den elektrischen Gleichgewichtszustand zwischen den Fasern. Das heißt **nicht**, dass die durch den Wechselstrom vorgegebene wellenförmige Ausbreitung in Längsrichtung des Leiters in radialer Richtung keinen Niederschlag fände. Aber die radiale Welle **steht**. Das ist das Merkmal des in sich abgeschlossenen Systems „Leiter“.

Trotz aller evidenten Indikatoren für die Fehlerhaftigkeit des Denkansatzes in [1] werden in der Folge aus der angesprochenen „Lösung“ zielstrebig und robust Näherungsfunktionen abgeleitet, deren Ergebnisse mit den experimentell ermittelten Werten ausreichend übereinzustimmen scheinen. Die mehr oder weniger gute Leistungsfähigkeit dieser Näherungen, die bei Bedarf nach den im vorliegenden Aufsatz dargelegten theoretischen Grundlagen beurteilt werden kann, rechtfertigt aber nicht etwa die Methode ihrer Herleitung.

Eine dieser Näherungslösungen ist die Definition des Eindringmaßes, die das Abklingen der „radial eindringenden Welle“ nach Exponentialfunktion definiert. Die elektrische Feldstärke soll bei diesem Eindringmaß δ auf den e -ten Teil des Oberflächenwertes abgenommen haben und ist definiert zu:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}.$$

Vergleicht man dieses Eindringmaß δ mit der Eindringtiefe D nach Gleichung (4.48), ergibt sich mit $\mu = \mu_0$ folgender Zusammenhang:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}}{2\tau \cdot \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2\tau} \approx \frac{1}{2}.$$

Dass mit der durch das Eindringmaß bestimmten e -Funktion die realen Verhältnisse gut angenähert werden, erkennt man aus Abbildung 10, indem der Verlauf der Stromdichte J (in normierter Darstellung) zum Vergleich herangezogen wird. (Mit Hilfe der Abbildung 10 gelingt der Vergleich unmittelbar ohne Umrechnung, weil der typische Idealfall mit $c = 1$ dargestellt ist.)

5.4.6 Zeigerdiagramm

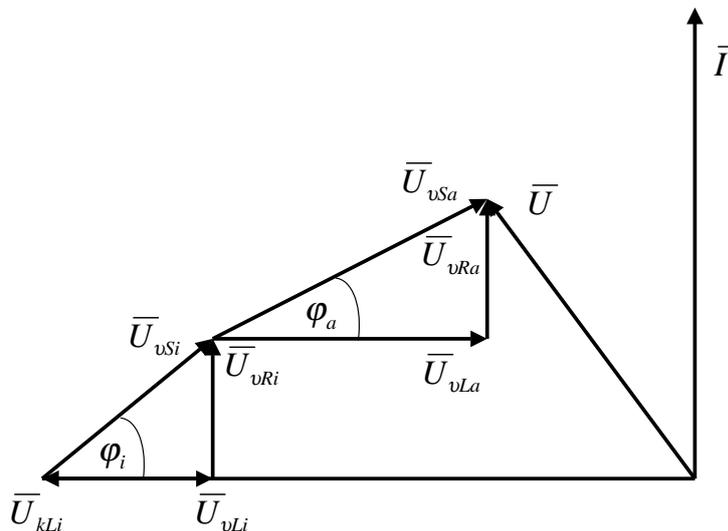


Abbildung 8: Zeigerdiagramm

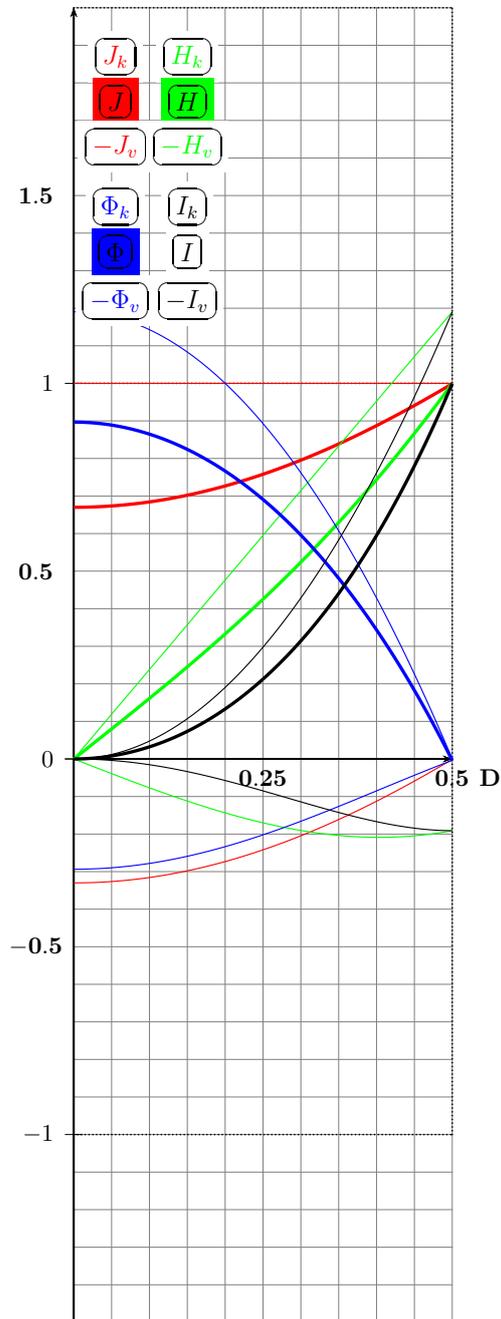
In Abbildung 8 ist hinsichtlich Spannung \bar{U} und Strom \bar{I} das Zeigerdiagramm einer Koaxialleitung mit Innen- und Außenleiter dargestellt. Die gemeinsame Darstellung wird durch die Tatsache ermöglicht, dass sich die Spannungsverhältnisse des Außenleiters unmittelbar induktiv in den Innenleiter einprägen. Hinsichtlich der Indizes steht i für Innenleiter und a für Außenleiter, v für räumlich variable Komponente und k für räumlich konstante Komponente, L für induktive Komponente, R für ohmsche Komponente sowie S für Summe oder Scheinwiderstand. Die Winkel φ_i und φ_a ergeben sich aus Beziehung (4.70) und be-

stimmen jeweils das Verhältnis von induktiver zu ohmscher Komponente.

Hervorzuheben ist die Gleichphasigkeit der induktiven Komponente \bar{U}_{vLa} des Außenleiters zu \bar{U}_{vLi} des Innenleiters, die sich aus der Gleichphasigkeit von J_v in Hin- und Rückstrom ergibt, während $J_k - J_v$ im Innenleiter Gegenphase zu J_v im Außenleiter aufweist.

Die Darstellung bezieht sich jeweils auf den Punkt von Innen- und Außenleiter, an dem die variable Komponente J_v der Stromdichte ihr Maximum hat. Die Gesamtstromdichte J des Innenleiters und der zugehörige ohmsche Spannungsabfall sind hier Null. Der (über den ganzen Querschnitt konstante) resultierende ohmsche Spannungsabfall wird an dieser Stelle allein auf induktivem Wege durch die variable Komponente J_v erzeugt. Unabhängig von der Darstellung in Abbildung 8 für die beiden speziellen Punkte gelten jedoch die mit den Winkeln φ_i und φ_a definierten Proportionen auch für jeden anderen Punkt im Querschnitt.

5.4.7 Kurvenverläufe

Abbildung 9: Innenleiter $c = 0.5$

In den Abbildungen 9 bis 13 sind für die Innenleiter (mit äußerem Radius R_a) einer Koaxialleitung beziehungsweise für deren Außenleiter (mit innerem Radius R_i) die maßgebenden elektrischen Größen dargestellt.

In diesen Abbildungen 9 bis 13 sind dargestellt:

- Stromdichte,
- magnetische Feldstärke,
- magnetischer Fluss (auf die Längeneinheit bezogen) und
- Strom.

Die Werte der Ordinaten sind wie folgt normiert:

- Stromdichte: auf den Maximalwert,
- magnetische Feldstärke Innenleiter: auf den zu R_a gehörigen Gesamtwert $H(x)$,
- magnetische Feldstärke Außenleiter: auf den zu $R_i + D$ gehörigen Wert $H_k(x) = -H_v(x)$,
- magnetischer Fluss: auf den Wert $I_0 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}$,
- Strom: auf den Maximalwert I_0 .

Die Darstellung erstreckt sich jeweils auf die räumlich konstante (Index k) und die räumlich variable (Index v) Komponente sowie den jeweils durch die Strichstärke hervorgehobenen resultierenden Wert, und erfasst folgende Parameter:

- Abb. 9: Innenleiter, $c = 0,5$
- Abb. 10: Innenleiter, $c = 1$
- Abb. 11: Innenleiter, $c = 10$
- Abb. 12: Außenleiter, $c = 1$
- Abb. 13: Außenleiter, $c = 10$
- Abb. 14: Innen-/Außenl., $c = 2/3,5$

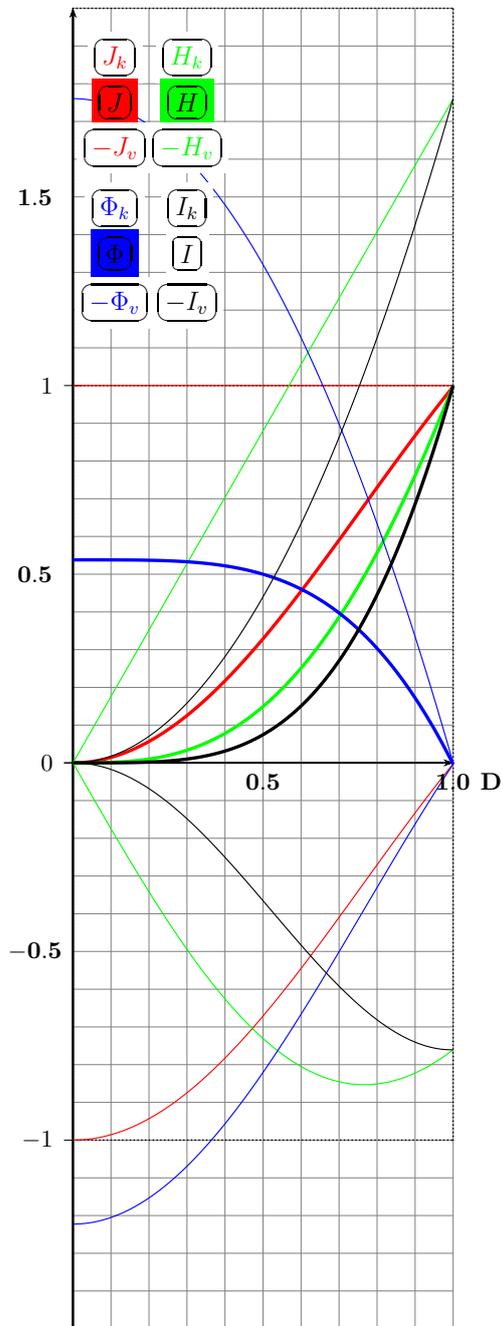


Abbildung 10: Innenleiter $c = 1$

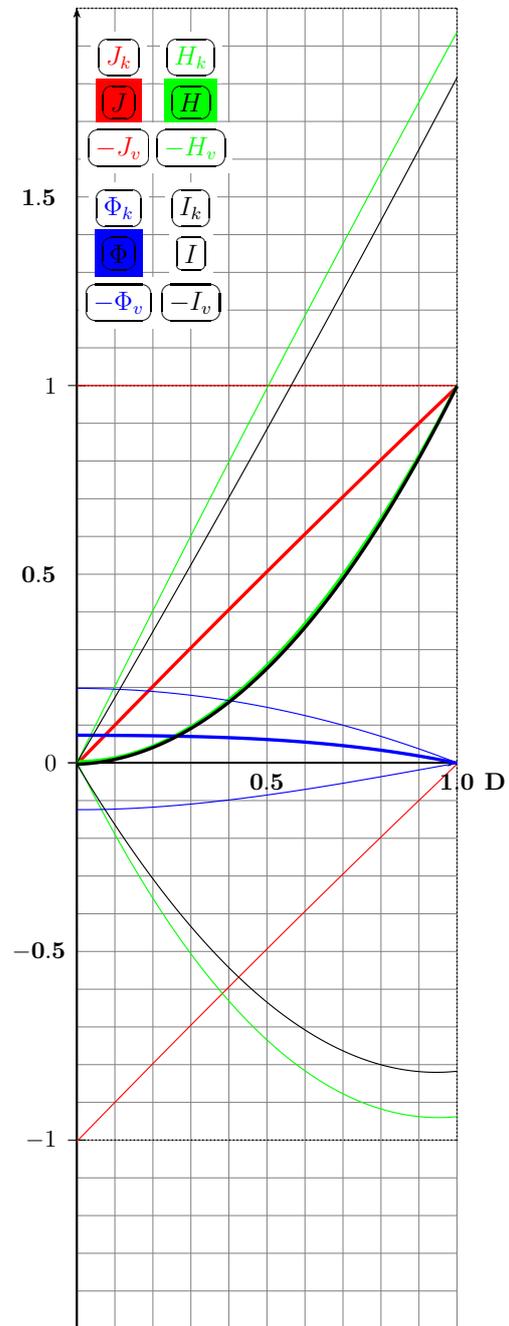


Abbildung 11: Innenleiter $c = 10$

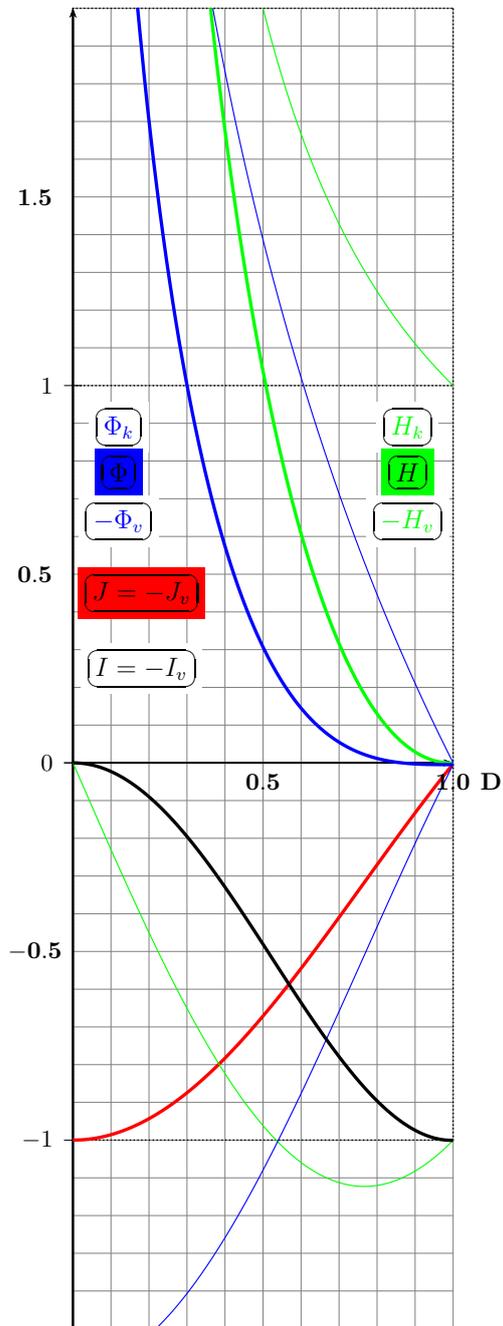


Abbildung 12: Außenleiter $c = 1$

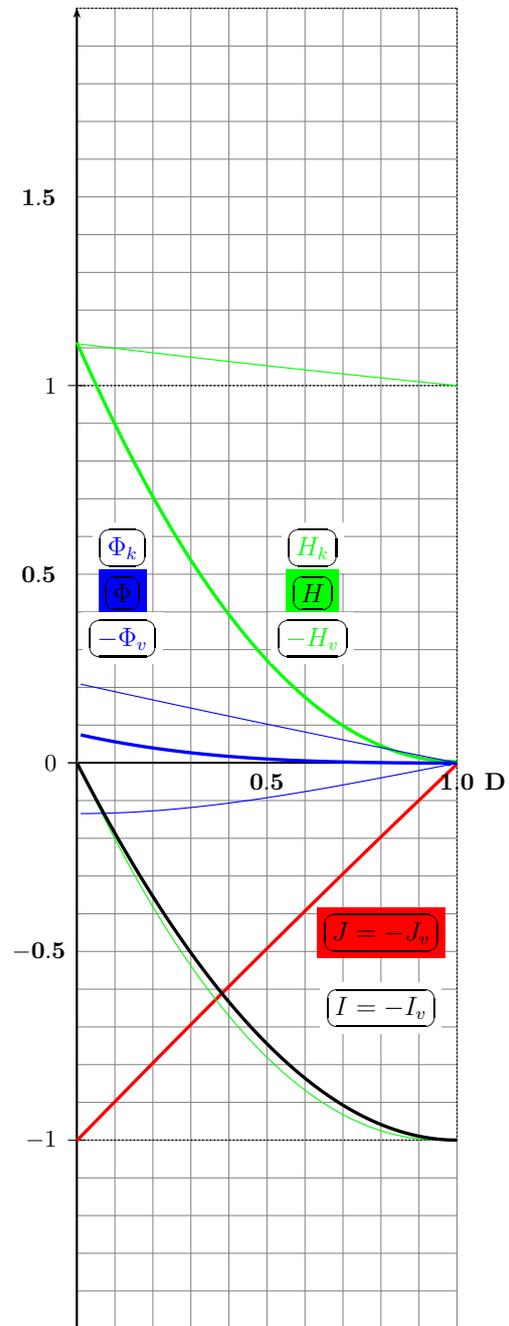


Abbildung 13: Außenleiter $c = 10$

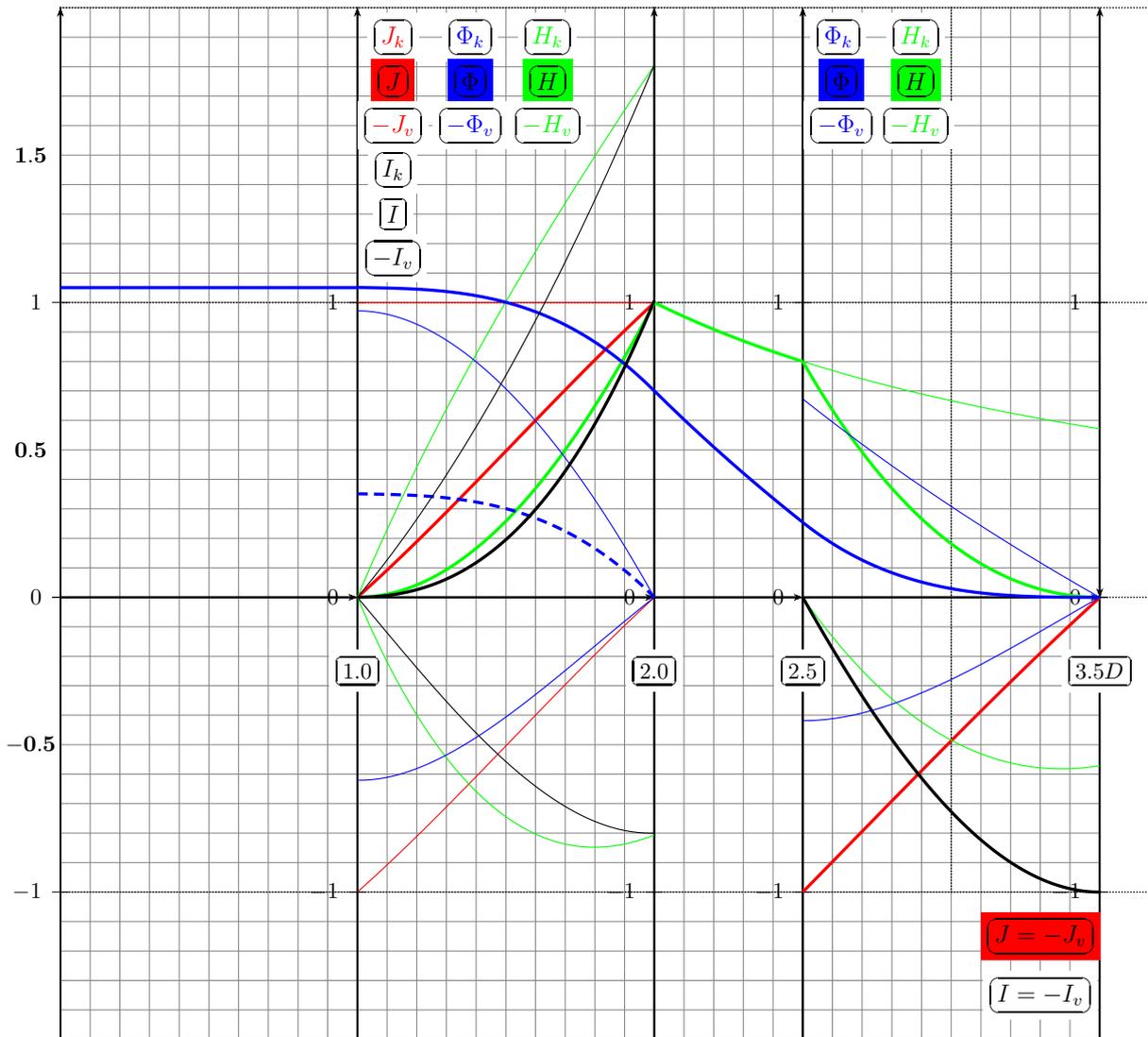


Abbildung 14: Koaxialleitung Innenleiter $c = 2$ Außenleiter $c = 3, 5$

Dargestellt ist bei Abbildung 9 mit $c = 0,5$ eine Hälfte des Leiters entsprechend $0,5 \cdot D$, sonst jeweils der Bereich der Eindringtiefe D , der von $0,0$ bis $1,0$ skaliert ist. Die Skalierung entspricht also einer Funktion $x = k_c \cdot z$, wobei die Proportionalitätskonstante k_c eine von c abhängige Größe darstellt.

Bei den Abbildungen 10 und 12 entspricht der dargestellte Bereich gleichzeitig dem Leiterradius, der identisch ist mit der Eindringtiefe D . Abbildung 12 stellt den Grenzfall des Außenleiters dar, der mit einem beliebig kleinen Innenleiter korrespondiert. Dieser markante Fall ist später u.a. für die induktive Beeinflussung im Umfeld eines Leiters von herausgehobener Bedeutung.

Der gewählte Nullpunkt auf der Abszisse entspricht dem Beginn der Eindringtiefe D (Innenleiter: $R_a - D$, Außenleiter: R_i).

Beim Blick auf das (gedachte) Schnittbild der Koaxialleitung (senkrecht zur Leiterachse) beziehen sich die Bilder immer auf die rechte Seite (bezogen auf den Mittelpunkt).

Der Punkt $x = 1$ entspricht dem Radius R_a des Innenleiters beziehungsweise $R_i + D$ im Außenleiter, der in beiden Fällen das Ende der Eindringtiefe der variablen Komponente der Stromdichte kennzeichnet. Das Integrationsintervall von magnetischem Fluss und Strom ist so gewählt, dass bei $x = 1$ der magnetische Fluss auf Null abgeklungen ist und der Strom seinen Maximalwert besitzt.

In Abbildung 14 ist eine komplette Koaxialleitung mit Innen- und Außenleiter dargestellt einschließlich resultierendem Verlauf der magnetischen Feldstärke. Der Bezugspunkt für die Normierung der magnetischen Feldstärke des Außenleiters ist für diesen Fall an den Innenleiter angepasst.

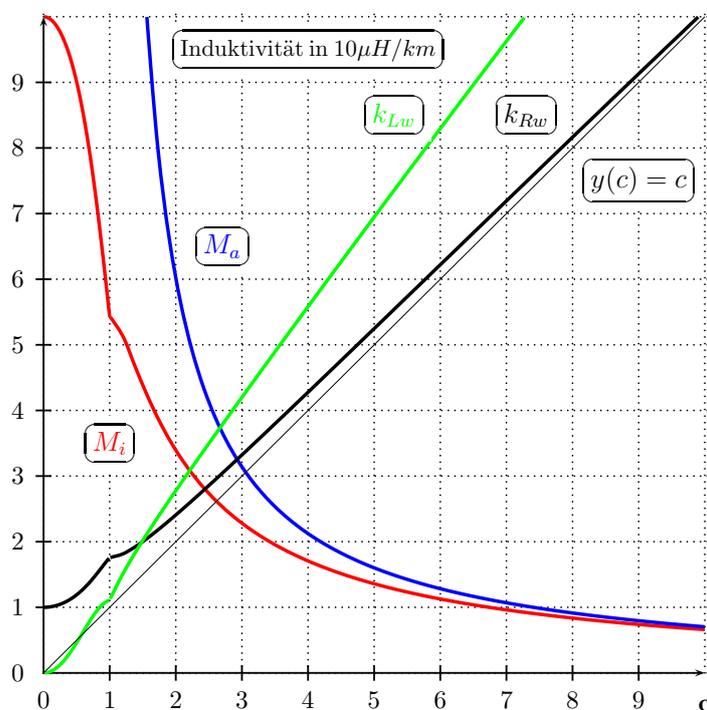


Abbildung 15: Innere Induktivität / Widerstand

In Abbildung 15 sind schließlich abhängig von Parameter c die Kurvenverläufe für die innere Induktivität M_i des Innenleiters und M_a des Außenleiters sowie die für den Innenleiter maßgebenden Verhältnisse k_{Rw} und k_{Lw} von Wechselstrom- zu Gleichstromwiderstand dargestellt. k_{Rw} nähert sich mit wachsendem Wert von c sehr schnell asymptotisch der ebenfalls dargestellten Funktion

$$y(c) = c$$

die der Winkelhalbierenden im Diagramm entspricht. k_{Lw} nähert sich sehr schnell einem konstanten Verhältnis zu k_{Rw} .

6 Zusammenhang von Elektromagnetismus und Mechanik

6.1 Äquivalenz von Masse und Energie

Elektromagnetische Freiraumstrahlung ist mit Lichtgeschwindigkeit fließende Masse in feinstverteilter Verteilung. Diese Masse in Feinstverteilung, im folgenden auch Feinmasse genannt, ist ohne Einschränkung fein verteilt im Raum; sie besitzt also keine irgendwie geartete Korngröße, wie wir sie von Atomen oder deren Bestandteilen kennen. Feinstverteilung darf freilich keinesfalls mit gleichmäßiger Verteilung gleichgesetzt werden.

Ist die räumliche Massendichte m_R (Der Index R steht für Raum.) als Masse m pro Volumen V definiert, so durchströmt die differentiell kleine Masse $\partial^2 m$ in der differentiell kleinen Zeit ∂t den differentiell kleinen Querschnitt ∂q . Es gilt:

$$m_R = \frac{\partial^2 m}{\partial V} = \frac{\partial^2 m}{\partial s \cdot \partial q}. \quad (6.1)$$

Dabei ist die Wegstrecke ∂s identisch mit dem Produkt aus Lichtgeschwindigkeit c und der Zeit ∂t

$$\partial s = c \cdot \partial t.$$

Mit (6.1) errechnet sich also:

$$\partial^2 m = m_R \cdot \partial s \cdot \partial q = m_R \cdot c \cdot \partial t \cdot \partial q. \quad (6.2)$$

Die den Querschnitt ∂q in der Zeit ∂t durchströmende Masse, also der Massendurchsatz, beträgt:

$$m_q = \frac{\partial^2 m}{\partial t \cdot \partial q}, \quad (6.3)$$

und mit (6.2) gilt:

$$m_q = m_R \cdot c. \quad (6.4)$$

Für die auf Zeit und Querschnitt bezogene Masse $\partial^2 m$ gilt der Impulssatz für die Beschleunigung vom Ruhezustand auf Lichtgeschwindigkeit, wie es dem Wesen einer permanenten Schwingung entspricht:

$$\partial^2 m \cdot c = \partial F \cdot \partial t, \quad (6.5)$$

und für die differentiell kleine Kraft ∂F gilt:

$$\partial F = \frac{\partial^2 m}{\partial t} \cdot c. \quad (6.6)$$

Der Energiedurchsatz durch den Querschnitt ∂q beträgt mit (6.6):

$$\partial N = \partial F \cdot c = \frac{\partial^2 m}{\partial t} \cdot c^2. \quad (6.7)$$

Die mit dem Energiedurchsatz während der Zeit ∂t korrespondierende Energie ∂E beträgt:

$$\partial E = \partial N \cdot \partial t = \partial^2 m \cdot c^2. \quad (6.8)$$

Die Integration dieser Beziehung über das Volumen führt schließlich zu der Form:

$E = m \cdot c^2.$	(6.9)
--------------------	-------

Diese nach EINSTEIN, die Äquivalenz von Masse und Energie kennzeichnende Beziehung, die hier für die Freiraumstrahlung abgeleitet wurde, ist - wie bekannt - ein allgemeines Naturgesetz. Denn elektromagnetische Strahlung ist das Grund„material“, aus dem alle stoffliche Materie aufgebaut ist. Beim Aufbau der Bausteine der Materie wird die elektromagnetische Strahlung aus ihrer natürlichen geradlinigen Fortpflanzungsrichtung abgelenkt und in Bahnen gezwungen, die in sich geschlossen sind. Bei der Materialisierung elektromagnetischer Strahlung in Materiebausteinen ist das lokal gebundene Quantum an Feinmasse identisch mit der Masse des Materiebausteins. Umgekehrt wird bei der Zertrümmerung von Materiebausteinen ein durch die Beziehung (6.9) bestimmtes Quantum an Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung frei.

6.2 Elektrische Energieströmung

Die elektrische Energie E_e ist die Strömung von Feinmasse m mit der Geschwindigkeit v . Es gilt in Verallgemeinerung dessen, was für die Freiraumstrahlung dargelegt wurde:

$$E_e = m \cdot v^2 \quad \text{mit} \quad v \leq c. \quad (6.10)$$

m steht zunächst für eine nicht näher eingegrenzte anonyme Menge an Feinmasse. Grenzen wir dagegen in einem zweiten Schritt auf die Verhältnisse einer konkreten Strombahn ein, mit definierten Werten der an der Strömung beteiligten Feinmasse und der Länge der Strombahn, ergibt sich die Form:

$$E_e = \frac{m}{l} \cdot v^2 \cdot l = I^2 \cdot l. \quad (6.11)$$

Der zu dieser konkreten Strombahn gehörige Energiedurchsatz ergibt sich zu:

$$N_e = \frac{dE_e}{dt} = \frac{m}{l} \cdot v^2 \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{m}{l} \cdot v^2 \cdot k_e = I^2 \cdot k_e. \quad (6.12)$$

Dabei ist:

$$k_e = \frac{dl}{dt}. \quad (6.13)$$

Somit ist:

$$N_e = \frac{E_e \cdot k_e}{l} = E_e \cdot k_e' \quad \text{mit} \quad k_e' = \frac{k_e}{l} \quad (6.14)$$

k_e führt die physikalische Einheit einer Geschwindigkeit und k_e' ist die zugehörige auf die Länge bezogene Größe.

Nach Naturgesetz ist die Translation der Feinmasse mit Geschwindigkeit v in der dazu senkrechten Ebene stets mit einer Rotation sowie mit einer Bewegung senkrecht zu Translation **und** Rotation verbunden.

Senkrecht zu Translations- und Rotationsrichtung strömt auch die elektrische Energie, die die Wirk- oder Scheinleistung N darstellt. Es gilt mit dem noch zu definierenden Faktor $k' = \frac{k_e}{l}$:

$$N = m \cdot v^2 \cdot k' = E_e \cdot k'. \quad (6.15)$$

Dabei ist es zweckmäßig, sich zu verdeutlichen, dass bekanntlich die elektrische Leistung N dem Integral des POYNTINGSchen Vektors S über die die Strombahn umhüllende Fläche entspricht. Die elektrische Leistung N oder der flächenbezogene Energiedurchsatz S repräsentieren schwingende und Verlustleistung, wobei „Verlust“ im Sinne eines Übergangs von Energie auf Materiebausteine (Ohmsche Wirkung) zu verstehen ist. Der Teil der Leistung, der verlustfrei schwingt, ist noch nach Trägheitswirkung (induktiv) und elastischer Wirkung (kapazitiv) zu unterteilen. N errechnet sich nach (6.15) als Produkt von elektrischer Energie

E_e und Materialkonstante k' . Diese Materialkonstante k' ist ein Schwingungsbeiwert, der - getrennt nach den dargestellten 3 Varianten - die maßgebenden Einflussgrößen von gedämpfter wie ungedämpfter Schwingung enthält.

Die elektrische Leistung

$$N = m \cdot v^2 \cdot k' \quad (6.16)$$

lässt sich als Produkt zweier Größen darstellen, nämlich:

$$I = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v, \quad (6.17)$$

die identisch ist mit der elektrischen Stromstärke und üblicherweise die physikalische Einheit Ampère führt, und

$$U = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v \cdot k'l, \quad (6.18)$$

die identisch ist mit der elektrischen Spannung und üblicherweise die physikalische Einheit Volt führt.

Nach (6.1) errechnet sich die Masse

$$m = \int_{s=0}^{s=l} \int_0^q m_R \cdot \partial q \cdot \partial s = \overline{m_R} \cdot q \cdot l, \quad (6.19)$$

wobei im Abschnitt zwischen $s = 0$ und $s = l$ gelten soll, dass

$$\int_0^q m_R \cdot \partial q = \overline{m_R} \cdot q = \text{konst.},$$

mit $\overline{m_R}$ als Mittelwert im Querschnitt q . Damit gilt für die auf die Längeneinheit in Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v bezogene Massendichte

$$m_v = \frac{dm}{dt \cdot v} = \frac{m}{l} = \overline{m_R} \cdot q. \quad (6.20)$$

Die Massendichte

$$m_v = \frac{m}{l}$$

ist die mit Geschwindigkeit v bewegte Feinmasse m , bezogen auf die Länge l der Strombahn. Der Quotient aus Spannung und Strom ergibt sich zu:

$$\frac{U}{I} = \frac{\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v \cdot k'l}{\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v} = k'l = k = Z \quad (6.21)$$

und ist identisch mit dem elektrischen (Wechselstrom-) Widerstand.

Für die Materialkonstante k' gibt es die bereits erwähnten 3 Varianten im Sinne der Einflussgrößen einer Schwingung mit Kreisfrequenz ω :

$$\begin{aligned} k_R' &= R' && \text{für den ohmschen Widerstand (Dämpfung),} \\ k_L' &= \omega L' && \text{für den induktiven Widerstand (Induktivität = Trägheit),} \\ k_C' &= \frac{1}{\omega C' l^2} && \text{für den kapazitiven Widerstand (Elastische Wirkung).} \end{aligned}$$

Die Induktivität ist identisch mit der Trägheitswirkung der strömenden Feinmasse. Die kapazitive Wirkung entspricht dagegen den elastischen Kräften innerhalb der schwingenden Feinmasse in der Strombahn.

$$\begin{aligned} R' &= \frac{R}{l}, \\ L' &= \frac{L}{l} \quad \text{und} \\ C' &= \frac{C}{l} \end{aligned}$$

sind die auf die Längeneinheit bezogenen spezifischen Werte von ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität.

6.3 Korrelation der physikalischen Einheiten

Dargestellt am Beispiel der elektrischen Leistung im Widerstand R gelten folgende konforme elektrischen und mechanischen Gesetzmäßigkeiten:

	U	·	I	=	N
I	·	R	·	I	= $I^2 \cdot R$
$\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$	·	kl	·	$\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$	= $mv^2 \cdot k$

mit den physikalischen Einheiten :

	A	·	Ω	·	A	=	W
	$\sqrt{k_A} \sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot \frac{m}{s}$	·	$\frac{1}{k_A} \cdot \frac{m}{s}$	·	$\sqrt{k_A} \sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot \frac{m}{s}$	=	$kg \cdot \frac{m^2}{s^3}$

k_A ist die Eichkonstante der Stromstärke, da das Ampère in Unkenntnis der Zusammenhänge von Elektrizität und Mechanik als „unabhängige“ Größe definiert wurde. Wie später gezeigt wird, gilt für die Eichkonstante k_A die Beziehung:

$$k_A = \mu_0 \div \frac{\Omega}{m/s} = 4\pi \cdot 10^{-7}. \quad (6.22)$$

k_A entspricht also dem seiner physikalischen Einheit entkleideten Wert der magnetischen Feldkonstanten. Für die Korrelation der physikalischen Einheiten gelten zusammenfassend die Beziehungen:

$$1A = \sqrt{k_A} \cdot \sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot \frac{m}{s}, \quad (6.23)$$

$$1V = \frac{1}{\sqrt{k_A}} \cdot \sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot \frac{m^2}{s^2}, \quad (6.24)$$

$$1\Omega = \frac{1}{k_A} \cdot \frac{m}{s}. \quad (6.25)$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass für die physikalische Einheit der elektrischen Leistung

$$1W = 1kg \cdot \frac{m^2}{s^3} = 1 \frac{J}{s}$$

bekanntlich der direkte Übergang zwischen elektrischen und mechanischen Größen im System der physikalischen Einheiten bereits realisiert ist.

6.4 Elektroimpulssatz und Kirchhoffsche Lehrsätze

Es fällt auf, dass die Massendichte

$$m_v = \frac{m}{l}$$

bei der Definition von Stromstärke und Spannung in zwei identische Faktoren

$$\sqrt{\frac{m}{l}}$$

quasi auseinandergerissen wird. Dies darf jedoch nicht darüber hinweg täuschen, dass gleichwohl in der Stromstärke eine analoge Größe zum mechanischen Impuls der Feinmasse

$$m \cdot v$$

vorliegt! Wie später noch gezeigt wird, resultiert der mechanische Impuls

$$m \cdot v$$

der strömenden Feinmasse stets aus einem Paar identischer Elektroimpulse

$$\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$$

die senkrecht zueinander wirken. Einer von beiden ist allerdings dadurch ausgezeichnet, dass er in Richtung der Strömung wirkt. Diese paarweisen Elektroimpulse der strömenden Feinmasse bedingen sich wechselseitig in ihrer Wirkung. Sie entziehen sich geometrischer Addition im Gegensatz zu den Gesetzmäßigkeiten von Massepunkten. Es gilt also das Gesetz der paarweise und senkrecht zueinander wirkenden Elektroimpulse.

Diese Doppelnatur des Elektroimpulses steht in direktem Zusammenhang damit, dass der Energieinhalt der Masse **nicht** etwa der Beschleunigungsarbeit von Geschwindigkeit 0 auf Lichtgeschwindigkeit c entspricht, also

$$E_c = \frac{m}{2} \cdot c^2,$$

sondern dem doppelten Wert dieser Größe, nämlich

$$E = m \cdot c^2.$$

Aufteilung und Zusammenfassung strömender Feinmasse kann sich nur auf eine Komponente der paarweisen Elektroimpulse beziehen, nämlich der der Ausbreitungsrichtung. In Analogie zum Impulssatz für Massenpunkte

$$\sum (m \cdot v) = \text{konst.}$$

ergibt sich deshalb als Elektroimpulssatz der strömenden Feinmasse für jeden Punkt im Raum

$$\sum \left(\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v \right) = \text{konst.} \quad (6.26)$$

Aus der Definition der Stromstärke nach (6.17) in mechanischer Interpretation erkennt man deshalb unmittelbar, dass der Elektroimpulssatz der strömenden Feinmasse identisch ist mit dem 1. KIRCHHOFFSchen Gesetz.

Den direkten Zusammenhang von mechanischem Impuls

$$m \cdot v$$

und Elektroimpuls

$$\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$$

erkennt man, wenn man sich verdeutlicht, dass der Elektroimpuls sowohl in der Definition des Stromes wie auch der Spannung enthalten ist. (Gleiches gilt natürlich auch für magnetische Feldstärke und elektrische Feldstärke.) Bei der Berechnung von elektrischer Leistung oder einer Kraft im magnetischen Feld fließt - basierend auf (6.17) und (6.18) - also neben der Länge l immer das Produkt der beiden zusammengehörigen Elektroimpulse

$$\left(\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v \right)^2 \cdot l = m \cdot v^2$$

in das Ergebnis ein, also die elektrische oder die identische mechanische Energie beziehungsweise das Produkt aus mechanischem Impuls und Geschwindigkeit.

Die formale Natur des Elektroimpulses mit der Quadratwurzel aus der Masse pro Längeneinheit

$$\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$$

darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass wegen des stets damit verbundenen Zwillingbruders immer der volle Wert des mechanischen Impulses

$$m \cdot v$$

wie auch der korrespondierenden Kraft wirkt.

Die auf den ersten Blick nicht nachvollziehbare physikalische Einheit des Widerstandes, die identisch ist mit der physikalischen Einheit einer Geschwindigkeit und auch direkt in die physikalische Einheit der Spannung einfließt, muss gedanklich als Produkt zweier Größen betrachtet werden. Das ist einmal die Länge der betrachteten Strombahn und zum zweiten der Kehrwert einer Zeit, der multipliziert mit der Strömungsgeschwindigkeit v , eine Beschleunigung beziehungsweise Verzögerung ergibt, also eine proportionale Größe zu der auf die Feinmasse im betrachteten Punkt wirkenden spezifischen Kraft. Die bei integrierter Betrachtungsweise für die Gesamtheit der (geschlossenen) Strombahn resultierende Kraft, die nach dem Kräftegleichgewicht stets zu Null werden muss, steht deshalb für die Aussage des 2. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes in mechanistischer Interpretation.

6.5 Energiedurchsatz

Der elektrische Energiedurchsatz S durch die einem Zylindermantel entsprechende Fläche

$$F = l \cdot 2\pi r$$

mit Länge l und Radius r beträgt:

$$S = \frac{U \cdot I}{F} = \frac{U \cdot I}{l \cdot 2\pi r} = \frac{U}{l} \cdot \frac{I}{2\pi r} = E \cdot H. \quad (6.27)$$

E ist die elektrische Feldstärke, H die magnetische Feldstärke und S steht als gerichtete Größe senkrecht zu E und H (Vektorprodukt).

Es gilt mit k' nach (6.15) bis (6.18):

$$S = E \cdot H = \frac{mv^2}{F} \cdot k'. \quad (6.28)$$

Für die physikalischen Einheiten gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k_A}} \cdot \frac{E}{m \cdot s^2} &\cdot \frac{H}{m \cdot s} = S \\ \frac{1}{\sqrt{k_A}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot m^2}{m \cdot s^2} &\cdot \frac{\sqrt{k_A} \cdot \sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot m}{m \cdot s} = \frac{kg}{s^3} \end{aligned}$$

6.6 Strömungsfeld der Feinmasse

Wird Gleichung (4.7) in (4.10) eingesetzt, ergibt sich die Form:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{k_0}{\alpha_0^2} \cdot \frac{d[J_v(r)]}{dr} \cdot r \right\} = k_0 \cdot J_v(r).$$

Mit (4.6) ergibt sich nach Umformung:

$$\rho \cdot \left\{ \frac{d^2}{dr^2} [J_v(r)] + \frac{\frac{d}{dr} [J_v(r)]}{r} \right\} = -k_0 \omega \mu_0 \cdot J_v(r).$$

Geht man, ausgehend von den Gegebenheiten eines Außenleiters mit $J_k = 0$, von der isolierten Betrachtung der variablen Komponente $J_v(r)$ auf die resultierende Stromdichte

$$J(r) = J_k - J_v(r)$$

über und schreibt abgekürzt

$$J(r) = J,$$

erhält man unter Einbeziehung der den Beziehungen (5.24) - (5.27) vorangestellten Überlegungen, d. h. Multiplikation des induktiven Teils auf der rechten Gleichungsseite mit dem Faktor

$$\frac{1}{k_0}$$

die folgende Form:

$$\rho \cdot \left(\frac{d^2 J}{dr^2} + \frac{\frac{dJ}{dr}}{r} \right) = -\omega \mu_0 \cdot J. \quad (6.29)$$

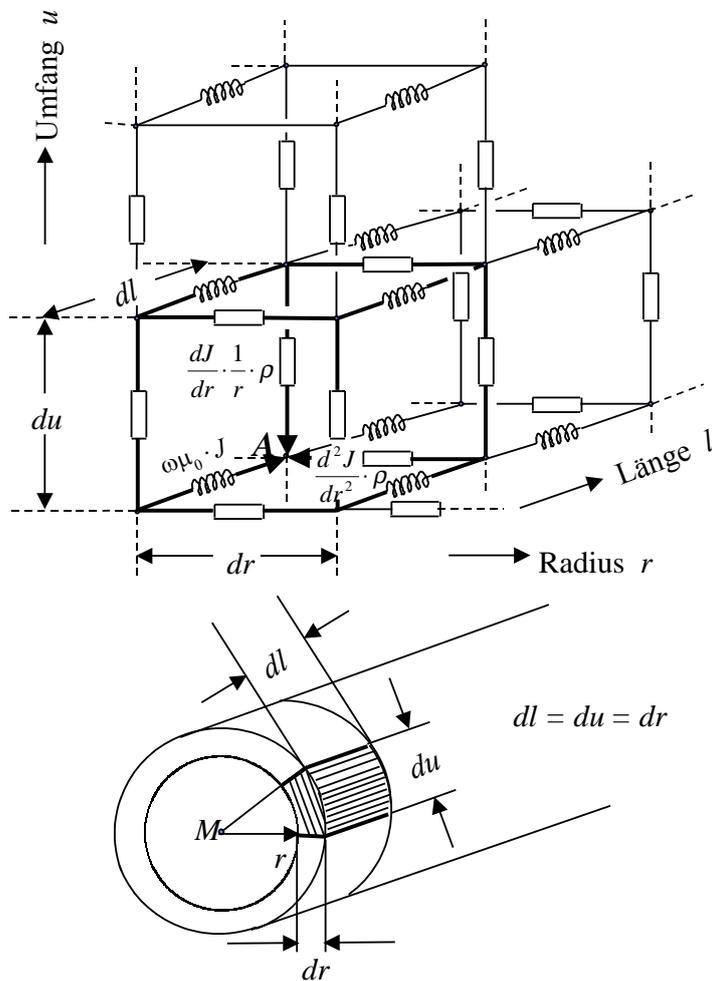


Abbildung 16: Ersatzbild des Leiters

In Abbildung 16 ist das Ersatzbild eines (runden) Leiters dargestellt. In dem differenziell kleinen Würfel der Kantenlänge

$$dl = du = dr$$

sind die Glieder der Differentialgleichung (6.29) abgebildet. (l steht für die Längsrichtung, u zeigt in Richtung des Umfangs und r in die radiale Richtung.)

Am Beispiel des Eckpunktes A erkennt man, dass die 3 Pfeile die 3 Komponenten der Strömungsrichtung der Feinmasse darstellen. Diese Strömungsrichtungen korrespondieren mit Kräften. Speziell im Fall der Umfangsgeschwindigkeit steht die zugehörige Kraft aber senkrecht auf der Umfangsgeschwindigkeit, wirkt also in radialer Richtung, weil sie von der Fliehkraft der rotierenden

Feinmasse herrührt. Daraus erklärt sich auch die auf den ersten Blick irritierende **algebraische** Addition von Umfangs- und Radialkomponente in Gleichung (5-29).

Man erkennt nun weiterhin, dass bei der Strömung der Feinmasse die an jedem Punkt wirkende Kraft in Längsrichtung mit einer gleich großen Kraft senkrecht zur Längsrichtung korrespondiert. Dieses Paar gleich großer Kräfte, aber senkrecht aufeinanderstehend, kann also nie ins ruhende Gleichgewicht eintreten. Die Feinmasse bewahrt deshalb die ihr innewohnende Energie in niemals endendem Pulsieren, sei es nun bei geradliniger Strahlung, im geschlossenen Stromkreis oder in einem Materiebaustein als Spezialfall des geschlossenen Stromkreises.

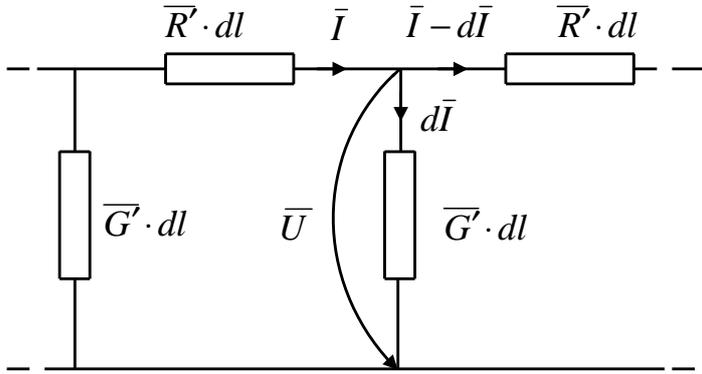


Abbildung 17: Ersatzbild einer Doppelleitung

Um die direkte Verwandtschaft zur MAXWELLSchen Leitungsgleichung erkennen zu können, ist das Ersatzbild einer Leitung mit spezifischem Längswiderstand $\overline{R'}$ und spezifischer Ableitung $\overline{G'}$ in Abbildung 17 dargestellt. Die Differentialgleichung (Spannungssumme = 0 in der dargestellten Masche), die für Strom \overline{I} und Spannung \overline{U} gelten-

den Lösungen sowie die Berechnung von Fortpflanzungskonstante γ und Wellenwiderstand \overline{Z} sind zur Orientierung in geraffter Form vor Augen gestellt.

Wenn auch \overline{U} und \overline{I} Wechselstromgrößen darstellen, so beschränken wir uns gleichwohl auf die Darstellung des räumlichen Aspekts, wobei hier die Ausbreitungsrichtung mit der Variablen l maßgebend ist (partielle Ableitung):

$$\begin{aligned}\overline{I} \cdot \overline{R'} \cdot \partial l &= \frac{\partial^2 \overline{I}}{\overline{G'} \cdot \partial l^2}, \\ \overline{I} \cdot \overline{R'} \cdot \overline{G'} &= \frac{\partial^2 \overline{I}}{\partial l^2}, \\ \overline{I} &= \overline{I}_0 \cdot \left(A_1 \cdot e^{-l \cdot \sqrt{\overline{R'} \cdot \overline{G'}}} + A_2 \cdot e^{l \cdot \sqrt{\overline{R'} \cdot \overline{G'}}} \right).\end{aligned}\quad (6.30)$$

A_2 steht für die reflektierte Welle, die unter den Bedingungen einer endlos gedachten Leitung nicht existiert. Deshalb wird gesetzt:

$$A_2 = 0 \quad \text{und} \quad A_1 = 1,$$

und damit ist:

$$\overline{I} = \overline{I}_0 \cdot A_1 \cdot e^{-l \cdot \sqrt{\overline{R'} \cdot \overline{G'}}}, \quad (6.31)$$

$$\overline{U} = -\frac{\partial \overline{I}}{\overline{G'} \cdot \partial l} = \frac{\sqrt{\overline{R'} \cdot \overline{G'}}}{\overline{G'}} \cdot \overline{I} = \overline{I}_0 \cdot \sqrt{\frac{\overline{R'}}{\overline{G'}}} \cdot e^{-l \cdot \sqrt{\overline{R'} \cdot \overline{G'}}}, \quad (6.32)$$

$$\gamma = \sqrt{\overline{R'} \cdot \overline{G'}} \quad (6.33)$$

$$\overline{Z} = \sqrt{\frac{\overline{R'}}{\overline{G'}}} \quad (6.34)$$

Innerhalb jeder zur Strombahn gehörigen Röhre (nach Abbildung 16) mit Mittelpunkt M und Radius r sowie Wandstärke dr fließt der Strom

$$d\overline{I}_r = \overline{J}(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

und es gilt das Ersatzbild der Doppelleitung nach Abbildung 17 uneingeschränkt. ($d\overline{I}_r$ tritt an die Stelle von \overline{I} und $d\overline{I}$ setzt sich aus 2 Komponenten zusammen, nämlich in Richtung des Umfangs und in radialer Richtung.

Der spezifische Widerstand \overline{R}' in Längsrichtung ist

$$\overline{R}' = j\omega\mu_0 \quad (6.35)$$

und für die spezifische Querableitung gilt:

$$\overline{G}' = \frac{1}{\rho}. \quad (6.36)$$

Damit errechnen sich Fortpflanzungskonstante γ und Wellenwiderstand \overline{Z} in komplexer Darstellung:

$$\gamma = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\rho}} = \alpha + j\beta, \quad (6.37)$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\rho}}, \quad (6.38)$$

$$\overline{Z} = \sqrt{j\omega\mu_0\rho}. \quad (6.39)$$

Vergleicht man die Beziehungen für die Fortpflanzungskonstante γ und den Wellenwiderstand \overline{Z} einer Doppelleitung:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')},$$

$$\overline{Z} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}.$$

mit den Beziehungen (6.37) und (6.39), so fallen markante Unterschiede auf, die nachfolgend diskutiert werden sollen:

1. Die spezifischen Werte des Längswiderstandes, der Induktivität, der Ableitung und der Kapazität R' , L' , G' und C' beziehen sich nicht auf einen Würfel wie nach Abbildung 16, sondern sind auf die Längeneinheit bezogen. Die anderen beiden Dimensionen des Raumes, repräsentiert durch den Querschnitt q , fließen indirekt ein entsprechend

$$R' = \frac{\rho}{q}$$

u.s.w.

2. Ausgangspunkt der Beziehungen (6.37) und (6.39) war der Außenleiter einer Koaxialleitung für den typischen Idealfall mit

$$c_0 = 1$$

In Längsrichtung kompensiert der Innenleiter auf induktiven Wege den ohmschen Spannungsabfall im Außenleiter, sodass die analoge Größe zu R' , nämlich ρ/q in Beziehung (6.35) **nicht** zu $j\omega\mu_0$ addiert werden darf!

3. Schließlich gilt noch die Annahme

$$\frac{1}{\rho} \gg \omega\epsilon_0$$

in Analogie zu

$$G' \gg \omega C'$$

Die Konsequenzen einer Änderung dieser Annahme werden anschließend noch behandelt.

Damit sind alle scheinbaren Widersprüche im Vergleich zu einer Doppelleitung aufgeklärt und begründet. Der Vollständigkeit halber sei aber noch erwähnt, dass der betrachtete Außenleiter seine elektrischen Eigenschaften dem Innenleiter induktiv aufprägt. Diesen Innenleiter müssen wir im gewählten Beispiel wegen

$$c_0 = 1$$

(als Hilfsvorstellung) extrem dünn annehmen. Dieser theoretische Grenzfall ist aber gleichzeitig der wichtige Spezialfall, an den unsere weiteren Überlegungen anknüpfen.

Wellenlänge λ und Ausbreitungsgeschwindigkeit v sowie der Zusammenhang mit der Eindringtiefe D sind nachfolgend berechnet:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}}. \quad (6.40)$$

Mit der nach (4.48) berechneten Eindringtiefe

$$D = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2} \cdot \rho}{\omega\mu_0}} = \frac{2\tau}{\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}}$$

ergibt sich:

$$\lambda = 2\pi \cdot D \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{2\tau} = D \cdot \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \pi}{\tau}, \quad (6.41)$$

und

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\omega \cdot \frac{2\rho}{\mu_0}} = f \cdot D \cdot \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \pi}{\tau}. \quad (6.42)$$

6.7 Freiraumstrahlung

Prinzipiell wirkt bei jedem differentiell kleinen Würfel mit Kantenlänge ds und spezifischem Widerstand ρ parallel zu dem Leitwert

$$G_R = \frac{ds^2}{\rho \cdot ds}$$

der kapazitive Leitwert

$$G_C = \frac{ds^2 \cdot \omega\epsilon_0}{ds}$$

Der Gesamtleitwert \bar{G} ist damit in komplexer Darstellung:

$$\bar{G} = G_R + jG_C = ds \cdot \left(\frac{1}{\rho} + j\omega\epsilon_0 \right)$$

und der spezifische Leitwert:

$$\bar{G}' = \frac{1}{\rho} + j\omega\epsilon_0. \quad (6.43)$$

Die Vernachlässigung der kapazitiven Komponente setzt also die Bedingung

$$\frac{1}{\rho} \gg \omega\epsilon_0$$

voraus. Als Zahlenbeispiel sei angeführt:

$$\rho = 100 \Omega m, \quad f = 50 \text{ Hz};$$

$$\frac{1}{\rho} = 10^{-2} \frac{S}{m} \gg \omega \epsilon_0 \approx 3 \cdot 10^{-9} \frac{S}{m}.$$

Umgekehrt kann der spezifische ohmsche Leitwert vernachlässigt werden, wenn die Bedingung

$$\omega \epsilon_0 \gg \frac{1}{\rho}$$

gilt. Für die Freiraumstrahlung mit

$$\frac{1}{\rho} \rightarrow 0 \quad (6.44)$$

gilt somit:

$$\overline{R'} = j\omega\mu_0, \quad (6.45)$$

$$\overline{G'} = j\omega\epsilon_0. \quad (6.46)$$

Damit errechnen sich Fortpflanzungskonstante γ_F und Wellenwiderstand Z_F :

$$\gamma_F = \sqrt{j\omega\mu_0 \cdot j\omega\epsilon_0} = \alpha_F + j\beta_F, \quad (6.47)$$

$$\alpha_F = 0, \quad \beta_F = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}, \quad (6.48)$$

$$Z_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{j\omega\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,73\dots \Omega. \quad (6.49)$$

Wellenlänge λ und Ausbreitungsgeschwindigkeit c sowie der Zusammenhang mit der Eindringtiefe D sind nachfolgend berechnet:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_F} = \frac{1}{f\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (6.50)$$

$$c = \frac{\omega}{\beta_F} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (6.51)$$

Für die Berechnung der Eindringtiefe analog (4.48) ist

$$\rho \quad \text{durch} \quad \frac{1}{\omega\epsilon_0}$$

zu ersetzen und

$$k_0 \quad \text{durch} \quad k = 1,$$

weil induktive und kapazitive Komponente nicht um 90° phasenverschoben sind, sondern in Gegenphase zueinander stehen. Damit gilt:

$$D_F = 2\tau \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2\tau \cdot \frac{c}{\omega}, \quad (6.52)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = D_F \cdot \frac{\pi}{\tau} = 2,61\dots \cdot D_F. \quad (6.53)$$

Der Durchmesser des Lichtstrahls d_L beträgt also:

$$d_L = 2D_F = 0,765... \cdot \lambda. \quad (6.54)$$

Den Beziehungen (6.47) - (6.49) sowie (6.51) ist zu entnehmen, dass

- Dämpfung $\alpha_F = 0$,
- Wellenwiderstand Z_F und
- Ausbreitungsgeschwindigkeit c

frequenzunabhängig sind und deshalb als konstante Werte nicht nur gleichermaßen für hohe und niedere Frequenzen, sondern offensichtlich auch für den Grenzfall des Gleichstroms gelten. Eine Gleichstromkomponente ist ja aber auch unabdingbar für den Energie- und den identischen Feinmasstransport.

Allerdings wird diesem Gleichstrom immer erst in Kombination mit der zugehörigen Wechselstromkomponente Struktur verliehen hinsichtlich Durchmesser des Strahls nach (6.52) und Wellenlänge nach (6.53).

Nach dem Elektroimpulssatz ist ein Elektroimpuls in Ausbreitungsrichtung immer mit einem gleich großen Elektroimpuls in der Ebene senkrecht dazu verbunden. Da bei gleichförmiger Strömung eine Schwingung in radialer Richtung ausscheidet, ergibt sich in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine Rotation mit einheitlicher Umfangsgeschwindigkeit, nämlich der Lichtgeschwindigkeit. D.h., der kreisförmige Querschnitt der Feinmasse-Strömung muss in Kreisringe von differentiell kleiner Dicke aufgelöst gedacht werden. Jedem Kreisring kommt dabei eine andere Winkelgeschwindigkeit zu. Die kinetische Energie der Feinmasse-Strömung

$$E = m \cdot c^2$$

steckt damit zur einen Hälfte in der geradlinigen Bewegung in Ausbreitungsrichtung und zur anderen Hälfte in der Rotationsbewegung senkrecht dazu.

Die gleichförmig strömende und rotierende Feinmasse ist aber gleichzeitig Träger schwingender Energie. Dies muss in dem Sinne interpretiert werden, dass hier keine zusätzliche Energie vorliegt. Vielmehr pendelt der Energieinhalt einer differentiell kleinen Volumeneinheit in der Feinmasse-Strömung periodisch um den Mittelwert

$$dE = dm \cdot c^2.$$

Die Schwingung ist aber gleichzeitig das Element, mit der der Feinmasse-Strömung erst Struktur und Charakter verliehen wird, repräsentiert durch

- Frequenz,
- Wellenlänge und
- Durchmesser des Strahls.

Zu diesen 3 Parametern kommt, wie später in Unterabschnitt 6.12 dargelegt, noch eine definierte Menge an Feinmasse je Wellenlänge nach der von PLANCK gefundenen Quantisierung der Energie.

Die Proportion zwischen Träger und aufmodulierter Schwingung wird später in Beziehung (6.70) dargelegt. Im Vorgriff soll jedoch bereits an dieser Stelle auf ein wichtiges Wesensmerkmal hingewiesen werden. Die Modulation der Geschwindigkeit der Feinmasse-Strömung

in Richtung der Ausbreitung und insbesondere auch in Richtung des Umfangs führt niemals zu einer Richtungsumkehr der Geschwindigkeit!

Wegen des engen Zusammenhangs der verschiedenen physikalischen Gesetzmäßigkeiten lässt sich das Gedankengebäude nicht in jedem Fall wie Stein auf Stein aufbauen, sondern es muss zum sukzessiven Eindringen in die Materie immer wieder einmal eine Erkenntnis im Vorgriff einfließen, die erst später in Gesamtheit dargelegt wird. Für den Einstieg in die weiteren Betrachtungen werden in diesem Sinne in der Folge einige grundsätzliche Betrachtungen vorausgeschickt.

Elektrischer Strom ist strömende Feinmasse. Hinsichtlich Quelle und Ausbreitung der Feinmasse ist zu unterscheiden nach

- von Atomen emittierter Feinmasse, die sich als Strahl autonom und zentriert fortpflanzt,
- Feinmasse von bewegten Ladungsträgern, die mit diesen in Verbindung steht und schließlich
- Feinmasse, die sich von schwingenden Ladungsträgern ablöst und sich als transversale Schwingung autonom fortpflanzt.

Folgende Charakteristika sind festzustellen:

1. Die autonome zentrierte Feinmassenströmung ist also von Atomen emittierte Strahlung und ihr typischer Vertreter ist das Licht. Die Strahlung ist quantisiert wie später in Unterabschnitt 6.12 dargelegt. Die Fortpflanzung des Strahls ist geradlinig und begrenzt auf einen kreisförmigen Querschnitt von definiertem Durchmesser. Induktionsgesetz und Durchflutungssatz gelten nur innerhalb des Strahls! Die Projektion des Kreismitelpunktes in Fortpflanzungsrichtung ist die Achse der rotationssymmetrischen Bewegungsabläufe der Feinmasse im Strahl.

Die innere Dynamik des Strahls basiert auf der Überlagerung

- einer gleichförmigen Strömung in Ausbreitungsrichtung,
 - einer gleichförmigen Rotation auf konzentrischen Kreisen mit einheitlicher Umfangsgeschwindigkeit und demgemäß räumlich variabler Winkelgeschwindigkeit, sowie schließlich
 - einer zyklischen Schwingung in Ausbreitungsrichtung und senkrecht dazu, letztere unterschieden nach einer Schwingung in Richtung des Umfangs und einer solchen in radialer Richtung.
2. „Normaler“ elektrischer Strom hat seine Ursache in bewegten Ladungsträgern, also typischerweise Elektronen im Leitungsband. Deren Ladungs-Feinmasse breitet sich, wie später dargelegt wird, kugelförmig im Raum aus. Bei der perlschnurartigen „Aufreihung“ der Elektronen im üblichen gestreckten Leiter resultiert aus der Überlagerung der Übergang von der kugelförmigen zur zylinderförmigen Ausbreitung. Ist auch der Elektronenfluss auf den Leiter konzentriert, die damit verbundene Feinmasse-Strömung greift aber gleichzeitig so weit in den umgebenden Raum aus, wie es den Gesetzen der Ausbreitung dieser Strömung entspricht. Dieser Ausbreitung ist eine hier nicht dargestellte endliche Grenze gesetzt, die freilich jenseits aller für die Praxis elektrotechnischer Anwendungen relevanten Erwägungen liegt. Deshalb sind Induktionsgesetz und Durchflutungssatz so gefasst, als gäbe es keine solche Grenze der Ausbreitung. Sie sind also streng genommen nur Näherungen für die realen physikalischen Gegebenheiten.

3. Die sich von schwingenden Ladungsträgern ablösenden schwingenden Feinmasse-Strömungen sind Funkwellen. Sie besitzen einerseits enge Verwandtschaft zum Licht, andererseits weisen sie spezifische Unterschiede auf im Hinblick auf Zentrierung und Rotation der strömenden Feinmasse. Dies wird im Rahmen dieses Aufsatzes nicht näher untersucht. Es wird jedoch auf die den Feldgleichungen und dem HERTZschen Dipol gewidmeten Ausführungen im **Anhang** hingewiesen. An dieser Stelle wird zu diesem Thema nur insoweit eine Aussage gemacht, dass natürlich auch Funkwellen den Gesetzmäßigkeiten der Quantisierung unterworfen sind und Energietransport in Fortpflanzungsrichtung sich nicht in einer reinen transversalen Schwingung erschöpfen kann, sondern eine Feinmasse-Strömung in Richtung der Ausbreitung zur Voraussetzung hat.

Diese Behauptung provoziert unmittelbar die Frage, warum dann nicht auch im Innen- und Außenleiter einer Koaxialleitung eine Komponente gleichförmiger Feinmasse-Strömung und Rotation, also schlicht: eines Gleichstroms vorhanden ist?

Dieser Gleichstrom existiert **nicht**, und trotzdem gibt es Feinmasse-Transport in Ausbreitungsrichtung. Für das Verständnis müssen wir uns die definierende Beziehung (6.17) für den Strom vor Augen halten. Danach ist ein Strom mit der Stromstärke von z.B. 1 Ampère offensichtlich nicht eindeutig definiert, denn es gibt unendlich viele Kombinationen der Faktoren

$$\sqrt{\frac{m}{l}} \quad \text{und} \quad v,$$

deren Produkt einen Strom von 1 Ampère ergibt. Der Feinmasse-Transport besteht nun darin, dass der ohmsche Spannungsabfall gleichbedeutend ist mit einem „Abfall“ oder besser: einer Verminderung des Faktors

$$\sqrt{\frac{m}{l}}$$

also des Wertes, der für die Dichte der strömenden Feinmasse steht. D.h., an jede Volumeneinheit der Materie des durchströmten Widerstandes wird Feinmasse im Sinne eines Verlustes abgegeben. Die übliche Bezeichnung „ohmsche Verluste“ ist also sehr treffsicher gewählt.

Mit dem reziproken Wert der Verminderung des Faktors

$$\sqrt{\frac{m}{l}}$$

steigert sich aber gleichzeitig die Geschwindigkeit v . Der Elektroimpuls

$$I = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$$

mit der Stromstärke 1 Ampère (im Beispiel) bleibt dagegen konstant. Diese indirekte Art des Feinmasse-Transports ist typisch für den Feinmasse-Transport mit bewegten Ladungsträgern, bildlich gesprochen: Transport mit „Gefäßen“ statt Feinmasse „pur“ wie im Lichtstrahl oder den Funkwellen. Im übrigen kann der Bezeichnung „Ladung“ ebenfalls attestiert werden, dass sie in einem erweiterten Sinne treffend und plastisch gewählt ist.

In Abschnitt 8 sind Einzelheiten zu diesem elektrischen Phänomen dargestellt. An dieser Stelle wird nur insoweit der Bogen zum Ausgangspunkt der Betrachtung, nämlich den Funkwellen geschlagen, als darauf hingewiesen wird, dass ein Wesensmerkmal einer strahlenden Sendeantenne ihre ohmschen „Verluste“ sind. Unabhängig davon, dass diese „Verluste“ nicht ein Nebeneffekt sondern das Ziel dieser technischen Einrichtung sind, können diese „Verluste“ offensichtlich nicht allein mit verlustlosen Schwingungen durch den freien Raum zur Empfangsantenne übertragen werden. Eine Komponente nicht schwingender Feinmasse-Strömung als Schwingungsträger ist obligatorisch.

Es ist auffallend, dass bereits im mathematischen Formalismus der MAXWELLSchen Gleichungen für die Freiraumstrahlung das typische Element des Rotierens angelegt ist, nämlich Rotation (rot) der magnetischen Feldstärke und Rotation der elektrischen Feldstärke. Dennoch werden die Lösungen der Gleichungen üblicherweise einseitig so interpretiert, wie wenn das Wesensmerkmal der Rotation in einer ausschließlich transversalen Schwingung untergegangen wäre. Der Grund ist wohl darin zu suchen, dass unzulässigerweise der Träger der Schwingung, also die (zeitlich) gleichförmige Strömung und die gleichförmige Rotation, aus der Betrachtung ausgeblendet werden. Auf dem Felde der Physik ist mathematischer Formalismus eben nur Mittel zum Zweck, das je nach Anwendung gegebenenfalls nur einen Teilaspekt darstellt, und nicht als „automatischer und umfassender Spender“ physikalischer Erkenntnisse betrachtet werden kann.

In den vorstehenden Ausführungen wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Gültigkeit von Induktionsgesetz und Durchflutungssatz Restriktionen unterliegt. So ist es angezeigt, einige grundsätzliche, resümierende Ausführungen hierzu zu machen. Ganz allgemein und fast banal kann festgestellt werden, dass nur in dem räumlichen Bereich, in dem Feinmasse tatsächlich strömt, die genannten Gesetze relevant sind. Aber Feinmasse hat nicht nur einen determinierten (wenn auch sehr unterschiedlichen) Ausbreitungsbereich, sondern weist auch eine typische Rotation auf, die prinzipiell dem Links- oder Rechtsdrehsinn entsprechen kann. Im Eingriffsbereich zweier überlagerter Strömungen, von denen eine Links- und die andere Rechtsdrehsinn aufweist, ergibt sich eine gegenseitige Neutralisierung. Dabei wird nicht etwa die betroffene Feinmasse „beseitigt“. Vielmehr bleibt sie existent, aber das Wesensmerkmal elektrischer Wirkung ist nun nur noch latent vorhanden, indem zwei gegenläufige Wellen sich zu einer stehenden Welle neutralisieren. Damit kommt wörtlich und tatsächlich die Rotation zum Stehen. In dem resultierenden radialen Pulsieren steckt die „gebändigte“ elektrische Wirkung. Der Bereich außerhalb einer stromdurchflossenen Koaxialleitung ist das typische Beispiel für diese Art der Neutralisierung. Diese Neutralisierung ist aber, wie bereits in Abschnitt 5, Punkt 5.4.2, ausgeführt, partiell auch innerhalb des Koaxialleiters wirksam und zwar gleichermaßen bei Innen- wie Außenleiter. Sie äußert sich in der gegenseitigen Kompensation der einander entgegengesetzten magnetischen Feldstärken, wobei diese Feldstärken nichts anderes sind als das Resultat zirkulierender Feinmasse. Im Leiter wird nämlich die zur räumlich variablen Komponente der Stromdichte gehörige magnetische Feldstärke durch die magnetische Feldstärke kompensiert, die zur konstanten Komponente der Stromdichte gehört. Durch diese Kompensation oder Neutralisierung wird Feinmasse elektrisch neutralisiert (also nicht etwa beseitigt). Der überschießende „Rest“ an magnetischer Feldstärke (zugehörig zur konstanten Komponente der Stromdichte) findet keinen „Partner“, auf den er neutralisierend einwirken könnte. Für diesen „Rest“ an magnetischer Feldstärke wirkt der Leiter wie ein materieloser Raum. Das Induktionsgesetz ist für diesen „Rest“ irrelevant, denn es fehlt die „fremde“ Feinmasse, auf die durch die induzierte Spannung Einfluss genommen werden könnte. Für diesen „Rest“ an magnetischer Feldstärke und strömender Feinmasse gilt das Gleichgewicht von angelegter Spannung und selbstinduktivem Spannungsabfall, der die Wirkung auf die „eigene“ Feinmasse darstellt. Mit dieser Differenzierung nach „fremder“ und „eigener“ Feinmasse-Strömung in ein und demselben Leiter wird der markanten Eigengesetzlichkeit der räumlich variablen Komponente der Stromdichte im Leiter Rechnung getragen. Auch der „Rest“ an magnetischer Feldstärke ist naturgemäß räumlicher Variation unterworfen. Dies zwingt zu dem Schluss, dass die an jeder Faser des Leiterquerschnitts in gleicher Höhe angelegte Spannung wie folgt wirkt:

- zur Überwindung des eigenen ohmschen Widerstandes,
- zur Kompensation der von Innen- und Außenleiter herrührenden variablen Komponenten der magnetischen Feldstärke, die sich ihrerseits jeweils aus ohmscher und induktiver

Komponente zusammensetzen, sowie

- für den „Rest“: zur Überwindung des selbstinduktiven Widerstandes. D.h., der Leiter wirkt in diesem Umfange wie materieloser Raum.

Der dem Zentrum nächste Punkt des Leiters weist die höchste selbstinduktive Wirkung auf und ist maßgebend für das effektive Verhältnis von selbstinduktivem Spannungsabfall und Strom als proportionale Größe zur Induktivität, die ihrerseits das Verhältnis (des höchsten Wertes) des magnetischen Flusses und des Stroms darstellt.

Umgekehrt folgt aus diesen Überlegungen, dass offensichtlich in der Umgebung eines (zunächst) elektrisch neutralen Leiters, auf den (dann) von außen eine induzierte Spannung einwirkt, immer bereits die neutralisierte Feinmasse unter den Gegebenheiten stehender Wellen vorhanden sein muss. Die in diesen stehenden Wellen, die auf die Wirkung sich neutralisierender Ladungsträger (Protonen und Elektronen) zurückgehen, angelegte elektrische Neutralität wird unter dem Einfluss induzierter Spannung aufgebrochen und in eine gerichtete Strömung überführt, deren Ausbildung dann natürlich auch von den Strömungswiderständen abhängt.

6.8 Dynamische Verhältnisse der Feinmasse im Lichtstrahl

Unter Berücksichtigung der für die Freiraumstrahlung maßgebenden Parameter von

$$\rho \rightarrow \frac{1}{\omega \epsilon_0}, \quad k_0 \rightarrow k = 1$$

ergibt sich aus (4.49) mit

$$\frac{\omega k_0 \mu_0}{\rho} = \frac{4\tau^2}{D_F^2}$$

in Übereinstimmung mit (6.52):

$$\frac{\omega}{c} = \frac{2\tau}{D_F}. \quad (6.55)$$

Mit diesen Vorgaben folgt aus (6.29) die Form:

$$\frac{d^2 J}{dr^2} + \frac{dJ}{dr} = -J \cdot \frac{\omega^2}{c^2} = -J \cdot \frac{4\tau^2}{D_F^2}; \quad (6.56)$$

beziehungsweise in normierter Form mit

$$J = J(z) \quad \text{und} \quad z = \frac{r}{D_F}$$

$$\frac{1}{4\tau^2} \cdot \frac{d^2 J}{dz^2} + \frac{1}{4\tau^2} \cdot \frac{dJ}{dz} = -J, \quad (6.57)$$

oder

$$J_R + J_U = -J. \quad (6.58)$$

Dabei ist J die Stromdichte in der Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls und J_R sowie J_U verlaufen in der Ebene senkrecht zu J , nämlich

$$J_R = \frac{1}{4\tau^2} \cdot \frac{d^2 J}{dz^2} \quad (6.59)$$

in radialer Richtung und

$$J_U = \frac{1}{4\tau^2} \cdot \frac{dJ}{dz} \quad (6.60)$$

entlang der Umfangslinie um den Mittelpunkt des Lichtstrahls. Aus (6.59) und (6.60) errechnet sich:

$$J_R = \frac{d}{dz}(J_U \cdot z) = \frac{d}{dr}(J_U \cdot r). \quad (6.61)$$

Für die Ableitung der Stromdichte aus der allgemeinen Beziehung für die Stromstärke nach (6.17):

$$I = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$$

mit der allgemeinen Definition der Massendichte

$$\frac{m}{l} = \frac{m(l)}{l}$$

gehen wir auf die Wellenlänge λ als spezielle Bezugsgröße über, entsprechend

$$\frac{m}{l} = \frac{m(l)}{l} = \frac{m(\lambda)}{\lambda}. \quad (6.62)$$

Dabei steht in der Kurzform

$$\frac{m}{\lambda}$$

m für $m(\lambda)$, also entsprechend

$$m = m(\lambda).$$

Bezieht man nun auf den differentiell kleinen Querschnitt dq den zugehörigen differentiell kleinen Strom, so ergibt sich für die Stromdichte die Beziehung

$$J = \frac{d\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)}{dq} \cdot v. \quad (6.63)$$

Für die Verteilung der Feinmasse im Lichtstrahl gilt nun aber das Bildungsgesetz:

$$m(r) = m_\lambda \cdot \frac{r^4}{D_F^4},$$

oder in der bekannten normierten Form mit

$$r = z \cdot D_F :$$

$$m(z) = m_\lambda \cdot z^4. \quad (6.64)$$

Dabei ist m_λ die mit dem PLANCKSchem Wirkungsquantum korrelierende kleinste Menge an Feinmasse in einer kompletten Schwingung der Wellenlänge λ , wie sie später unter Gleichung (6.132) noch dargestellt wird. Eine größere Massendichte lässt sich dabei unschwierig in der Form

$$\frac{n \cdot m_\lambda}{\lambda} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bilden, wobei die Quantisierung von Masse und Energie bereits an dieser Stelle (im Vorgriff) in Erscheinung tritt.

Die Gesamtmasse einer Schwingung ergibt sich aus (6.64) zu

$$m(z = 1) = m_\lambda.$$

Aus (6.64) lässt sich mit der abgekürzten Schreibweise

$$m(z) = m$$

für die zur Stromdichte gehörigen Dichte der Feinmasse ableiten:

$$\frac{dm}{dq} = \frac{dm}{2\pi z \cdot D_F \cdot dz \cdot D_F} = m_\lambda \cdot \frac{4z^3}{D_F^2} \cdot \frac{1}{2\pi z} = m_\lambda \cdot \frac{z^2}{D_F^2} \cdot \frac{2}{\pi z}. \quad (6.65)$$

Trennt man von der Stromdichte nach (6.63) die Geschwindigkeit ab, so lässt sich für die Restgröße ableiten:

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)}{dq} = \frac{d\left(\frac{m}{\lambda}\right)}{dq} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{m}{\lambda}}}.$$

Setzt man (6.64) und (6.65) ein, ergibt sich:

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)}{dq} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{m_\lambda}{\lambda} \cdot \frac{z^2}{D_F^2} \cdot \frac{2}{\pi}}{\sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot z^4}.$$

Nach Kürzen erhält man die Form:

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\right)}{dq} = \frac{\sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}}}{\pi D_F^2} = konst. \quad (6.66)$$

Die konstante, auf die Flächeneinheit bezogene Größe der Wurzel aus der Feinmasse pro Längeneinheit ist mit einer räumlich variablen und alternierenden Geschwindigkeit v verbunden, die vom Abstand

$$r = z \cdot D_F$$

zum Mittelpunkt des Lichtstrahls abhängt. Die räumlich variable und alternierende Geschwindigkeit ergibt sich aus der Tatsache, dass entsprechend dem Ersatzbild nach Abbildung 16 jede Leitung in Längsrichtung (Würfelfante) jeweils dem eigenen Würfel wie auch den beiden Nachbarwürfeln in Umfangs- und radialer Richtung zugehört. Durch diese innige Verkettung ist jede dieser Leitungen gleichzeitig Hin- und Rückleiter und weist eine resultierende Strömungsgeschwindigkeit

$$v < c$$

auf. Der Mittelpunkt des Lichtstrahls bildet die Ausnahme: Er kann als ausschließlicher Hinleiter betrachtet werden und außerdem reichen seine unmittelbaren Nachbarwürfel die Funktion des Rückleiters quasi an die nächstfolgenden Nachbarn weiter. Dies hat zur Folge, dass die Strömungsgeschwindigkeit im Mittelpunkt identisch mit der Lichtgeschwindigkeit

$$v = c$$

ist und in unmittelbarer Nachbarschaft erst allmählich auf Werte

$$v < c$$

abklingt. Oder anders ausgedrückt: Ausgehend vom Mittelpunkt entfaltet sich die Rückleiterfunktion in den verketteten Würfeln nach dem Ersatzbild erst allmählich und wird nach der aus (4.53) hervorgegangenen Funktion

$$v = c \cdot e^{g(z)} \quad (6.67)$$

erst in einem gewissen Abstand zunehmend deutlicher.

Die zur Stromdichte gehörige variable und alternierende Strömungsgeschwindigkeit v darf aber keinesfalls mit der räumlich konstanten Wellenausbreitungsgeschwindigkeit verwechselt werden, die ja identisch mit der Lichtgeschwindigkeit c ist und **nicht** alterniert. Die räumliche konstante Größe nach (6.66) ergibt mit (6.67) eingesetzt in (6.63):

$$J(z) = \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\pi D_F^2} \cdot c \cdot e^{g(z)}. \quad (6.68)$$

$J(z)$ ist eine Wechselgröße und daraus errechnet sich unter Verwendung von (4.62) durch Integration der Wechselstrom

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_0^z J(z) \cdot 2\pi z \cdot D_F \cdot dz \cdot D_F = \\ &= \int_0^z \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\pi D_F^2} \cdot c \cdot e^{g(z)} \cdot z \cdot 2\pi D_F^2 \cdot dz = \\ &= \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\pi D_F^2} \cdot c \cdot \frac{-\pi D_F^2}{2\tau^2} \cdot e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z = \\ &= \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot c \cdot \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{d}{dz} [g(z)] \cdot z}{-\gamma} \cdot \frac{\gamma}{2\tau^2}, \end{aligned}$$

und für den Gesamtstrom im Lichtstrahl bei

$$z = 1$$

in Übereinstimmung mit (4.91) und unter Bezugnahme auf (6.111) aus Unterabschnitt 6.11

$$J(z = 1) = \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot c \cdot k_v \quad (6.69)$$

mit

$$k_v = \frac{\gamma}{2\tau^2}. \quad (6.70)$$

In dem Faktor k_v kommt zum Ausdruck, in welchem Umfang die Wechselstromkomponente die gleichförmige Strömung moduliert, ihr also zusätzlich zur räumlichen Abgrenzung eine Struktur verleiht.

Energetisch existiert dabei ein Verhältnis von Wechselstromkomponente zu Gleichstromkomponente entsprechend

$$\frac{k_v}{\sqrt{2}}.$$

Wegen des neben der Geschwindigkeit für alle 3 Komponenten der Stromdichte nach (6.58) identischen Faktors nach (6.66) ergibt sich aus (6.58) unmittelbar die Beziehung

$$v_R + v_U = -v. \quad (6.71)$$

Außerdem gilt analog (6.61)

$$v_R = \frac{d}{dr}(v_U \cdot r). \quad (6.72)$$

v gilt für die Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls, v_R und v_U für die dazu senkrechte Ebene. Dabei steht wieder der Index R für die radiale Richtung und U für die Umfangsrichtung. Unter Einbeziehung der räumlich variablen Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_r = \frac{v_U}{r} \quad (6.73)$$

lassen sich folgende Beziehungen für die maßgebenden Beschleunigungen ableiten:

$$\frac{1}{2} \cdot \omega_r v_R + \frac{1}{2} \cdot \omega_r v_U = -\frac{1}{2} \cdot \omega_r v. \quad (6.74)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \omega_r v_R &= b_R, \\ \frac{1}{2} \cdot \omega_r v_U &= b_U, \\ \frac{1}{2} \cdot \omega_r v &= b \end{aligned}$$

erhalten wir die maßgebenden Werte der Beschleunigung, die nachfolgend noch erläutert werden, wie folgt:

$$b_R + b_U = -b. \quad (6.75)$$

Weiterhin lässt sich mit (6.73) und (6.72) schreiben:

$$\frac{1}{2} \cdot \omega_r v_U = \frac{v_U^2}{2r}, \quad (6.76)$$

$$v_R = \frac{d}{dr}(v_U \cdot r) = v_U + \frac{dv_U}{dr} \cdot r,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \omega_r v_R = \frac{v_U^2}{2r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dv_U}{dr} \cdot v_U,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \omega_r v_R = \frac{v_U^2}{2r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{v_U^2}{2} \right). \quad (6.77)$$

(6.76) und (6.77) eingesetzt in (6.75) ergibt:

$$\frac{v_U^2}{2r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{v_U^2}{2} \right) + \frac{v_U^2}{2r} = -b \quad (6.78)$$

$$\text{mit } b_R = \frac{v_U^2}{2r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{v_U^2}{2} \right) \quad (6.79)$$

$$\text{und } b_U = \frac{v_U^2}{2r}. \quad (6.80)$$

Zu vorstehender Ableitung sind folgende grundlegende Anmerkungen zu machen:

Für Massenpunkte der Makrophysik kennen wir statische und dynamische Gleichgewichtszustände, wobei durch **vektorielle** Zusammenfassung der wirksamen Kräfte die resultierende Kraft zu Null wird.

Für Feinmasse gibt es kein statisches Gleichgewicht. Das dynamische Gleichgewicht erfordert dagegen, dass die **algebraische** Summe der Kräfte aller 3 Richtungen des Raumes zu Null wird.

Aufgrund des prinzipiellen Unterschiedes im Wirkungsmechanismus löst bei einer Rotation eine differentielle Menge an Feinmasse nur die Hälfte der zentrifugalen Kraft aus wie sie für einen Massenpunkt gilt. Dies steht in Übereinstimmung mit den Gesetzmäßigkeiten für die COULOMB-Wechselwirkungskraft, die später in Unterabschnitt 7.4 dargestellt sind. Gleiches gilt für die Ableitung zur Wirkung der Gravitation auf Licht gemäß Unterabschnitt 9.8.3 .

Mit Beziehung (6.78) - (6.80) sind wir zum innersten Kern der Dynamik schwingender Feinmasse im Lichtstrahl vorgedrungen und grundsätzliche Interpretation ist angezeigt:

1. An strömender Feinmasse kann im Gegensatz zu Massenpunkten niemals eine punktförmige Kraft wirken. Zwingende Folge ist, dass - ebenfalls im Gegensatz zu Massenpunkten - vektorielle Zusammenfassung gleichzeitig wirkender Kräfte ausgeschlossen werden muss.
2. Im Gegensatz zu Massenpunkten mit der für Materie typischen konzentrierten und „quasi gefangenen“ Feinmasse, ist „frei“ strömende Feinmasse immer nur als „aufgelöster“ Punkt, oder Strich zu begreifen. Dies entspricht dem Sprung in die nächste Dimension und kommt in der Definition von Strom und Spannung durch den prägnanten Faktor mit der Wurzel aus der längenbezogenen Masse

$$\sqrt{\frac{m}{l}}$$

statt der Masse

$$m$$

für einen Massenpunkt zum Ausdruck.

Denken wir uns also eine (konzentrierte) Masse

$$m$$

über die Länge

$$l$$

in Feinmasse aufgelöst, so bleibt sie zwar entsprechend

$$\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot l = m$$

prinzipiell erhalten und die klassischen Gesetze der Mechanik werden nicht etwa irrelevant. Strömende Feinmasse folgt aber prioritär immer ihren ureigenen (in dieser Ausarbeitung dargestellten) Gesetzen, wenngleich darin die Gesetze der klassischen Mechanik immer wieder aufscheinen.

3. Die an und in Feinmasse wirkenden Kräfte breiten sich nach den 3 Dimensionen des Raumes aus. Das dynamische Gleichgewicht der Feinmasse in der Raumeinheit ist algebraischer Natur (siehe Gleichung (6.75)) und stellt den Urgrund aller Wirkungen in der Natur dar, gleichgültig ob elektrischer, mechanischer oder chemischer Art und einschließlich der Gravitation.
4. Feinmasse ist das exklusive Medium für alle Wirkungen in der materiellen Welt.

Nach diesen grundsätzlichen Feststellungen sind noch folgende spezifische Interpretationen und Erläuterungen zu geben:

1. Gleichung (6.71) in Verbindung mit (6.66) lässt erkennen, dass es sich hierbei um das Analogon zum 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz handelt, angewandt auf die differentiell kleine Raumeinheit und die drei Dimensionen des Raumes.

2. Einem Lichtstrahl kommt generell eine diskrete Kreisfrequenz ω zu, die sich sowohl zeitlich wie räumlich interpretieren lässt. Dass die in (6.73) eingeführte Größe der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_r = \frac{v_U}{r}$$

räumlich variiert, spiegelt die innere Dynamik des Lichtstrahls wider, der nicht etwa wie ein homogener Zylinder monoton rotiert, sondern einen periodischen Ablauf ausgeprägter innerer Strömungen aufweist, wie später noch näher dargestellt wird.

3. In Gleichung (6.79) kommt im ersten Teilglied der Radialbeschleunigung b_R unmittelbar die zentrifugale Beschleunigung zum Ausdruck, aber nur mit dem halben Betrag im Vergleich zur klassischen Mechanik. Ebenfalls von deren Gesetzen abweichend, teilt sich diese Beschleunigung nach den Gesetzmäßigkeiten der Feinmasse in Form der Beschleunigung b_U auch der dazu senkrechten Richtung entlang des Umfanges mit (siehe Gleichung (6.80)). Das zweite Teilglied von b_R entspricht dem Verlust an kinetischer Energie beim Fortschreiten in radialer Richtung, abgebildet durch den Differentialquotienten und wiederum nur die Hälfte dessen, was sich nach der klassischen Mechanik ergäbe. Dass dieses zweite Glied immer nur negative Werte aufweist, sei im Vorgriff auf die Kurvendiskussion erwähnt.
4. In Richtung der Translation wird die (algebraische) Summe von Umfangs- und Radialkomponente der Beschleunigung wirksam. In dem negativen Vorzeichen der Beschleunigung b (siehe Gleichung (6.78)) manifestiert sich das dynamische Gleichgewicht: Die resultierende Beschleunigung wird immer zu Null!

Nach diesen mehr speziellen Ausführungen kommen wir zu der Schlussfolgerung allgemeiner und prinzipieller Art:

Im inneren Wirkungsmechanismus der materiellen Welt existiert nach den bisherigen Betrachtungen keine „echte“ kohäsive Kraft. Der innere Zusammenhalt der Feinmasse ist in Tatsache allein die Konsequenz aus dem dynamischen Gleichgewicht der Feinmasse. Dies gilt universell, also nicht nur im Lichtstrahl, sondern auch in Materie und - wie noch zu zeigen sein wird - gleichermaßen für die Wirkungen elektrischer Ladung. Dagegen wird die Wirkung der Gravitation später getrennt zu betrachten sein.

Bei Annäherung an den Mittelpunkt des Lichtstrahls, also

$$\begin{array}{lll} \text{für} & r \rightarrow 0 & \\ \text{weisen} & \omega_r & \text{nach (6.73)} \\ \text{sowie} & b_R = b_U & \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{v_U^2}{2} \right) \rightarrow 0 \right] \end{array}$$

nach (6.79) und (6.80) eine Singularität auf! Sie tendieren zu unendlich großen Werten. Die Beschleunigung wechselt zusätzlich abhängig von r das Vorzeichen.

Wir dürfen dabei aber nicht vergessen, dass die von diesen nach unendlich tendierenden Werten betroffene Menge an Feinmasse ihrerseits im Bereich des Mittelpunkts nach Null tendiert. Der maßgebende Elektroimpuls bleibt aber eine endliche Größe.

Gleichwohl erkennen wir eine Tendenz der Feinmasse, auf engstem Raum extreme Werte der Beschleunigung anzunehmen und wir werden an die Eigenschaften der sogenannten „Schwarzen Löcher“ erinnert. Es könnte also durchaus sein, dass auf engstem Raum, also z.B. für einen Anteil von 10^{-40} des Radius' des Lichtstrahls auch die physikalischen Gesetzmäßigkeiten von dem abweichen, was in dem übrigen, weit überwiegenden Teil des Lichtstrahls gilt.

Bevor wir in die Kurvendiskussion für die Größen

$$\begin{aligned} J, \quad J_R \quad \text{und} \quad J_U & \quad \text{nach (6.58),} \\ v, \quad v_R \quad \text{und} \quad v_U & \quad \text{nach (6.71) sowie} \\ b, \quad b_R \quad \text{und} \quad b_U & \quad \text{nach (6.75)} \end{aligned}$$

eintreten, wobei für die Werte von Stromdichte und Geschwindigkeit bei normierter Darstellung jeweils identische Kurvenverläufe vorliegen, sei noch eine ergänzende Begründung für diese Identität vorausgeschickt. Bezogen auf einen feststehenden Querschnitt, der von der Feinmasse-Strömung mit der Geschwindigkeit

$$v$$

und der Massendichte

$$m_v = \frac{dm}{dl}$$

durchströmt wird, ist unabhängig von der Geschwindigkeit

$$v = \frac{dl}{dt}$$

die Massendichte

$$m_v = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{dt \cdot v} = \text{konst.} \quad (6.81)$$

ein konstanter Wert, weil Proportionalität zwischen den Größen

$$\frac{dm}{dl}$$

und

$$v$$

besteht. Deshalb kann, wie für (6.71) bereits erläutert, der für alle 3 Komponenten der Stromdichte nach (6.58) identische Faktor nach (6.66) in (6.58) durch Kürzen in der Gleichung beseitigt werden und man erhält unmittelbar Beziehung (6.71) für die korrespondierenden Geschwindigkeiten. Dass darüber hinaus natürlich Identität von Stromdichte und flächenbezogenem Elektroimpuls besteht, sei der Vollständigkeit halber nochmals erwähnt. Bei der gleichmäßigen Fortpflanzung des Lichtstrahls mit - in Gesamtheit gesehen - einheitlicher Lichtgeschwindigkeit unterliegt die interne Geschwindigkeit in Längsrichtung einer sinusförmigen Modulation, während nach Beziehung (6.66) die Massendichte konstant ist. Die Amplitude der Modulation ist ortsabhängig und variiert zwischen Lichtgeschwindigkeit und Geschwindigkeit $\mathbf{0}$. Die Feinmasse nimmt also intern Geschwindigkeitswerte an, die um die Lichtgeschwindigkeit pendeln und im Extremfall, nämlich im Zentrum des Lichtstrahls, von der Geschwindigkeit $\mathbf{0}$ bis zur doppelten Lichtgeschwindigkeit reichen. Dies ist kein Widerspruch, sondern zwingende Begleiterscheinung von wellenförmig mit Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitender Masse beziehungsweise Energie.

Analog rotiert die Feinmasse unbeschadet ihrer inneren Dynamik, die in einer ortsabhängig variablen Geschwindigkeit zum Ausdruck kommt, als Gesamtheit mit einer Schicht für Schicht gleichbleibenden Geschwindigkeit und der entsprechenden variablen Winkelgeschwindigkeit. Für die Umfangsgeschwindigkeit gilt dabei die vorstehende Aussage der sinusförmigen Modulation in analoger Weise. Eine Umkehr der Drehrichtung findet nicht statt!

—

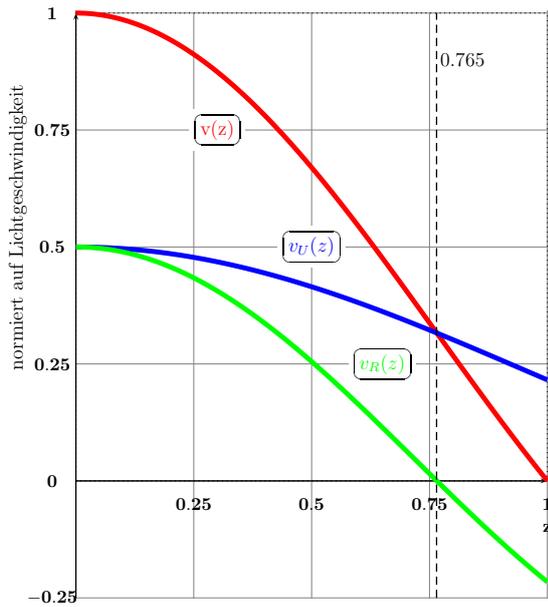


Abbildung 18: Geschwindigkeit Feinmasse

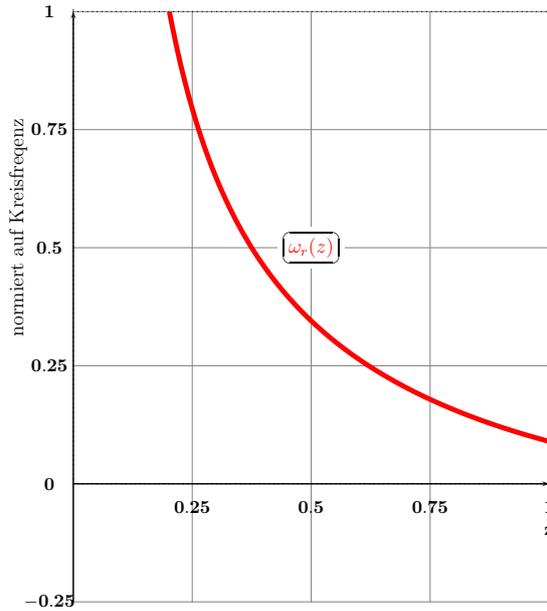


Abbildung 19: Winkelgeschwindigkeit

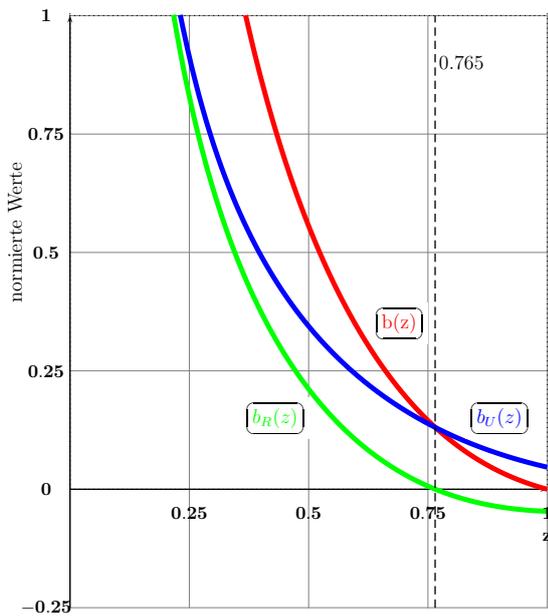


Abbildung 20: Beschleunigung

In den Abbildungen 18 bis 20 sind die räumlichen Abhängigkeiten der dynamischen Größen dargestellt, nämlich

- Abbildung 18: Geschwindigkeit v , v_U und v_R ,
- Abbildung 19: Winkelgeschwindigkeit ω_r ,
- Abbildung 20: Beschleunigungen b , b_U und b_R .

Die Kurvenverläufe in Abbildung 18 gelten gleichzeitig für die Stromdichten

$$J, J_U \text{ und } J_R.$$

In den Abbildungen 18 bis 20 gilt für die Abszisse die Normierung auf den Radius des Lichtstrahls, der mit der Eindringtiefe D_F identisch ist. Für die Ordinate gelten folgende Normierungen:

- Stromdichte: auf deren Maximalwert J_0 ,
- Geschwindigkeit: auf die Lichtgeschwindigkeit c ,
- Winkelgeschwindigkeit: auf die elektrische Kreisfrequenz ω ,
- Beschleunigung: auf $b_D = \frac{c^2}{2D_F} = \frac{\omega \cdot c}{4\tau}$.

Die Abbildungen 18 bis 20 zeigen, wie bereits gesagt, den **räumlichen** Aspekt der maßgebenden Werte von Stromdichte beziehungsweise flächenbezogenem Elektroimpuls. Dabei ist jedoch stets zu bedenken, dass alle dargestellten Größen zeitlich sinusförmig alternieren, wobei jeweils der Scheitelwert ortsbezogen dargestellt ist. Mit dem zeitlichen Alternieren wechselt deshalb auch das Vorzeichen des Elektroimpulses und damit der maßgebenden Geschwindigkeit. Dabei ist hinsichtlich der Umfangsgeschwindigkeit eine markante Besonderheit zu beachten. In Richtung der Translation ist eine eindeutige Bezugsrichtung vorgegeben und auch die Radialgeschwindigkeit lässt eine eindeutige Aussage zu, ob die Feinmasse vom Inneren des Lichtstrahls nach außen oder in umgekehrter Richtung strömt. Dagegen stehen die beiden Alternativen der Umfangsgeschwindigkeit, nämlich rechtsdrehend oder linksdrehend, prinzipiell gleichwertig nebeneinander.

Während also in radialer Richtung ein konsequentes zeitliches Alternieren der hin- und herflutenden Feinmasse vorliegt, variiert der Drehimpuls zwar örtlich und zeitlich, es kommt aber nicht zur Richtungsumkehr. Dieser gleichbleibende Drehsinn ist die Ursache, dass sich bei der Überlagerung von strömenden Feinmassen, die von als Gleichstrom fließenden Elektronen ausgehen, die alternierenden Radialkomponenten sich gegenseitig auslöschen, während für die Umfangskomponente lediglich ein Einebnen der zeitlichen Schwankungen bewirkt wird, wobei dieser Effekt nach dem Elektroimpulssatz mit der Komponente in Richtung der Translation korrespondiert. Durch die Überlagerung der Feinmasseströme wird der resultierende Feinmassestrom quasi gleichgerichtet und geglättet.

Die Abbildungen 18 und 20 stellen (auch) den räumlichen Verlauf der (zeitlichen) Scheitelwerte der Geschwindigkeit und in separaten Kurven die der Beschleunigung dar, wobei wir uns aber stets vor Augen halten müssen, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung zeitlich um $\pi/2$ phasenverschoben sind. Wir können 3 markante Punkte erkennen, nämlich für

$$\begin{aligned} z &= 0, \\ z &= z_T = \frac{2\tau}{\pi} = 0,765 \dots \quad \text{und} \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Es gilt für

$$\begin{aligned} z &= 0 : \\ v_U &= v_R, \\ b_U &= b_R. \end{aligned}$$

v_U und v_R beziehungsweise b_U und b_R sind gleich groß und haben ihren gemeinsamen Maximalwert, wobei dieser für die Werte der Beschleunigung, wie bereits ausgeführt, nach Unendlich tendiert. Wenn man bedenkt, dass im Mittelpunkt für die radiale Strömung der kleinste Querschnitt zur Verfügung steht, ist dies einsichtig.

Weiterhin gilt für

$$\begin{aligned} 0 &< z < 1 : \\ v_U &> v_R, \\ b_U &> b_R. \end{aligned}$$

Wir definieren ausgehend von der radialen Richtung als Beschleunigung, wenn sie vom Zentrum des Lichtstrahls nach außen wirkt, und Verzögerung entgegengesetzt. Dann wirkt in radialer Richtung eine zentrifugale Beschleunigung, die in gleicher Höhe auch in Richtung des Umfangs wirksam wird. Das was resultierende Radial- und Umfangskomponente unterscheidet, ist die nur in radialer Richtung wirkende Verzögerung, die sich als Folge der Abnahme der kinetischen Energie beim Fortschreiten nach außen ergibt. Die algebraische

Summe der Beschleunigungen in Umfangs- und radialer Richtung wird durch eine korrespondierende Verzögerung in Längsrichtung im Gleichgewicht gehalten. Alle 3 Komponenten der Geschwindigkeit sowie der korrespondierenden Beschleunigungen nehmen fortschreitend nach außen ab.

Die Radialgeschwindigkeit erfährt bei

$$z = z_T$$

eine Richtungsumkehr und nimmt hinsichtlich ihres Absolutbetrages nach außen mit Werten von

$$z > z_T$$

wieder zu. Verantwortlich hierfür ist der Energieverlust entsprechend dem 2. Teilmittel in (6.79). Die zugehörige Verzögerung wirkt nun der weiter abnehmenden zentrifugalen Beschleunigung (1. Teilmittel in (6.79)) entgegen.

Der Punkt

$$z = z_T = \frac{2\tau}{\pi}$$

hat singuläre Bedeutung. Für diesen Punkt, dessen Berechnung streng genommen als Näherung (aber mit hoher Genauigkeit) zu betrachten ist, gilt:

$$\begin{aligned} v_R &= 0, \\ b_R &= 0. \end{aligned}$$

Bei der Interpretation tritt der grundlegende Unterschied zwischen klassischer Mechanik von Massepunkten und den Gesetzmäßigkeiten strömender Feinmasse in prägnanter Form in Erscheinung. Hinsichtlich der Radialkomponente wird die zentrifugale Beschleunigung durch die Verzögerung, die aus der Abnahme kinetischer Energie resultiert, im Gleichgewicht gehalten. Die radiale Geschwindigkeit nimmt den Wert 0 an. Gleichwohl bleibt diese zentrifugale Beschleunigung in Richtung des Umfangs wirksam und wird ihrerseits durch die Verzögerung in Richtung der Translation im Gleichgewicht gehalten.

Weiterhin gilt für den Bereich

$$\begin{aligned} z_T &< z < 1 : \\ v_r, b_R &\text{ negativ.} \end{aligned}$$

Hier kommt die zeitliche Gegenphasigkeit der radialen Bewegung der Feinmassen in den beiden durch z_T voneinander getrennten Teilbereichen zum Ausdruck. Gegenphasigkeit kann ja gleichermaßen räumlich wie zeitlich interpretiert werden.

Bei der Bewegung der Feinmasse in diesem Bereich steigert sich fortschreitend nach außen die Geschwindigkeit der Richtung Zentrum zurückflutenden Feinmasse. Dies hat zur Folge, dass fortschreitend schneller Feinmasse von der Peripherie abgezogen wird, bis der Nachschub am konkreten Umkehrpunkt mit

$$z = 1$$

abreißt. Für diesen Punkt gilt:

$$\begin{aligned} v_U + v_R &= 0, & v_U &= -v_R; \\ b_U + b_R &= 0, & b_U &= -b_R. \end{aligned}$$

Die mit diesem markanten Punkt verbundenen Gesetzmäßigkeiten werden später noch eine besondere Rolle spielen bei der Deutung des Phänomens elektrischer Ladung. Beziehen wir

den zeitlich sinusförmigen Verlauf aller beteiligten Größen in die Überlegungen mit ein, erkennen wir, dass an diesem Punkt ein dynamisches Gleichgewicht besonderer Art besteht, das als quasi statisch angesprochen werden kann. An diesem Punkt wird alle Feinmasse, die aus der kreisförmigen Umlaufbahn „abgezapft“ wird, komplett in die radiale Richtung umgeleitet und umgekehrt. Über einen vollen Schwingungszyklus ist dabei die Bilanz komplett ausgeglichen: Deshalb ergibt sich keine Stromdichte in Längsrichtung, wie es Wesensmerkmal „ruhender“ elektrischer Ladung ist. Elektrische Ladungen werden wir deshalb später als dynamisches Gleichgewicht in der differentiell kleinen Volumeneinheit erkennen, bei dem für die 3. Dimension im Raum keine Strömung der Feinmasse existiert. Sobald sich aber ein Ladungsträger bewegt, treten wieder alle 3 Komponenten des Elektroimpulses auf und die „normalen“ Gesetzmäßigkeiten des Elektromagnetismus sind „wieder in Kraft“. Nach dieser Vorschau auf das Phänomen „elektrische Ladung“ an Hand der Diskussion der Gesetzmäßigkeiten für den Punkt

$$z = 1$$

erweitern wir die dargelegten Gedanken auf den Gesamtbereich zwischen

$$z_T < z < 1,$$

wobei wiederum der zeitlich sinusförmige Verlauf die entscheidende Erklärungsbasis ist. Es ist zweckmäßig, jeweils die Feinmasse-Strömung in Richtung des Umfangs als Speicher aufzufassen, der periodisch von der Radialkomponente „angezapft“ und wieder „gefüllt“ wird. Mit Ausnahme des Punktes bei

$$z = 1$$

existiert jedoch bei diesem wechselseitigen Austausch ein Überschuss beziehungsweise Defizit. Überschuss beziehungsweise Defizit übertragen sich auf die 3. Komponente in Längsrichtung oder werden - mit anderen Worten - durch die Komponente in Längsrichtung ausgeglichen.

Die Bewegungen in der Feinmasse sind also zusammenfassend als zyklische Abfolge von Hoch- und Tiefdruckgebieten aufzufassen, die eine Ausgleichsbewegung in Gang setzen, der sich die Trägheit der Masse entgegenstellt. Ist gegen diesen Widerstand die Ausgleichsbewegung auf ihrem Höhepunkt, schießt sie unter der jetzt umgekehrt wirkenden Trägheit „quasi über das Ziel“ hinaus und schafft ein erneutes Ungleichgewicht, das in einer permanenten Abfolge den beschriebenen Prozess in Gang hält.

In Abbildung 21 sind in schematischer Form Hochdruck- und Tiefdruckgebiete der Feinmasse dargestellt. Dabei lässt sich erkennen, dass räumliche und zeitliche Phasenverschiebung von Geschwindigkeit und Beschleunigung um $\pi/2$ die beiden gleichwertigen Aspekte ein und derselben physikalischen Gegebenheit sind. In weiterer Konsequenz ist die zeitliche Kreisfrequenz identisch mit der räumlichen Kreisfrequenz der umlaufenden Hochdruck- und Tief-

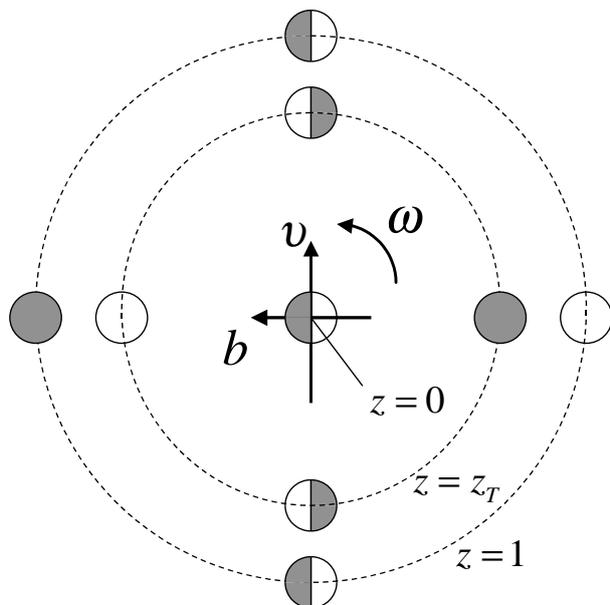


Abbildung 21: Periodische Feinmasse-Strömung

druckgebiete. Die dargestellten Pfeile für b und v entsprechen der Momentaufnahme des Maximums im Zentrum.

Als Bezugsgröße für die Winkelgeschwindigkeit ω ist dabei der Radius des Lichtstrahls D_F mit

$$z = 1$$

gewählt. Aus (6.55) ergibt sich dabei, multipliziert mit $\frac{c^2}{4\tau}$

$$b_D = \frac{c^2}{2D_F} = \frac{\omega \cdot c}{4\tau} \quad (6.82)$$

als maßgebende Beschleunigung der gleichförmigen Rotation, die mit der gleichförmigen Fortpflanzung mit Lichtgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung korreliert. Auf die Analogie von (6.80) zu (6.82) sei hingewiesen.

Die komplizierte Schwingungscharakteristik, bei der in radialer Richtung der Strömungsquerschnitt mit dem Radius zunimmt und das Trägheitsmoment der rotierenden Feinmasse mit dem Quadrat des Radius, lässt auf den ersten Blick vermuten, dass der sinusförmige Verlauf stark verzerrt sein könnte. Tatsächlich zeigt sich aber bei näherer Untersuchung, dass für die Grundbeziehung nach (4.63)

$$\frac{J}{J_0} = e^{g(z)}$$

folgende sehr gute Näherungsfunktion existiert, in der der sinusförmige Charakter unmittelbar zum Ausdruck kommt:

$$\frac{J}{J_0} = e^{g(z)} \approx u \cdot \cos(bz) + a, \quad (6.83)$$

$$\frac{J_U}{J_0} = \frac{1}{4\tau^2 \cdot z} \cdot \frac{di}{dz} \cdot \frac{1}{J_0} = \frac{\frac{d}{dz} [e^{g(z)}]}{4\tau^2 \cdot z} \approx -\frac{ub}{4\tau^2 \cdot z} \cdot \sin(bz), \quad (6.84)$$

$$\frac{J_R}{J_0} = \frac{1}{4\tau^2} \cdot \frac{d^2i}{dz^2} \cdot \frac{1}{J_0} = \frac{\frac{d^2}{dz^2} [e^{g(z)}]}{4\tau^2} \approx -\frac{ub^2}{4\tau^2} \cdot \cos(bz) \quad (6.85)$$

mit

$$\lambda_{R'} = \frac{8\tau}{\pi} = 3,06 \dots, \quad \frac{\lambda_{R'}}{4} = \frac{2\tau}{\pi} = 0,765 \dots; \quad (6.86)$$

$$u = \frac{(\lambda_{R'})^4}{128} = \frac{32\tau^4}{\pi^4} = 0,686 \dots; \quad (6.87)$$

$$a = 1 - u = 0,313 \dots; \quad (6.88)$$

$$b = \frac{2\pi}{\lambda_{R'}} = \frac{\pi^2}{4\tau} = 2,052 \dots \quad (6.89)$$

Somit ist

$$\frac{ub^2}{4\tau^2} = \frac{1}{2},$$

und eingesetzt in (6.83) - (6.85) ergibt sich:

$$\frac{J}{J_0} \approx u \cdot \cos(bz) + a, \quad (6.90)$$

$$\frac{J_U}{J_0} \approx -\frac{\sin(bz)}{2bz}, \quad (6.91)$$

$$\frac{J_R}{J_0} \approx \frac{\cos(bz)}{2}. \quad (6.92)$$

In Anlehnung an (6.58) ergibt sich daraus die Form:

$$\frac{\cos(bz)}{2} + \frac{\sin(bz)}{2bz} \approx u \cdot \cos(bz) + a. \quad (6.93)$$

Im gesamten relevanten Bereich ist die absolute Abweichung aller Glieder dieser Näherungsbeziehung unter dem Wert von ca. **0,004**.

Gleichung (6.93) ist nur auf den räumlichen Aspekt in radialer Richtung abgestellt. Bei Berücksichtigung der Lösung der MAXWELLSchen Leitungsgleichung und der räumlichen Drehung (in der Ebene senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung) ergibt sich folgende zusammenfassende Kombination:

$$\begin{aligned} \frac{J}{J_0} &= [u \cdot \cos(bz) + a] \cdot \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U) \\ &= \frac{u}{2} \cdot [\sin(\omega t - \beta l - \varphi_U - bz) + \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U + bz)] \\ &\quad + a \cdot \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U), \end{aligned} \quad (6.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{J_U}{J_0} &= - \left[\frac{2u-1}{2} \cdot \cos(bz) + a \right] \cdot \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U) \\ &= - \frac{2u-1}{4} \cdot [\sin(\omega t - \beta l - \varphi_U - bz) + \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U + bz)] \\ &\quad - a \cdot \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U), \end{aligned} \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{J_R}{J_0} &= - \frac{\cos(bz)}{2} \cdot \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U) \\ &= - \frac{1}{4} \cdot [\sin(\omega t - \beta l - \varphi_U - bz) + \sin(\omega t - \beta l - \varphi_U + bz)]. \end{aligned} \quad (6.96)$$

In (6.95) ist die Funktion nach (6.91) nach Maßgabe der Beziehung (6.93) substituiert. Mit

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f &= c, & f &= \frac{c}{\lambda}, \\ \omega &= \frac{2\pi c}{\lambda}, & \frac{\omega}{c} &= \frac{2\pi}{\lambda} = \beta \end{aligned}$$

ergibt sich für das Argument der Sinusfunktion:

$$\varphi = \omega t - \beta l - \varphi_U \pm bz = \omega \left(t - \frac{l}{c} \right) - \varphi_U \pm bz;$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (t \cdot c - l) - \varphi_U \pm \frac{2\pi}{\lambda_R'} \cdot z. \quad (6.97)$$

Dabei ist mit (6.86) und (6.89)

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\pi}{\lambda_R'} = \frac{\pi^2}{4\tau}, \\ \lambda_R' &= \frac{\lambda_R}{D_F} = \frac{2\pi}{b} = \frac{8\tau}{\pi}. \end{aligned} \quad (6.98)$$

λ_R ist die radiale Wellenlänge und λ_R' der zugehörige normierte Wert. Entsprechend (6.53) gilt:

$$\lambda = \frac{\pi}{\tau} \cdot D_F.$$

Daraus ergibt sich ein Verhältnis von radialer Wellenlänge λ_R zu longitudinaler Wellenlänge λ von

$$\frac{\lambda_R}{\lambda} = \frac{\frac{8\tau}{\pi}}{\frac{\pi}{\tau}} = \frac{8\tau^2}{\pi^2} = 1,17 \dots \quad (6.99)$$

In Gleichung (6.97) für das Argument der Sinusfunktion sind neben der Zeit die kompletten Raumkoordinaten enthalten, und zwar senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung in polarer Darstellung. Der Winkel φ_U ist der Anfangswert beim Umlauf um den Mittelpunkt und im einfachsten Fall mit $\varphi_U = 0$ gewählt.

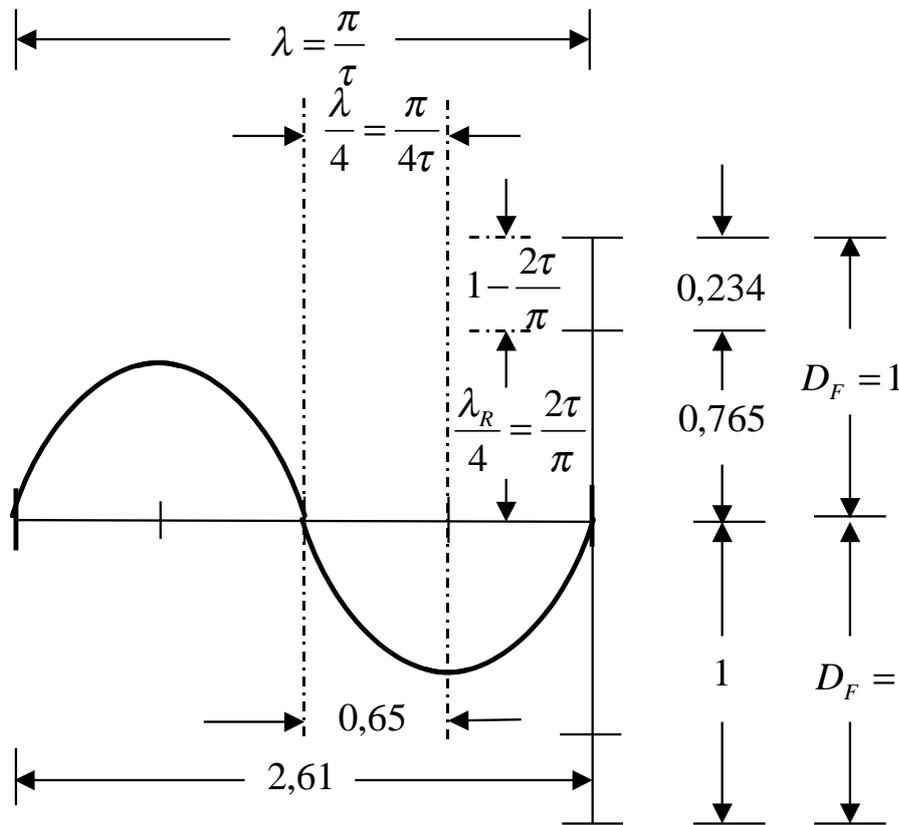


Abbildung 22: Geometrie des Lichtstrahls

Der Durchmesser des Lichtstrahls sowie die Wellenlänge in Längs- und Querrichtung sind in ihren Proportionen in Abbildung 22 dargestellt.

Dabei ist hinsichtlich der räumlichen Drehung der Zusammenhang mit der schematischen Darstellung nach Abbildung 21 zu beachten.

Am Schluss dieses Unterabschnitts sollen noch auf der Basis der der Ableitung von (6.55) vorausgeschickten Annahmen die abhängigen Größen zu der Stromdichte

im Lichtstrahl:

$$J(r) = J_0 \cdot e^{f(r)} = J(z) = J_0 \cdot e^{g(z)}$$

angegeben werden. Sie sind ausgehend von (4.56) - (4.58):

$$H(r) = -\frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{dJ}{dr} = H(z) = -\frac{c}{2\tau\omega} \cdot \frac{dJ}{dz}, \quad (6.100)$$

$$\Phi'(r) = \mu_0 \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \cdot J(r) = \Phi'(z) = \mu_0 \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \cdot J(z), \quad (6.101)$$

$$I(r) = -2\pi r \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{dJ}{dr} = I(z) = -2\pi z \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{dJ}{dz}. \quad (6.102)$$

r ist der radiale Abstand vom Zentrum, z der zugehörige normierte Wert, und hinsichtlich J_0 wird auf Beziehung (6.68) verwiesen.

Bei dem Vergleich der Beziehungen, die

- allgemein für die Koaxialleitung abgeleitet wurden und
- speziell für den Lichtstrahl,

erkennen wir, dass ein Lichtstrahl wie ein Außenleiter zu betrachten ist, der keinen Innenleiter besitzt. Ein Lichtstrahl bedarf ja aber auch keines Innenleiters, der für elektrische Entdämpfung auf induktivem Wege sorgt, weil wegen der ausschließlichen Beteiligung von induktiver und kapazitiver Komponente, die sich gegenseitig im Gleichgewicht halten, keine ohmschen Verluste auftreten.

6.9 Induktionsgesetz, Durchflutungssatz und Poyntingscher Vektor, Interpretation in Anlehnung an die Mechanik

Die nach Beziehung (6.55) maßgebenden Stromdichten in Längsrichtung J , in Richtung des Umfangs J_U und in radialer Richtung J_R lassen sich im Sinne einer Hierarchie interpretieren. J entspricht der Grundfunktion und kann als Ursache gesehen werden. Damit zwingend verbunden ist die 1. Ableitung (in radialer Richtung) von J , aus der, dividiert durch den Radius r , die Stromdichte J_U in Richtung des Umfangs gebildet wird. Aus der 2. Ableitung von J ergibt sich schließlich die Radialkomponente J_R . (Dass J für die Zwecke von 1. und 2. Ableitung und im Hinblick auf die Richtigkeit der physikalischen Einheiten auf eine konstante Fläche bezogen wird, sei der Vollständigkeit halber und unter Hinweis auf Gleichung (6.55) ergänzend erwähnt.)

Die Stromdichte J_U in Umfangsrichtung entspricht einer Rotation der Feinmasse und ist nicht nur zwingende Begleiterscheinung der Translation der Feinmasse, sondern der Kern des (im Wortsinn) Mechanismus, mit dem Wirkung nach außen (Induktion) und innen (Selbstinduktion) entfaltet wird. Die Winkelgeschwindigkeit der Rotation variiert mit dem Abstand r zum Rotationszentrum. Für Wechselstrom besteht darüber hinaus der in Abbildung 20 dargestellte Zusammenhang mit der Kreisfrequenz ω . Diese Grundeigenschaft elektrischer Strömung ist bildlich am besten mit einem Spiralbohrer zu vergleichen, der sich durch das Medium bohrt. Die Stromdichte J_R (2. Ableitung von J) repräsentiert dagegen die mit der Umfangskomponente korrespondierende dritte Komponente, die das dynamische Gleichgewicht herstellt.

In Gleichung (6.58) ist - wie gesagt - J_U die mit der Umfangsgeschwindigkeit korrespondierende Komponente der Stromdichte.

J_U entspricht dem auf die Flächeneinheit q bezogenen Elektroimpuls

$$J_U = \frac{\sqrt{\frac{m}{l}}}{q} \cdot v_U.$$

Durch Integration der Werte des Elektroimpulses pro Flächeneinheit (Säulenbildung) zwischen den Radien D (= Eindringtiefe) und r , und zwar gewichtet mit dem Radius r , ergibt sich der resultierende radiale Elektroimpuls am Punkt r . Die Gewichtung ergibt sich daraus, dass die wirksame Durchsatzfläche jedes differentiellen Kreisrings in direkter Proportionalität zum Radius r steht.

Aus der nachfolgend dargestellten Integration erkennen wir, dass sie zwar auf den Elektroimpuls (pro Flächeneinheit) in Richtung der Umfangsgeschwindigkeit abhebt, aber eine analoge Größe zum resultierenden Elektroimpuls (pro Flächeneinheit) ergibt, der senkrecht zur Umfangsgeschwindigkeit wirkt.

Ausgehend von (6.60) ergibt sich in normierter Form mit

$$D_F \rightarrow D, \quad z = \frac{r}{D} :$$

$$J_U = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{\frac{dJ}{dz}}{z \cdot D^2} = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{\frac{dJ}{dr}}{r} .$$

Hierbei ist nach (6.52):

$$\frac{c^2}{\omega^2} = \frac{D^2}{4\tau^2} = \frac{1}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} .$$

Die (gewichtete) Integration ergibt unter Verwendung des Ergebnisses nach (6.101) mit $J(z) = J$:

$$\int_D^r J_U \cdot r \cdot dr = \int_1^z J_U \cdot z \cdot dz \cdot D^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \int_1^z \frac{dJ}{z} \cdot z \cdot dz = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot J = \frac{\Phi'(z)}{\mu_0} ;$$

Neben der Variablen $z = \frac{r}{D}$ bestimmt die Eindringtiefe D mit $z = 1$ die Integrationsgrenzen, die in **der** Reihenfolge gewählt sind, dass ein positives Ergebnis erzielt wird. Somit ist:

$$\omega \mu_0 \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \int_1^z dJ = \frac{J}{\omega \epsilon_0} ,$$

und die induzierte elektrische Feldstärke $E_i(z) = E_i$ errechnet sich zu:

$$\omega \Phi'(z) = -E_i = \frac{J}{\omega \epsilon_0} .$$

In dieser Form spiegelt sich die völlige Analogie zu der Ausgangsbeziehung (4.3) beziehungsweise (4.4) wider bei Übergang von

$$\rho \rightarrow \frac{1}{\omega \epsilon_0} .$$

Dass zu diesem radial gerichteten Elektroimpuls (pro Flächeneinheit) wegen der Natur der Paarigkeit, der dazu senkrecht wirkende, gleich große Elektroimpuls gehört, vervollständigt das Bild der induktiven Wirkung. Vom Ursprung bis zum ausgelösten Effekt ergibt sich also eine doppelte Umlenkung der Wirkung um jeweils 90° .

Die Ableitung zum Induktionsgesetz ist auf die variable Komponente $J(z)$ in einem Lichtstrahl abgestellt, denn in ein und demselben „Leiter“ folgt, wie in Unterabschnitt 5.1 ausgeführt, nur die variable Komponente uneingeschränkt dem Induktionsgesetz. Hinsichtlich der räumlich variablen Komponente folgen zwar die elektromagnetischen Wirkungen im radialen Umfeld des stromdurchflossenen Leiters anderen Gesetzmäßigkeiten, die später in Unterabschnitt 7.4 beschrieben werden. Mit Blick auf die allgemeine Anwendung des Induktionsgesetzes erkennen wir aber bereits an dieser Stelle die Allgemeingültigkeit der (gewichteten) Integration, weil der Kern des Integrals

$$\int \frac{dJ}{z} \cdot z \cdot dz = J(z)$$

unabhängig vom Verlauf der Funktion $J(z)$ ist. Dabei markieren die (noch einzuführenden) Integrationsgrenzen z_1 und z_2 die Grenzen des z.B. mit einer Leiterschleife verketteten Magnetflusses.

In Vertiefung der Betrachtung, aber enger Anlehnung an vorstehende Ableitung ergibt sich der resultierende Strom der Umfangskomponente zwischen Punkt r und Eindringtiefe D , also außerhalb von r :

$$I_{Ua}(r) = \int_D^r J_U \cdot 2\pi r \cdot dr = 2\pi \cdot \int_1^z J_U \cdot z \cdot dz \cdot D^2 = \frac{2\pi\Phi'(z)}{\mu_0} = \frac{2\pi\Phi'(r)}{\mu_0}.$$

Dabei bezieht sich der Index U auf „Umfangskomponente“ und a auf „außen“. Der magnetische Fluss $\Phi'(z)$ bedarf keines Index, weil es sich im **Normalfall** um den äußeren, umschlingenden Fluss handelt.

Im Vorgriff auf Beziehung (6.120) gilt:

$$\mu_0 \rightarrow \mu_c = 1.$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} \Phi'(r) &= \frac{I_{Ua}(r)}{2\pi}; \\ \frac{\Phi'(r)}{I_{Ua}(r)} &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Diese feste Proportion hat zur Konsequenz, dass sie jeweils auch für die inneren Werte von $\Phi'_i(r)$ und $I_U(r)$ gelten muss, wobei jetzt dieser **innere** Magnetfluss den Index i erhält und für den inneren Strom, also die „normale“ Darstellung, der Index a (für **außen**) entfällt. Deshalb ist:

$$\frac{\Phi'_i(r)}{I_U(r)} = \frac{1}{2\pi}.$$

In Anlehnung an den Durchflutungssatz für den Strom I (in Ausbreitungsrichtung) kann für den resultierenden Strom der Umfangskomponente die magnetische Feldstärke $H_U(r)$ definiert werden zu:

$$H_U(r) = \frac{I_U(r)}{2\pi r} = \frac{\Phi'_i(r)}{r}.$$

Die vorstehenden Ableitungen zur Induktion sollen noch durch folgende Interpretation ergänzt werden:

Das Auslösen eines Stromes in einem Leiter ist identisch mit dem Strömen von Feinmasse innerhalb des Leiters, aber insbesondere auch in seinem Umfeld, auf das die Strömung in Form der Induktion aktiv einwirkt. Die Integration überstreicht nun den gesamten Durchdringungsbereich mit der Feinmasse eines „fremden“ Leiters, der im Sinne der induktiven Beeinflussung als passiv anzusprechen ist. Durch die Gewichtung mit dem Radius r kommt dabei zum Ausdruck, dass jedes Raumelement einen Beitrag zur induktiven Wirkung leistet, der von seinem auf die Leitung bezogenen Hebelarm r abhängt.

Dass der passive Leiter bereits vor der induktiven Anregung durch den aktiven Leiter in seinem Umfeld Feinmasse besitzt, die aufgrund ihres elektrischen Gleichgewichtszustandes freilich nicht nach außen wirkt, sei der Vollständigkeit halber erwähnt.

Der Elektroimpuls und der auf die Längeneinheit bezogene magnetische Fluss sind äquivalente Größen. Induktion ist identisch mit der zeitlichen Änderung des Elektroimpulses und entspricht der Beschleunigung der Feinmasse. Der Kraftstoß von Körpern bedingt zwingend in jeder Phase des Prozesses eine Geschwindigkeitsänderung der beteiligten Körper. Im Gegensatz dazu ist die wechselseitige Kraftwirkung zweier Körper (im anschaulichsten Fall: elektrische Leiter), deren jeder von einem (konstanten) Strom durchflossen wird, abhängig vom Produkt der Elektroimpulse. Eine (im statistischen Mittel) ruhende Feinmasse (stromloser Zustand) erfährt bei der Durchdringung mit gleichförmig strömender Feinmasse (Umfeld

einer von Gleichstrom durchflossener Leitung) weder eine induktive noch eine Kraftwirkung, weil in jedem Raumelement sich weder der Elektroimpuls zeitlich ändert noch ein Produkt der Elektroimpulse existiert, das (im zeitlichen Mittel) von Null abweicht.

Die Darstellung der Induktion soll im folgenden noch bildhaft untermauert werden und der Vergleich mit den Verhältnissen bei Gleichstrom hergestellt werden.

Das mit einem Gleichstrom verbundene magnetische Gleichfeld lässt in einem parallelen Leiter keinen eigenständigen Strom entstehen, weil die obligatorisch hierzu erforderliche Rotation der Feinmasse links und rechts des gedachten Rotationszentrums des beeinflussten Leiters durch gleichgewichtige gegensinnige Elektroimpulse des Gleichfelds des beeinflussenden Leiters unterdrückt wird. Fließt dagegen in diesem beeinflussten, parallelen Leiter unter dem Einfluss einer Spannungsquelle ein eigenständiger Strom, äußert sich das Ungleichgewicht des resultierenden Elektroimpulses der Umfangskomponente (auf einer Seite des Rotationszentrums des beeinflussten Leiters unterstützend, auf der anderen Seite schwächend) durch eine auf den stromdurchflossenen Leiter im magnetischen Gleichfeld wirkende Kraft in radialer Richtung.

Bei einem magnetischen Wechselfeld, das im Umfeld eines von Wechselstrom durchflossenen Leiters existiert, variieren im Gegensatz zum Gleichfeld alle 3 Komponenten des Elektroimpulses. In einem parallelen Leiter vermag unter diesen Bedingungen die Variation der Längskomponente des Elektroimpulses (induzierte Spannung) einen Strom auszulösen, dessen Elektroimpuls in Umfangsrichtung zeitlich und räumlich variiert und auf das auslösende Wechselfeld im Sinne einer Kompensation zurückwirkt.

Wenn wir nochmals auf das anschauliche Bild des Spiralbohrers für die elektrische Strömung zurückkommen, so greift dessen Fördermechanismus nicht nur in die bewegte Feinmasse des „eigenen“ Stromes ein, sondern (bei entsprechender Überdeckung, die von der Eindringtiefe abhängt) auch in benachbarte „fremde“ Feinmasse, im einfachsten Fall, der eines parallelen Leiters. In dieser benachbarten Feinmasse wirken dann an jedem Ort dieselben bereits beschriebenen Elektroimpulse in allen 3 Richtungen.

Bei einem magnetischen Gleichfeld entartet die „Spirale“ und arbeitet wie ein „Schaufelbagger“, der „vorhandenes Material“, sofern es durch einheitliche Strömung eine Angriffsfläche bietet, in radialer Richtung fördert.

Der „Spiralbohrer“ wirkt in seinem „Bohrloch“ wie ein Fördermechanismus, ist aber natürlich nicht als starrer Körper aufzufassen. Er besteht ja aus rotierender Feinmasse, vermag also den Raum (auch materieverfüllten Raum) zu durchdringen und mit variabler, ortsabhängiger Intensität zu wirken.

Im Hinblick auf den Durchflutungssatz ist nach (6.100) die magnetische Feldstärke, deren Richtung mit der der Umfangsgeschwindigkeit übereinstimmt, wie folgt definiert:

$$H = -\frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{dJ}{dr}.$$

Unter Einbeziehung von (6.60) ergibt dies mit $H = H_v$ die Beziehung:

$$H = J_U \cdot r.$$

Aus dem Durchflutungssatz

$$H = \frac{\int_0^r J \cdot r \cdot dr}{r}$$

ergibt sich außerdem:

$$J_U = \frac{\int_0^r J \cdot r \cdot dr}{r^2}.$$

Weiterhin erhellt die mechanistische Betrachtungsweise in besonders anschaulicher Weise die dem POYNTINGSchen Vektor zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit. Einerseits wurde dargelegt, dass die zur Rotation der Feinmasse gehörige Zentrifugalkraft in radialer Richtung wirkt, also senkrecht zur elektrischen Feldstärke in Längsrichtung

$$E = \frac{J}{\omega \epsilon_0}$$

und ebenfalls senkrecht zur magnetischen Feldstärke

$$H = J_U \cdot r.$$

Andererseits gilt mit (6.100) und $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ sowie ohne Berücksichtigung des Vorzeichens von H :

$$\begin{aligned} E \cdot H &= \frac{J}{\omega \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{dJ}{dr} \\ &= E \cdot \frac{dE}{dr} \cdot \frac{1}{\omega \mu_0} \\ &= \frac{c^2}{\omega^2} \cdot E \cdot \frac{dE}{dr} \cdot \omega \epsilon_0 \\ &= \frac{c^2}{\omega^2} \cdot J \cdot \frac{dJ}{dr} \cdot \frac{1}{\omega \epsilon_0}. \end{aligned} \tag{6.103}$$

Der mechanische Hintergrund lässt sich dabei wie folgt beschreiben: Um aus der in Längsrichtung durch den Querschnitt Δq strömenden Energie

$$\frac{\Delta m}{2} \cdot v^2$$

die in radialer Richtung durch den Querschnitt $x \cdot \Delta q (x = \text{konst.})$ strömende Energie zu errechnen, bedarf es der (räumlichen) Ableitung in radialer Richtung:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\Delta m}{2} \cdot v^2 \right] = \Delta m \cdot v \cdot \frac{dv}{dr}.$$

Dabei entspricht unter Bezug auf die zu Δm gehörige Leiterlänge Δl

$$\frac{\Delta m}{\Delta l} \cdot v \cdot \frac{dv}{dr} = \left(\sqrt{\frac{\Delta m}{\Delta l}} \cdot v \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\Delta m}{\Delta l}} \cdot \frac{dv}{dr} \right) \tag{6.104}$$

dem Produkt des Elektroimpulses, wie er in der elektrischen Feldstärke enthalten ist, und dessen räumlicher Ableitung, wie sie in der magnetischen Feldstärke enthalten ist. Treten zu diesem Produkt noch die maßgebenden flächenbezogenen Faktoren hinzu, führt dies schließlich zu der in (6.103) dargestellten Form, deren mechanischer Hintergrund damit erklärt ist.

6.10 Materie, Masse, Energie und Kraft

Nach der Grundbeziehung (6.9)

$$E = m \cdot c^2$$

ist die Feinmasse der Träger der Energie. Diese Energie ist eine unverlierbare Eigenschaft: Es gilt das Gesetz von der Erhaltung der Energie. Energie heißt Bewegung der Masse. D. h., letztlich kann jede Form der Energie auf kinetische Energie zurückgeführt werden.

Masse, und damit Energie, kann in geschlossenen Bahnen zirkulieren. In dieser Form ist Masse und Energie in Materie beziehungsweise in ihren Bausteinen lokal gebunden. Das dynamische Gleichgewicht, mit dem sich ein Lichtstrahl im freien Raum autonom fortpflanzt, bedarf unter den Bedingungen einer gekrümmten, in sich geschlossenen Bahn einer entscheidenden Modifikation. Die permanente Ablenkung der primären Feinmasse-Strömung von der geradlinigen Fortpflanzung verlangt eine permanente Interaktion mit einer sekundären Feinmasse-Strömung. Die primäre Feinmasse-Strömung ist Quelle und Senke der Sekundärströmung. Die Sekundärströmung breitet sich nach noch darzustellenden Gesetzmäßigkeiten im Raum aus, bleibt aber im geschlossenen Kreislauf stets verkettet mit ihrer Primärströmung als Quelle und Senke. Die Sekundärströmung ist Ursache aller Interaktion zwischen Materiebausteinen. Werden Materiebausteine (typischer Fall: Elektronen) aufgrund ihrer Beweglichkeit unter dem Einfluss eines Elektroimpulses räumlich ausgerichtet, überlagern sich ihre Sekundärströmungen nicht nach dem Zufallsprinzip; Vielmehr kommt es zu einer einheitlichen Translation verbunden mit einer einheitlichen Rotation. Diese Verbundströmung dient als Medium, um zwischen Materiebausteinen (beziehungsweise von daraus gebildeten Kollektiven) sowohl Kräfte wie auch Energie, also Masse, auszutauschen. Die sekundäre Verbundströmung existiert nicht autonom (wie beim Lichtstrahl), sondern steht stets im Eingriff mit den primären Energieströmungen, also den Materiebausteinen. Als „Transmissionsriemen“ für Kraftwirkung und Energieaustausch nimmt die Sekundärströmung im Gegensatz zum „freien“ Lichtstrahl Geschwindigkeiten unterhalb der Lichtgeschwindigkeit an. Bildhaft gesprochen benötigt der Transmissionsriemen Schlupf, um Kraft übertragen zu können. Feinmasse strömt sowohl im freien wie im materieerfüllten Raum. Die elektrischen Eigenschaften des jeweiligen Mediums nehmen Einfluss auf den Leitungsmechanismus. Material hoher elektrischer Leitfähigkeit bietet einen entsprechend niedrigen Widerstand gegen den in Längsrichtung wirkenden Elektroimpuls. Trotzdem beschränkt sich bei diesen Leitern die Fortbewegung der Feinmasse keinesfalls ausschließlich auf das leitfähige Medium, sondern erstreckt sich unbeschadet des Kanalisierungseffekts im Leiter, auch auf das umgebende, nicht leitfähige Medium.

Kraft- und Energieübertragung erfolgt durch Elektroimpulse, die am Beispiel des elektrischen Leiters untersucht werden. An jedem Punkt einer Feinmasse-Strömung wirkt ein Paar zusammengehöriger, gleich großer Elektroimpulse, der eine in Richtung der Fortpflanzung, der andere senkrecht dazu. Der Elektroimpuls senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung zerfällt bezogen auf das Rotationszentrum der Feinmasse-Strömung in eine Umfangs- und eine Radialkomponente. Das dynamische Gleichgewicht erfordert nach (6.58), dass die Summe aller 3 Komponenten (Längs-, Umfangs- und Radialkomponente) stets gleich $\mathbf{0}$ ist.

Längs- und Umfangskomponente unterliegen im geschlossenen Stromkreislauf keiner Grenze. Dagegen läuft die bei konstanter Längs- und Umfangskomponente nach innen gerichtete Radialkomponente gegen ein „Hindernis“ beziehungsweise natürliches Ende: das Zentrum der Rotation. Dabei erzeugt sie Kraft und kann Energie auf ihrem Weg transportieren. Bei schwingender Längs- und Umfangskomponente schwingt auch die Radialkomponente, die dabei quasi auf das gleiche Niveau „relativer Freiheit“ der räumlichen Entwicklung gehoben wird wie Längs- und Umfangskomponente. Bei den Elektroimpulsen können sich im Gleichklang der 3 genannten Arten jeweils ein konstanter Anteil mit einem schwingenden Anteil überlagern.

Elektroimpulse wirken auf die eigene Feinmasse wie auch auf „fremde“ Feinmasse im Bereich der gegenseitigen Durchdringung.

In Zusammenfassung sind folgende Wirkungen aufgrund der dargestellten Eigenschaften zu erklären:

1. POYNTINGScher Vektor: Die Radialkomponente besorgt den radialen Energietransport.
2. Induktion im magnetischen Wechselfeld: Die in der Umgebung einer von Wechsel-

strom durchflossenen Leitung wirkende alternierende Umfangs- und Radialkomponente erzwingen aus Gründen des dynamischen Gleichgewichts die dritte Komponente in Längsrichtung (induzierte Wechselspannung). Befindet sich in Längsrichtung ein parallel verlaufender Leiter, der die Träger von Feinmasse, nämlich Ladungsträger, aufgrund seiner guten Leitfähigkeit zu kanalisieren vermag, so fließt (im geschlossenen Stromkreis) ein entsprechender induzierter Wechselstrom.

3. Gegenseitige Kraftwirkung zweier paralleler, von Gleichstrom durchflossener Leiter: Im Umfeld eines von Gleichstrom durchflossenen Leiters trifft die Umfangskomponente des beeinflussenden Leiters auf strömende „fremde“ Feinmasse, kanalisiert in einem parallelen Leiter, der beeinflusst wird. Das gemeinsame Kräftegleichgewicht erzwingt für den Durchdringungsbereich gemeinsame Werte des Elektroimpulses jeweils für Längs-, Umfangs- und Radialkomponente. Diese Anpassung unterliegt für Längs- und Umfangskomponente keinem Hindernis. Die gegenseitige Kraft wird dagegen über die Radialkomponente bewirkt, die gegen die Barriere zwischen leitfähigem Material des beeinflussten Leiters und isolierender Umgebung anläuft. Oder anders ausgedrückt: Die kanalisierte strömende Feinmasse kann nicht ausweichen und überträgt die auf sie von außen wirkende Kraft auf ihr „Gefängnis“, will heißen: auf den Leiter.
4. Induktion durch Bewegung im magnetischen Gleichfeld: Wird im Gegensatz zu dem Vorgang nach Punkt 3. die „Barriere“ in radialer Richtung bewegt, so wird der radialen Komponente der Widerstand entzogen beziehungsweise wird er verstärkt. Deswegen erzwingt das dynamische Gleichgewicht einen Ersatz in Form eines Elektroimpulses in Längsrichtung (induzierte Längsspannung).

Um die Kraft zwischen den von Gleichstrom durchflossenen Leitern zu berechnen, bedienen wir uns des POYNTINGSchen Vektors für den beeinflussten Leiter am Ort der Barriere, also zwischen beeinflusstem Leiter und umgebendem Medium. Dabei bilden wir diesen speziellen POYNTINGSchen Vektor aus der magnetischen Feldstärke, die sich aus dem „eigenen“ Strom ergibt und der elektrischen Feldstärke im Leiter der „fremden“ Feinmasse, auf den die Kraft wirkt. Wir ermitteln also einen (flächenbezogenen) Energiestrom, wie er sich theoretisch bilden würde, wenn die Barriere nicht existieren würde, oder anders ausgedrückt: wie er sich an der Barriere staut.

Wir wissen bereits um die direkte Affinität von Energiefluss S und Kraft F :

$$\begin{aligned}
 S &= E \cdot H = \frac{\Delta m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt}}{\Delta q}, \\
 \Delta m \cdot dv &= \Delta F \cdot dt, \\
 \Delta m \cdot \frac{dv}{dt} &= \Delta F; \\
 E \cdot H &= \frac{\Delta F}{\Delta q} \cdot v; \\
 F &= \int_{\Delta q} \frac{E \cdot H}{v}. \tag{6.105}
 \end{aligned}$$

Die Integration erfolgt dabei über den Leiterquerschnitt Δq des beeinflussten Leiters mit seinem als „fremd“ bezeichneten Strom.

Fasst man die strömende Feinmasse des „fremden“ Stromes als in den Leitungsmechanismus des eigenen Stromes eingebracht, auf und damit den darin geltenden Gesetzmäßigkeiten

unterworfen, so sind als bestimmende Größen der Wellenwiderstand

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c maßgebend, weil im Umfeld des Leiters die Gesetzmäßigkeiten des Lichtstrahls maßgebend sind. Damit errechnet sich mit $Z_F = Z$ die Längsspannung (differentieller Wert)

$$d^2U = J \cdot dl^2 \cdot Z$$

beziehungsweise die elektrische Feldstärke (differentieller Wert)

$$dE = J \cdot Z \cdot dl.$$

Die differentiell kleinen Feldstärken dE wirken längs der Leitung. Da die elektrische Feldstärke aber, wie wir wissen, eine proportionale Größe darstellt zu der auf die Feinmasse wirkenden Beschleunigung beziehungsweise Kraft, führt uns die Integration von dE über die Leitungslänge l :

$$E = J \cdot Z \cdot l \quad (6.106)$$

im vorliegenden Fall zu einem proportionalen Wert der resultierenden Kraft. Die Paarigkeit der Elektroimpulse und die zueinander senkrechte Wirkung ist dabei besonders zu beachten. Eingesetzt in (6.105) ergibt sich mit $v = c$:

$$F = \int_{\Delta q} \frac{J \cdot Z \cdot l \cdot H}{c}.$$

Mit

$$\frac{Z}{c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \mu_0$$

und

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

ergibt sich:

$$F = \int_{\Delta q} \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi r} \cdot J \cdot I. \quad (6.107)$$

Wird näherungsweise für alle Stromfäden des „fremden“ Stromes eine gleiche magnetische Feldstärke (des eigenen Stromes)

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

und die Stromdichte J über den Querschnitt konstant angenommen, wobei „fremder“ und „eigener“ Strom gleich groß sein sollen, ergibt sich schließlich die Form

$$F = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi r} \cdot I^2. \quad (6.108)$$

Der logische Kern der Berechnung ist darin zu sehen, dass ein theoretischer Energiedurchsatz durch den „fremden“ Leiter errechnet wird, in den das Produkt der Elektroimpulse von beeinflussendem Leiter

$$\sqrt{\frac{m_1}{l}} \cdot v_1$$

und beeinflusstem Leiter

$$\sqrt{\frac{m_2}{l}} \cdot v_2$$

im Bereich der Durchdringung errechnet wird. Die zugehörige elektrische Energie, integriert über die Leiterlänge l , ist

$$E_l = \sqrt{m_1 \cdot m_2} \cdot v_1 \cdot v_2,$$

und der Energiedurchsatz in Querrichtung ist in Analogie zu (6.16):

$$N = \sqrt{m_1 \cdot m_2} \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot k_v',$$

Daraus wird die Kraft durch Bezugnahme auf die zugehörige Geschwindigkeit v errechnet:

$$F = \frac{N}{v} = \frac{N}{k_v' \cdot 2\pi r} = \sqrt{\frac{m_1}{l} \cdot \frac{m_2}{l}} \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \frac{l}{2\pi r}. \quad (6.109)$$

Dabei steht m_1 für die gesamte (auch bei Gleichstrom) rotierende Feinmasse, die sich mit m_2 durchdringt, wobei der Grad dieser Durchdringung oder Verkettung durch den Faktor $k_v' = \frac{v}{2\pi r}$ definiert ist.

Nach dieser Überlegung muss sich die wirksame Kraft F auch als Quotient berechnen lassen, der aus dem gesamten Energiedurchsatz N durch die Zylindermantelfläche

$$A_q = 2\pi r \cdot l$$

und der mit N korrespondierenden Geschwindigkeit v gebildet wird

$$\begin{aligned} F &= \frac{N}{v} = \frac{E \cdot H \cdot 2\pi r \cdot l}{v} = \frac{E}{v} \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r \cdot l \\ &= \frac{E \cdot l}{v} \cdot I = \frac{U}{v} \cdot I = \frac{B \cdot l \cdot v}{v} \cdot I. \end{aligned}$$

$F = B \cdot I \cdot l$	(6.110)
-------------------------	---------

Dabei ist B die magnetische Induktion und

$$U = B \cdot l \cdot v$$

ist die induzierte Spannung beim Bewegen eines Leiters der Länge l mit der Geschwindigkeit v im magnetischen Gleichfeld.

6.11 Elektrische und magnetische Feldkonstante; Eichkonstante

Da die Eichkonstante k_A natürlich auch in die Werte von

- elektrischer Feldkonstante ϵ_0
- magnetischer Feldkonstante μ_0 und
- Wellenwiderstand Z_F

einfließt, wird in der folgenden Ableitung von den analogen Werten ϵ_c, μ_c und Z_c ausgegangen, die von dieser „willkürlichen“ Eichkonstanten unabhängig sind und die in der Folge auch dazu dienen, den Wert der Eichkonstanten k_A zu bestimmen.

Im Lichtstrahl errechnen sich Strom I , Spannung U , Wellenwiderstand Z_c und Leistungsdurchsatz N wie folgt:

$$I = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot c, \quad (6.111)$$

$$U = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot c \cdot \omega k l,$$

$$\frac{U}{I} = \omega k l = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_c}{\epsilon_c}},$$

$$N = I^2 \cdot Z_c = \frac{m}{l} \cdot c^2 \cdot Z_c = \frac{m}{l} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{\frac{\mu_c}{\epsilon_c}}}{\sqrt{\epsilon_c \mu_c}};$$

$$N = \frac{m}{l} \cdot \frac{c}{\epsilon_c} = m \cdot b_l \cdot c \quad (6.112)$$

mit Beschleunigung

$$b_l = \frac{1}{\epsilon_c \cdot l},$$

oder:

$$\frac{1}{\epsilon_c} = b_l \cdot l. \quad (6.113)$$

Für eine Schwingung der Wellenlänge λ und der Frequenz f gilt:

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

$$\frac{1}{\epsilon_c} = b_\lambda \cdot \lambda = b_\lambda \cdot \frac{c}{f},$$

$$b_\lambda = \frac{f}{c \cdot \epsilon_c}. \quad (6.114)$$

Die spezifische Energie E_λ pro Masse m_λ , also bezogen auf eine Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}$$

beträgt:

$$E_\lambda = N \cdot T = N \cdot \frac{1}{f}.$$

Mit (6.112) und (6.114) ergibt sich weiterhin:

$$\frac{E_\lambda}{m_\lambda} = \frac{b_\lambda \cdot c}{f} = \frac{1}{\epsilon_c}. \quad (6.115)$$

Allgemein gilt für die spezifische Energie pro Masse im Lichtstrahl:

$$\frac{E}{m} = \frac{E_\lambda}{m_\lambda} = \frac{m \cdot c^2}{m} = \frac{1}{\epsilon_c} = c^2. \quad (6.116)$$

oder:

$$E = mc^2. \quad (6.117)$$

Dies ist die bekannte Beziehung für die Äquivalenz von Energie und Masse.

Mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_c \mu_c}} \quad (6.118)$$

ergibt sich zusammenfassend:

$$\epsilon_c = \frac{1}{c^2} \quad (6.119)$$

$$\mu_c = 1 \quad (6.120)$$

$$Z_c = c \quad (6.121)$$

$$I = \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot c \quad (6.122)$$

$$U = \sqrt{\frac{m_\lambda}{\lambda}} \cdot c^2 \quad (6.123)$$

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (6.124)$$

$$N_\lambda = I^2 \cdot Z_c = \frac{m_\lambda}{\lambda} \cdot c^3 \quad (6.125)$$

$$\frac{N_\lambda}{m_\lambda} = \frac{c^3}{\lambda} = c^2 \cdot f = \frac{c^2}{\lambda} \cdot c = b_\lambda \cdot c \quad (6.126)$$

$$E_\lambda = N_\lambda \cdot T = \frac{m_\lambda}{\lambda} \cdot c^3 \cdot \frac{\lambda}{c} = m_\lambda \cdot c^2 \quad (6.127)$$

$$E = mc^2 \quad (6.128)$$

$$b_\lambda = \frac{c^2}{\lambda} = c \cdot f = \frac{1}{\epsilon_c \cdot \lambda} \quad (6.129)$$

$$F_\lambda = m_\lambda \cdot b_\lambda = I^2 = \frac{m_\lambda}{\lambda} \cdot c^2 \quad (6.130)$$

Der Index λ bedeutet jeweils Bezugnahme auf eine Schwingung der Wellenlänge λ .

F_λ ist die auf die Feinmasse wirkende Kraft.

Mit der Definition von Lichtgeschwindigkeit und Wellenwiderstand, und zwar jeweils mit und ohne Einfluss der Eichkonstanten k_A , lässt sich diese nun bestimmen. Es gilt:

$$Z_c = c = \frac{Z_F}{k_A \cdot \frac{\Omega}{m/s}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{m/s}{\Omega}}{k_A},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_c \mu_c}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{m/s}{\Omega}}{k_A}.$$

$$k_A = \frac{\mu_0}{\frac{\Omega}{m/s}} \quad (6.131)$$

Die Eichkonstante k_A entspricht also, wie bereits im Vorgriff ausgeführt, dem seiner physikalischen Einheit entkleideten Wert der magnetischen Feldkonstanten.

6.12 Energieinhalt einer Schwingung, Planck-Konstante

Ein Lichtstrahl mit einer kompletten Schwingung der Wellenlänge λ ist das kleinste selbständig im Raum ausbreitungsfähige Element des Lichtes. Dieses Element des Lichtes oder dieser elementare Lichtstrahl wird auch als Photon bezeichnet. Nach Naturgesetz ist in jedem elementaren Lichtstrahl das Produkt aus dem Impuls

$$m_\lambda \cdot c \quad \text{und der Wellenlänge} \quad \lambda$$

konstant. Diese Naturkonstante ist identisch mit dem PLANCKschen Wirkungsquantum h . Es gilt nach PLANCK und EINSTEIN die fundamentale Beziehung:

$$m_\lambda \cdot c \cdot \lambda = h. \quad (6.132)$$

Damit stehen wir vor der Erkenntnis, dass Licht im Sinne einer Quantisierung stets aus einem Kollektiv (will heißen: ganzzahligen Vielfachen) von elementaren Lichtstrahlen besteht, die alle einen fest vorgegebenen, nach (6.132) definierten Massen- und Energieinhalt besitzen. Auf Beziehung (6.132) wird noch häufig Bezug genommen, wobei lediglich zur Vereinfachung

$$m_\lambda = m$$

gesetzt wird.

Dieses Naturgesetz ist nicht nur von fundamentaler Bedeutung, es ist darüber hinaus das schlechthin konstituierende Strukturmerkmal von Strahlung und Energie.

Dieses Naturgesetz der Quantisierung, dem der elementare Lichtstrahl (Photon) unterliegt, hat seine physikalischen Konsequenzen im Mikrokosmos. Dies gilt speziell für den Fotoeffekt, also das durch Lichteinstrahlung bewirkte Herauslösen von Elektronen aus der Oberfläche eines Stoffes. Es mag sich aufdrängen, wegen der diskreten Energieportionen des Lichtes und dessen Interaktion mit Massebausteinen bildlich eine Korpuskeleigenschaft des Lichtes zu unterstellen. Aber darüber hinaus zu konstatieren, dem Lichtstrahl sei prinzipiell eine Zwitternatur eigen, gleichzeitig Welle und Korpuskel, leistet einer fehlerhaften Interpretation Vorschub.

Stellt man sich eine elektrische Leitung vor, zweckmäßig eine Koaxialleitung, die ja der Natur des Lichtstrahls sehr nahe kommt, und schließt diese Leitung mit einem Lastwiderstand ab, der erst bei einem Grenzwert der Spannung „zündet“ und Strom zieht, so sind die elektrischen Eigenschaften im Mikrokosmos beim Fotoeffekt abgebildet. Kein Fachmann würde wegen der besonderen Eigenschaft des Lastwiderstandes folgern, die Wellenausbreitung auf der elektrischen Leitung würde von einem geheimnisvollen zweiten physikalischen Effekt überlagert, der für das „Zünden“ verantwortlich ist. Die Begriffsprägung der „Korpuskularstrahlung“, die eine Doppelnatur des Lichtes unterstellt, ist schlicht eine Fehlinterpretation elektromagnetischer Gesetzmäßigkeit.

Der Energieinhalt E_λ eines elementaren Lichtstrahls beträgt:

$$E_\lambda = m_\lambda \cdot c^2 = hc \cdot \frac{1}{\lambda} = h \cdot f \quad (6.133)$$

Schwingungsdauer T und Wellenlänge λ sind als kennzeichnende Größen von Zeit und Weg bei der Wellenausbreitung direkt proportional.

$$\lambda \cdot f = c \quad f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{\lambda}{c}$$

Alle die elektromagnetische Schwingung im Freiraum kennzeichnenden physikalischen Größen sind umgekehrt proportional von Wellenlänge und damit von der Schwingungsdauer abhängig. Die Kraft F_λ als Quadrat des Stromes I_λ beziehungsweise als Produkt von Masse m_λ und Beschleunigung b_λ nimmt eine Sonderstellung ein.

$$m_\lambda = \frac{h}{c} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (6.134)$$

$$E_\lambda = hc \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (6.135)$$

$$f = c \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (6.136)$$

$$b_\lambda = c^2 \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (6.137)$$

$$I_\lambda = \sqrt{hc} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (6.138)$$

$$U_\lambda = \sqrt{hc^3} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad (6.139)$$

$$F_\lambda = I_\lambda^2 = m_\lambda \cdot b_\lambda \quad (6.140)$$

Die durch schwingende Feinmasse sich ausbreitenden Elementar-Wellen zeichnen sich aber auch durch feste Proportionen der sie kennzeichnenden physikalischen Größen von Masse, Energieinhalt, Frequenz, Beschleunigung, Elektroimpuls (Strom) und Spannung aus. Diese Proportionen beziehen sich auf einen Wellenzug der Wellenlänge λ , gekennzeichnet durch Index λ .

$$m_\lambda : E_\lambda : f : b_\lambda : I_\lambda : U_\lambda = h : hc^2 : c^2 : c^3 : \sqrt{\frac{h}{c}} \cdot c^2 : \sqrt{\frac{h}{c}} \cdot c^3 \quad (6.141)$$

Als Spezialfall vorstehender Beziehung (6.132) korrespondiert die Masse m_T eines Materiebausteins (Beispiel: Elektron) bei Umsetzung in Strahlung mit der typischen Wellenlänge $\lambda_{C(T)}$:

$$m_T = \frac{h}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_{C(T)}}. \quad (6.142)$$

Auf diese nach COMPTON als COMPTON-Wellenlänge $\lambda_{C(T)}$ bezeichnete Größe wird später noch vermehrt zurückgegriffen. In der Form der Beziehung (6.142) erkennen wir das scheinbar paradoxe Prinzip der Struktur von Masse und Energie: Je kleiner das Gefäß - bestimmt durch Wellenlänge und zugehörigen Durchmesser des Lichtstrahls - desto größer der Inhalt an Masse und Energie! Die Feinmasse unterliegt also in Strahlung und Materie unterschiedlicher Verdichtung. Für den Spezialfall des Elektrons ergibt sich nach (6.142) mit

$$\begin{aligned} m_T &\rightarrow m_e && \text{und} \\ \lambda_{C(T)} &\rightarrow \lambda_{C(e)} \rightarrow \lambda_C : \\ m_e &= \frac{h}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_C}. \end{aligned} \quad (6.143)$$

Für die kleinste Einheit des Lichts, die sich eigenständig fortzupflanzen vermag und die zurecht Lichtstrahl genannt werden kann, gilt nach Einsetzen von (6.134) in (6.122) die Beziehung für den zugehörigen kleinsten Strom:

$$\begin{aligned} I_l &= \frac{f}{c} \cdot \sqrt{\frac{h}{c}} \cdot c, \\ I_l &= f \cdot \sqrt{\frac{h}{c}} = \frac{\sqrt{h \cdot c}}{\lambda}. \end{aligned} \quad (6.144)$$

Die zugehörige Leistung N_l beträgt nach (6.127) in Verbindung mit (6.122):

$$N_l = I_l^2 \cdot c = \frac{h \cdot c^2}{\lambda^2}. \quad (6.145)$$

Mit

$$h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

ergeben sich :

$$\sqrt{\frac{h}{c}} = 1,48668 \cdot 10^{-21} \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}}},$$

$$\sqrt{h \cdot c} = 4,45696 \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}}}.$$

Für die Wellenlängen des sichtbaren Lichts mit $\lambda = 350 \dots 700 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ergeben sich beispielhaft:

$$\begin{aligned} I_l (\lambda = 350 \dots 700 \text{ nm}) &\approx 1,3 \dots 0,65 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 1,1 \dots 0,6 \text{ mA}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_l (\lambda = 350 \dots 700 \text{ nm}) &\approx 0,5 \dots 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \\ &\approx 0,5 \dots 0,12 \text{ mW} \end{aligned}$$

7 Elektrische Ladung

7.1 Zirkulierend geschlossene Strahlung als kugelförmiger Rotationskörper

Ein Elektron (oder Proton) kann als in sich geschlossener Lichtstrahl aufgefasst werden. Wir stellen uns einen kreisförmigen Querschnitt vor, der von dessen Feinmasse in der nachstehend beschriebenen Art durchströmt wird und dessen Durchmesser noch zu bestimmen ist. Diese Querschnittsfläche wird durch eine Durchmesserlinie in zwei gleich große Halbkreise unterteilt. Gedanklich wird auch der Lichtstrahl, der uns unter Anpassung seines Durchmessers an das Modell „Elektron“ als geeignetes Anschauungsmodell dienen soll, in zwei identische Halbstrahlen aufgeteilt. Jeder dieser Halbstrahlen durchströmt aber allein seine halbkreisförmige Durchsatzfläche, und zwar mit der kompletten Feinmasse des Lichtstrahls, aus dem die Halbstrahlen gedanklich hervorgegangen sind. Bezogen auf die Durchsatzflächen sind die Richtungen der beiden Halbstrahlen einander entgegengesetzt.

Für die Entstehung des Elektrons aus einem kompletten Wellenzug eines Lichtstrahls definierter Masse m_e und Wellenlänge λ_C (siehe Beziehung (6.143)) wird nun die Durchmesserlinie zur Rotationsachse. Um die Rotationsachse bewegen sich die beiden Halbstrahlen dergestalt, dass sie, mit gleichem Drehsinn aneinander gefügt, insgesamt einen exakt kugelförmigen Rotationskörper strömender Feinmasse ergeben. Dort, wo die Rotationsachse aus der Kugel austritt, sprechen wir von den Polen. Der Großkreis der Kugel senkrecht zur Rotationsachse ist der Äquator. In diesem Rotationskörper bewegt sich die Feinmasse als Welle mit konstanter (konstant für die jeweilige Kugelschicht) Winkelgeschwindigkeit und gleichbleibendem Drehsinn um die Achse.

Im Vorgriff auf die spätere Berechnung des Durchmessers des entstandenen kugelförmigen Rotationskörpers kann unterstellt werden, dass die auf das Volumen bezogene Dichte der Feinmasse von Lichtstrahl und Elektron weitgehend übereinstimmen. Ein Wellenzug des zylinderförmigen Lichtstrahls ist gekennzeichnet durch die Wellenlänge λ_C sowie den Radius r_L . r_L errechnet sich aus (6.53), wobei r_L für D_F gesetzt wird, zu:

$$r_L = \lambda_C \cdot \frac{\tau}{\pi}. \quad (7.1)$$

Daraus errechnet sich das Volumen des zylinderförmigen Lichtstrahls

$$V_Z = \pi \cdot \left(\lambda_C \cdot \frac{\tau}{\pi} \right)^2 \cdot \lambda_C = \frac{\tau^2}{\pi} \cdot \lambda_C^3. \quad (7.2)$$

Bringt man für das kugelförmige Elektron im Vorgriff auf die spätere Ableitung einen Durchmesser von λ_C beziehungsweise einen Radius von

$$r_K = \frac{\lambda_C}{2} \quad (7.3)$$

in Ansatz, so ergibt sich das zugehörige Kugelvolumen zu:

$$V_K = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{\lambda_C}{2} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot \lambda_C^3. \quad (7.4)$$

Mit dem Verhältnis

$$\frac{V_K}{V_Z} = \frac{\pi^2}{6\tau^2} \approx 1,04^3 \quad (7.5)$$

ergibt sich also in erster Näherung eine annähernd übereinstimmende volumenbezogene Dichte der zusammengehörigen Werte von Lichtstrahl und Materiebaustein. Dies gilt sowohl für das Elektron wie auch analog für das Proton.

Im vorstehend geschildertem Gedankenprozess erkennen wir den Übergang von geradlinig sich fortpflanzender Strahlung in einen Materiebaustein, also lokal gebundene Feinmasse. Das gedanklich entstandene Elektron hat ohne zusätzliche Anregung von außen, die an dieser Stelle noch aus der Betrachtung ausgeblendet werden soll, gegenüber dem Lichtstrahl, aus dem es entstanden ist, seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, nämlich die Lichtgeschwindigkeit, komplett eingebüßt.

Schneiden wir dagegen das kugelförmige Elektron durch eine Ebene, die die Rotationsachse enthält, so liegen in der entstehenden kreisförmigen Schnittfläche für die strömende Feinmasse Verhältnisse vor, zu deren Erklärung wir durch unsere Erkenntnisse über die Vorgänge in einem Lichtstrahl eine sehr gute Ausgangsbasis besitzen. Energie und Lichtgeschwindigkeit des zum Materiebaustein gewordenen Lichtstrahls sind natürlich nicht verschwunden, sondern regieren in zirkulierender Form intern im Elektron. Für jeden Punkt jeder kreisförmigen Schnittfläche, die die Rotationsachse enthält, gilt uneingeschränkt wie in einem Lichtstrahl der Elektroimpulssatz. Die Gesetzmäßigkeiten, denen die 3 Komponenten des auf die Flächeneinheit bezogenen Elektroimpulses in Ausbreitungsrichtung des Lichtstrahls sowie in Umfangs- und radialer Richtung unterworfen sind, können also bezogen auf den kreisförmigen Querschnitt übernommen werden. Weil die Komponente der Ausbreitungsrichtung unter den Bedingungen des Elektrons nicht mehr geradlinig verläuft, sondern um die Rotationsachse zirkuliert, wird sie in der Folge „Rotationskomponente“ genannt und zusammen mit der Umfangs- und Radialkomponente unter dem Begriff „Grundwelle“ zusammengefasst. Die beiden korrespondierenden Rotationskomponenten der beiden halbkreisförmigen Durchsatzflächen liegen auf einem Großkreis des kugelförmigen Elektrons. Entgegen dem ersten Anschein ist also für die Korrespondenz zusammengehöriger Rotationskomponenten nicht der Breitenkreis, sondern der Großkreis maßgebend. Die maßgebende Rotationsachse für die Rotationskomponente ist also variabel und verläuft jeweils durch den Mittelpunkt des Elektrons.

Bevor die Einzelheiten der Strömungsverhältnisse der Feinmasse geschildert werden, sollen die dabei maßgebenden geometrischen Bedingungen vorangestellt werden.

Wenn sich ein Massepunkt in der Ebene geradlinig von A nach B fortbewegt und $\overline{AB} = D = 2r$ gesetzt wird, so hat der „Umweg“ UH über den zu \overline{AB} gehörigen Halbkreisbogen die Länge

$$UH = \pi r.$$

Das Verhältnis von Halbkreisbogen zu Durchmesser D beträgt:

$$\frac{UH}{D} = \frac{\pi r}{2r} = \frac{\pi}{2}. \quad (7.6)$$

Jedem differentiell kleinem Teilstück $dD = 2 \cdot dr$ kann das differentiell kleine Bogenstück $dUH = dD \cdot \frac{\pi}{2} = dr \cdot \pi$ zugeordnet werden.

Wenn in einer Kugel gedanklich eine gerade Linie von Punkt A der Kugeloberfläche durch den Mittelpunkt der Kugel zum gegenüber liegenden Punkt B auf der Kugeloberfläche gezogen wird, so sei wieder $\overline{AB} = D = 2r$ gesetzt. Zu dieser kürzesten Verbindung der Punkte und wird nun der Weg eines Feinmassepunktes auf der Kugeloberfläche betrachtet, die einer Kugelschicht des Elektrons entsprechen soll. Für die Anschaulichkeit wird dieser Kugel eine Äquatorebene, in der die Strecke \overline{AB} liegen soll, und entsprechende Pole zugeordnet.

Aufgrund der doppelten Drehbewegung der Feinmasse im Elektron (Rotations- und Umfangskomponente, und zwar, wie später gezeigt wird, ersetzt durch ein Paar gleich großer Oberflächenkomponenten), kann im Sinne der 1. Drehbewegung der eindimensionalen Durchmesserlinie $\overline{AB} = D = 2r$ in der zweidimensionalen Ebene der Halbkreisbogen

$$UH = D \cdot \frac{\pi}{2} \quad (7.7)$$

zugeordnet werden. Durch die Überlagerung der 1. Drehbewegung durch die 2. Drehbewegung, ergibt sich auf der Kugeloberfläche eine Raumkurve der Länge:

$$UHK = UH \cdot k_R = D \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k_R = r \cdot \pi \cdot k_R. \quad (7.8)$$

Dabei ist entscheidend, dass in jedem Punkt der Raumkurve die beiden korrespondierenden Drehbewegungen jeweils senkrecht zueinander verlaufen, eine Dynamik also, die nur unter den Bedingungen strömender Feinmasse vorstellbar ist. Analog der Betrachtung in der Ebene des Kreisbogens kann für die Kugeloberfläche jedem differentielle Teilstück $dUH = dD \cdot \frac{\pi}{2}$ des Halbkreisbogens das differentielle Kurvenstück

$$dUHK = dD \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k_R = dr \cdot \pi \cdot k_R \quad (7.9)$$

zugeordnet werden.

Unter der Bedingung der doppelten Drehbewegung entspricht also die Umfangslinie

$$U = 2r\pi \quad (7.10)$$

des Vollkreises in der Ebene, die Raumkurve auf der Kugeloberfläche von der Länge

$$UK = 2r\pi \cdot k_R. \quad (7.11)$$

Diese Raumkurve ist eine geschlängelte Linie, die am Äquator der Kugel beginnt, nach 1/4 des Weges einen der Pole (abhängig von der gegenseitigen Orientierung der korrespondierenden Drehbewegungen) erreicht hat, nach der Hälfte des Weges auf dem gegenüber liegenden Punkt B der Äquatorebene angelangt ist, nach 3/4 des Weges den anderen Pol erreicht hat, um schließlich den kompletten Zyklus am Ausgangspunkt A zu beenden. Wird von den beiden in Rede stehenden Drehbewegungen eine in ihrer Richtung (und damit in ihrer Orientierung zur korrespondierenden anderen Drehbewegung) umgedreht, ergibt sich eine (räumlich) spiegelbildliche Raumkurve prinzipiell gleicher Struktur.

Im Lichte vorstehender Betrachtung ergeben sich folgende grundsätzliche Aussagen für die maßgebenden Wellenlängen des kugelförmigen Elektrons. Sein Durchmesser beträgt nach der später dargestellten Ableitung:

$$D = \lambda_C. \quad (7.12)$$

Der zugehörige Umfang des Elektrons ist:

$$U_E = \pi \cdot \lambda_C. \quad (7.13)$$

Bildet man den geradlinigen Lichtstrahl der Wellenlänge λ_C auf die Äquatorlinie des Elektrons mit dem Umfang U_E ab, so wird die Wellenlänge λ_C in Übereinstimmung mit (7.7) auf

$$\lambda_E = \lambda_C \cdot \frac{\pi}{2} \quad (7.14)$$

gestreckt. Auf der Äquatorlinie haben wir es also mit 2 Wellenzügen der Wellenlänge λ_E zu tun, für die unter Bezugnahme auf den Umfang U_E gilt:

$$U_E = 2 \cdot \lambda_E = 2 \cdot \lambda_C \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \cdot \lambda_C. \quad (7.15)$$

Entlang des Äquators ist also die entscheidende Voraussetzung stabiler Strömungsverhältnisse erfüllt, nämlich, dass keine gegenseitige Auslöschung der beiden Wellenzüge auftritt.

Mit Rücksicht auf die doppelte Drehbewegung, der die Feinmasse im Elektron unterworfen ist, wird ein „Startpunkt“ der vom Strömungsmaximum durchlaufenen Kurve auf der

Äquatorlinie gewählt. Diese Raumkurve hat gegen den Äquator einen Winkel von 45° wegen der Gleichheit von Rotations- und Umfangskomponente. Ihre Eigenschaften sind nachfolgend unter Bezug auf Abbildung 23 wiedergegeben. Für die Wellenlänge gilt:

$$\lambda_{KE} = \lambda_E \cdot k_R = \lambda_C \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k_R. \quad (7.16)$$

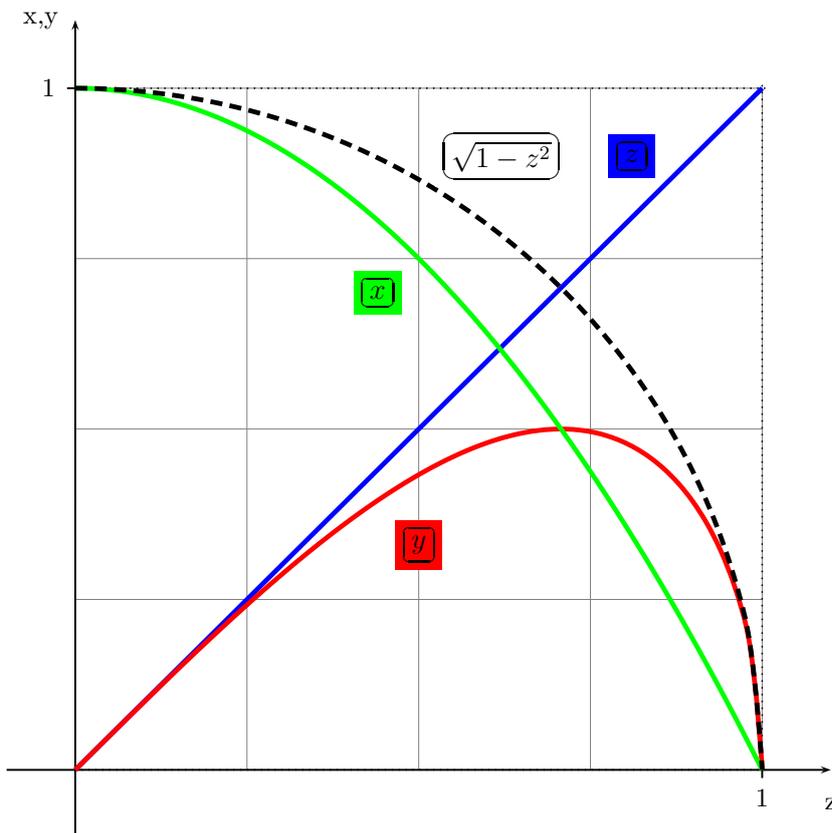


Abbildung 23: Rechnerische Beziehung für die Raumkurve

Diese Raumkurve ist das Analogon zu der spiralförmigen Kurve des Strömungsmaximums im geradlinigen Lichtstrahl. Für die Bedingungen des Elektrons ist diese gekrümmte Kurve auf die Kugelform abzubilden.

x -, y - und z -Achse schneiden sich wie üblich im Zentrum der Kugel als Abbild des Elektrons und stehen aufeinander senkrecht. Die z -Achse verläuft in der Achse des Elektrons, die Nord- und Südpol verbindet. Die Umfangskomponente weist in jedem Punkt der gesuchten Raumkurve in Richtung der zugehörigen Meridianlinie. Die korrespondierende Rotationskomponente ist gleich groß und wirkt jeweils senkrecht dazu. Die rechnerischen Beziehungen der Raumkurve

abhängig vom Parameter z lauten:

$$y = z\sqrt{1-z^2}, \quad (7.17)$$

$$x = \sqrt{1-z^2}(2-z^2). \quad (7.18)$$

Hintergrund dieser rechnerischen Beziehungen, deren Kurvenverläufe Abbildung 23 wiedergibt, sind folgende Zusammenhänge: In den korrespondierenden Wertepaaren x' und $k(x') = \sqrt{1-x'^2}$ beziehungsweise z und $k(z) = \sqrt{1-z^2}$ ist mathematisch die konstante Krümmung des Kreisbogens erfasst. (x' ist für x gesetzt, um es von dem Funktionswert x der Raumkurve zu unterscheiden.)

Die Raumkurve kann alternativ abhängig vom Parameter x oder z dargestellt werden. Vorstehend ist der Parameter z zugrunde gelegt. In jedem Fall wird die Überlagerung zweier gekrümmter Linien abgebildet, so dass jeder differentiell kleine Abschnitt aus der Addition eines differentiell kleinen Kreisbogenabschnittes mit einem gleich langen, aber senkrecht dazu verlaufenden Kreisbogenabschnitt hervorgeht. Die Richtung der Umfangskomponente ist dann durch die Meridianlinie vorgegeben, in der der jeweilige Punkt der Raumkurve

entlang des Äquators wie auch auf der Raumkurve festgestellt werden. Die Fortpflanzung des Strömungsmaximums entlang des Äquators mit Lichtgeschwindigkeit stellt das Analogon zu der geradlinigen Fortpflanzung der Feinmasse im Lichtstrahl dar. Dagegen stellt die angesprochene Raumkurve des Strömungsmaximums entlang der Kugeloberfläche das Analogon zur spiralförmigen Raumkurve des Strömungsmaximums im Lichtstrahl dar. In beiden miteinander verglichenen Raumkurven schreitet dieses Maximum mit Überlichtgeschwindigkeit fort (beim kugelförmigen Elektron mit $c \cdot k_R$). Das ist aber insofern ohne Belang, als in energetischer Hinsicht stets nur die Bewegung entlang der kürzesten Verbindung für die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit maßgebend ist, beim Lichtstrahl also die Gerade, im kugelförmigen Elektron die Äquatorlinie. Bezogen auf die Schnittfläche, die die Rotationsachse enthält, weist sowohl die Rotationskomponente wie auch die Umfangskomponente an der Rotationsachse eine Singularität auf, die sich allerdings auf den zeitlich konstanten Anteil beschränkt. Der zeitlich alternierende Anteil erfährt dagegen keine Unstetigkeit an der Rotationsachse. Die Rotationsachse ist die Trennungslinie der einander entgegengesetzten Strömungsrichtungen in beiden Halbstrahlen. Zu den Großkreisen der Rotationskomponente gehören die dazu senkrecht verlaufenden Meridiane (= Längengrade) der Umfangskomponente. Beim Blick auf die Kugeloberfläche stehen also Rotations- und Umfangskomponente stets senkrecht aufeinander. Im Sinne von Ursache und Wirkung kann die Rotationskomponente als Auslöser und die Umfangskomponente als Folge aufgefasst werden. Stellt man die beiden Komponenten in Pfeilform dar, so stehen diese Pfeile aufeinander senkrecht. Wird an die Pfeilspitze der Rotationskomponente (Auslöser) die Umfangskomponente (Folge) mit ihrem Schaft angefügt, so ist damit der Drehsinn des Wirbels definiert, der durch die Überlagerung der beiden Drehbewegungen ausgelöst wird und einheitlich für die gesamte Kugeloberfläche gilt. Dieser einheitliche Drehsinn für die gesamte Kugeloberfläche korrespondiert mit der einheitlichen Zuordnung von 1. Drehbewegung (Rotationskomponente) zur 2. Drehbewegung (Umfangskomponente). Wird diese gegenseitige Zuordnung von 1. und 2. Drehbewegung umgedreht, kehrt sich analog der einheitliche Drehsinn auf der Kugeloberfläche um.

Mit diesem Merkmal zweier alternativer Drehsinne, ein bereits vom Lichtstrahl her bekannter Aspekt, ist unmittelbar das Charakteristikum der Polarität angelegt. Die weitgehende Austauschbarkeit von Rotations- und Umfangskomponente hat aber noch eine weitere wesentliche Konsequenz. Wir können, ohne einen Aspekt zu vernachlässigen, die Feinmasseströmung erneut gedanklich in zwei Hälften aufteilen und anschließend so zusammenfügen, dass Rotations- und Umfangskomponente die Rollen tauschen. Dieser Tausch der Rollen bedeutet aber keinesfalls nur das simple Aufteilen der Strömung in 2 Hälften. Vielmehr ist jede dieser beiden Hälften in dem Sinne eigenständig, dass ihre Feinmasseströmung senkrecht zur anderen Hälfte verläuft. Erst auf der Basis dieser Besonderheit ist die Überlagerung beider Hälften zu verstehen, die sich an jedem Punkt zu einem Paar gleich großer, senkrecht zueinander verlaufender Strömungskomponenten addieren. Jede dieser beiden Strömungskomponenten resultiert also gleichermaßen aus Rotations- wie auch Umfangskomponente und kann zweckmäßig mit Bezug auf die Oberfläche der betrachteten Kugelschicht als Oberflächenkomponente bezeichnet werden. Wegen dieser „Entstehungsgeschichte“ der Oberflächenkomponente klingt sie im Gegensatz zur Komponente des Lichtstrahls in Ausbreitungsrichtung an der äußeren Grenze des Elektrons (beziehungsweise seines Kerns) **nicht** auf Null ab, ein entscheidender Unterschied zum gedanklichen Ausgangsmodell „Lichtstrahl“. Trotz des gleichen Betrages der beiden zusammengehörigen Oberflächenkomponenten, darf ihre Herkunft als wechselseitiges Produkt von Rotations- und Umfangskomponente nicht komplett aus dem Auge verloren werden. Die Rolle der Rotationskomponente als Auslöser und der Umfangskomponente als Folge und damit die Definition des Drehsinns der Feinmassewirbel bleibt unberührt. Damit sind schließlich die realen Verhältnisse im Elektron abgebildet.

Die auf den zeitlich konstanten Anteil beschränkte Singularität der Rotationskomponente und

der Umfangskomponente beziehungsweise der Oberflächenkomponenten an der Rotationsachse ist die eine wichtige Besonderheit, hinsichtlich der sich das „Innenleben“ von Elektron und Lichtstrahl unterscheiden. Der Lichtstrahl hat eine punktförmige Singularität im Mittelpunkt, das Elektron dagegen eine linienförmige Singularität in Form seiner Rotationsachse. Es gibt aber noch einen weiteren wichtigen Unterschied:

Da im Lichtstrahl benachbarte Querschnitte der Durchströmung in differentiell kleinem Abstand parallelen Flächen zugehören, in der Rotationsfigur „Kugel“ dagegen diese Flächen einen differentiell kleinen Winkel gegeneinander haben, kommt es zu einer wichtigen Modifikation in Form einer Überlagerungswelle, für deren Erklärung einige Worte zu den Eigenschaften der Grundwelle vorausgeschickt werden. Hinsichtlich der Grundwelle ist wie im Lichtstrahl zwischen zeitlich konstantem Anteil und zeitlich alternierendem Anteil zu unterscheiden. In einem Querschnitt des Elektrons, der die Rotationsachse enthält, ist der zeitlich konstante Anteil der Rotationskomponente auch räumlich konstant. Diesem zeitlich konstanten Anteil der Rotationskomponente entspricht der jeweils gleich große und senkrecht dazu verlaufende konstante Anteil der Umfangskomponente.

Für alle 3 räumlichen Komponenten lässt sich für die wellenförmige Ausbreitung eine Richtung definieren. Diese Richtung ist bei der Rotationskomponente für konstanten und alternierenden Anteil identisch. Jeder der 3 räumlichen Komponenten der Grundwelle ist eine senkrecht zu ihr wirkende Überlagerungskomponente zugeordnet, die durch die Rotation ausgelöst wird. Sie bilden zusammen eine Überlagerungswelle. Jedes Fortschreiten sowohl der Rotationskomponente wie auch der Umfangskomponente unterliegt einer doppelten Drehbewegung. Das ist zum einen die Drehbewegung der Rotationskomponente um den Mittelpunkt des Elektrons und der Umfangskomponente auf ihrer dazu senkrecht stehenden Umlaufbahn. Diese beiden Drehbewegungen bewirken einen Drehimpuls der Feinmasse im Sinne eines Bahndrehimpulses. (Anmerkung: Dieser interne Bahndrehimpuls der Feinmasse ist freilich streng zu unterscheiden von dem „externen“ Bahndrehimpuls eines Elektrons als Materiebaustein beim Umlauf um das Proton.) Überlagert wird jede der beiden Drehbewegungen durch die jeweils dazu senkrecht verlaufende Drehbewegung in Richtung des Partners, also für die Rotationskomponente entsprechend der Richtung der Umfangskomponente und umgekehrt. Durch diesen Effekt entsteht eine Wechselwirkung zwischen Rotations- und Umfangskomponente, bei der es wie bereits beschrieben zu resultierenden Paaren gleich großer, senkrecht zueinander wirkender Oberflächenkomponenten kommt. Die resultierenden Paare gleich großer Oberflächenkomponenten haben entsprechende Wirbel der Feinmasse zur Folge, die an jedem Raumpunkt einer Kugelschicht gleich stark sind, einen einheitlichen Drehsinn aufweisen und deren Rotationsachse radial, also sowohl senkrecht zu Rotations- wie auch zu Umfangskomponente beziehungsweise zu den Oberflächenkomponenten verläuft.

Einerseits werden durch den zeitlich konstanten Teil der Rotationskomponente charakteristischen Merkmale des Elektrons bestimmt. Andererseits hat die senkrecht zur Grundwelle mit ihrer Rotations- und Umfangskomponente verlaufende Überlagerungswelle prägnante Merkmale, die die spezifischen Eigenschaften des Elektrons bestimmen:

- Der Ursprung dieser Überlagerungswelle ist der Mittelpunkt des Elektrons und der Verlauf ist radial nach außen gerichtet.
- Schauen wir vom Mittelpunkt des Elektrons entlang der radial gerichteten Überlagerungswelle und hat der Wirbel der Feinmasse den Rechtsdrehsinn, handelt es sich um positive **elektrische** Polarität. Negative **elektrische** Polarität entspricht dagegen dem Linksdrehsinn.
- Der durch die Wirbel der Überlagerungswelle erzeugten **elektrischen** Polarität steht die **magnetische** Polarität des Elektrons gegenüber, die allein durch den zeitlich kon-

stanten Anteil der Rotationskomponente ausgelöst wird. Die zugehörige zeitlich konstante Umfangskomponente verläuft zwar ebenfalls senkrecht zur Rotationskomponente, aber nicht wie diese auf der Oberfläche der jeweils betrachteten Kugelschicht. Jede Schnittebene, die die Rotationsachse enthält, weist das gleiche Strömungsbild der Umfangskomponente auf, nämlich die Charakteristik eines sich auffächernden Bündels. Dieses Bündel wird aus symmetrischen Bogenlinien gebildet, die an den Polen dicht beieinander verlaufen und senkrecht zur Kugeloberfläche ein- beziehungsweise austreten, dagegen in der Äquatorebene maximal aufgefächert sind und senkrecht zu dieser verlaufen. Die Rotationsachse sowie die Äquatorprojektion des Schnittbildes stellen Symmetrieachsen dar.

Schauen wir vom Mittelpunkt des Elektrons entlang der Rotationsachse und folgt die Zirkulation der Feinmasse in Form der Rotationskomponente dem Rechtsdrehsinn, so blicken wir in Richtung der Nordhalbkugel des Elektrons. Auf der Nordhalbkugel tritt die radial gerichtete Umfangskomponente aus dem Elektron aus. Ihr Pol ist identisch mit dem magnetischen Nordpol des Elektrons. Auf der Südhalbkugel tritt die radial gerichtete Umfangskomponente in das Elektron ein. Ihr Pol ist identisch mit dem magnetischen Südpol.

- Im Gegensatz zur Grundwelle, die auf den kugelförmigen Kern des Elektrons beschränkt ist, überspringt die Überlagerungswelle diese Grenze und erstreckt sich weit in den umgebenden Raum, ohne dass an dieser Stelle eine Grenze definiert werden kann.
- Die Überlagerungswelle speist sich aus der Grundwelle (Ausgangswert) und reduziert diese in einer Weise, die eine markante Besonderheit darstellt. Unmittelbar einsichtig ist die algebraische Subtraktion des Teils (Überlagerungswelle) vom Ganzen (Ausgangswert der Grundwelle). Die entstehenden Teile sind aber damit nicht etwa voneinander entkoppelt. Vielmehr wirkt die Überlagerungswelle, die innig mit der Grundwelle verkoppelt ist, auf diese ein weiteres Mal reduzierend zurück! Das Größenverhältnis von Überlagerungswelle zu der auf zweifache Weise **reduzierten** Grundwelle beträgt für alle 3 räumlichen Komponenten jeweils $1 : 2\pi$.

Das Verhältnis von $1 : 2\pi$ ergibt sich daraus, dass ausgehend vom Mittelpunkt des Elektrons mit jedem radialen Fortschreiten um die differentielle Größe dr der korrespondierende Zuwachs des Kreisumfangs $2\pi \cdot dr$ beträgt. Die resultierende zirkulierende Strömung um den Mittelpunkt des Elektrons in Form der Oberflächenkomponenten der reduzierten Grundwelle, die ein Paar gleich großer, senkrecht zueinander wirkender Strömungen darstellen, hat deshalb gegenüber der überlagerten radialen Strömung ein Verhältnis der Durchsatzflächen von $1 : 2\pi$.

Oder anders ausgedrückt: Mit dem radialen Weg der Überlagerungswelle von dr (integriert: r) korrespondiert ein Weg jeder der beiden Oberflächenkomponenten von $2\pi \cdot dr$ (integriert: $2\pi \cdot r$).

Das Gleichgewicht zwischen diesen beiden senkrecht aufeinander stehenden Strömungen verlangt aber nun das umgekehrte Verhältnis der maßgebenden flächenbezogenen Elektroimpulse. Die reduzierten Grundwelle mit allen ihren Teilkomponenten verhält sich deshalb zur Überlagerungswelle mit allen ihren Teilkomponenten wie $2\pi : 1$. Umgekehrt ist also damit die relative Größe der Überlagerungswelle für alle 3 räumlichen Komponenten gleich, nämlich $1 : 2\pi$ gegenüber der reduzierten Grundwelle. Durch die proportionale Überlagerung bleibt also offensichtlich der Elektroimpulssatz gewahrt und es findet eine alle drei Dimensionen des Raumes einschließende Rotation der Feinmasse statt. Mit der komplexen Rotation wird die Eigenschaft des Lichtstrahls, dass seine Feinmasse um die in Ausbreitungsrichtung verlaufende Achse zirkuliert, auf den Rotationskörper „Kugel“ übertragen. Auf zyklischen

Umlaufbahnen (Raumkurven) laufen Maxima und Minima der rotierenden Strömung über die konzentrischen Kugeloberflächen um den Mittelpunkt des Elektrons, aus deren Gesamtheit die Kugel wie aus Schalen zusammengesetzt gedacht werden kann. Im Einklang mit dieser Dynamik überstreichen die Wirbel alle Punkte der Kugeloberfläche.

Diese umlaufenden Wirbel aus Feinmasse unterliegen also einer strengen inneren Dynamik und können mit Bewegungen materieller Körper (wie z.B. der Himmelskörper), an sich nicht verglichen werden. Da aber unsere Anschauung aus der materiellen Welt gespeist wird, darf bildhaft von schraubenförmiger Bewegung gesprochen werden. Die als Hilfsvorstellung gewählten Schrauben weisen vom Kern des Elektrons in radiale Richtung und drehen sich um ihre Achsen. Da diese modellhaften Schrauben aus Feinmasse bestehen, können sie sich problemlos durchdringen, wobei sie sich zwar im Sinne elektrischer Kopplung gegenseitig beeinflussen, aber nicht etwa wie materielle Schrauben gegenseitig blockieren.

Mit den geschilderten Modifikationen lassen sich die für den Lichtstrahl mit seiner zylinderförmigen Gestalt abgeleiteten Beziehungen auf den kugelförmigen Rotationskörper des Elektrons übertragen. Im Lichtstrahl gilt unbeschadet der internen Rotation die geradlinige Fortpflanzung. Im Elektron ist an die Stelle der geradlinigen Fortpflanzung die Rotation um den Mittelpunkt des Elektrons getreten. Da aber die interne Rotation des Lichtstrahls auch im Elektron erhalten bleibt, haben wir eine Überlagerung zweier Rotationsbewegungen vor uns mit aufeinander senkrecht stehenden Rotationsachsen. Beide Rotationsachsen sind zyklisch umlaufend, stehen stets senkrecht aufeinander und schneiden sich im Mittelpunkt des Elektrons.

Der Randbereich des Lichtstrahls ist dadurch ausgezeichnet, dass die Wechselkomponente von Umfangs- und Radialkomponente betragsgleich sind und sich gegenseitig kompensieren, während die Wechselkomponente in Ausbreitungsrichtung zu Null wird. Die zeitlich (und räumlich) gleichförmige Komponente und die zu ihr gehörige gleich große Umfangskomponente haben an dieser Stelle eine Unstetigkeit und brechen ab. Dort wo die Wechselkomponente in Ausbreitungsrichtung auf Null abklingt, springt also auch die gleichförmige Komponente abrupt auf Null. Dem Randbereich des Lichtstrahls entspricht die begrenzende Kugeloberfläche des inneren Kerns des Elektrons. Für diese begrenzende Kugeloberfläche ergibt sich eine markante Besonderheit, für die es kein Analogon zum Lichtstrahl gibt:

Für die rotationsbedingte Überlagerungswelle gibt es keine Unstetigkeit und kein scharfes Abgrenzen gegenüber dem Umfeld wie beim Lichtstrahl. Im Gegenteil: Die umlaufenden Wirbel der Feinmasse setzen sich über die begrenzende Kugeloberfläche des Elektrons fort und reichen unbegrenzt über dessen Kernbereich hinaus in den umgebenden Raum. Die Masse des Elektrons teilt sich auf in die größere Teilmenge des Kernbereichs und eine kleinere Teilmenge, die, wie später noch geschildert, für die Wirkung elektrischer Ladung verantwortlich ist. Es gibt also zwar eine scharf definierbare Grenze des Elektrons, aber jenseits dieser Grenze wird das Elektron von seiner Ladungs-Feinmasse umgeben.

Wie die spätere Berechnung auf der Basis der Referenzgröße λ_C ergibt, beträgt die zu dieser Referenzgröße λ_C gehörige Ladungs-Feinmasse nur ca. 1,5 % der gesamten Masse des Elektrons. Deshalb wächst annähernd im gleichen (bescheidenen) Umfang die zugehörige Wellenlänge beziehungsweise der Radius des Kernbereichs, damit die Grundbeziehung (6.132) erfüllt bleibt. Unbeschadet dessen werden in der Regel alle Rechengrößen auf die unveränderte COMPTON-Wellenlänge des Elektrons bezogen. Bei deren Bewertung, insbesondere bei Toleranzen von auf verschiedenen Wegen gewonnenen Ergebnissen, ist der geschilderte Zusammenhang jedoch zu bedenken.

Unter den geschilderten Voraussetzungen lässt sich in einer ersten (sehr guten) Näherung die Ladungs-Feinmasse m_q berechnen: Die Gesamtmasse des Elektrons sei m_e . Dann ist für alle

Teile des Gesamtstroms des Elektrons

$$I_m = \sqrt{\frac{m_e}{\lambda_C}} \cdot c \quad (7.19)$$

die maßgebende Geschwindigkeit identisch mit der Lichtgeschwindigkeit c und die maßgebende Wellenlänge identisch mit der COMPTON-Wellenlänge λ_C des Elektrons. Dabei kommt in der Wellenlänge λ_C zum Ausdruck, dass es hinsichtlich Energie und Strom prinzipiell keinen Unterschied geben kann zwischen der sich geradlinig fortpflanzenden Welle und der in sich geschlossenen Welle des Elektrons. Das ist die natürliche Konsequenz der Erhaltung der Energie und der Äquivalenz von Masse und Energie entsprechend der Beziehung (6.9) nach EINSTEIN.

Eine Konsequenz dieser Erkenntnis ist außerdem, dass mit der COMPTON-Wellenlänge λ_C die natürliche Referenzgröße vorliegt für die Definition der für das Elektron maßgebenden Werte von Strömen, elektrischer Ladung und Kräften. Deswegen gilt für das Bildungsgesetz des zirkulierenden Stromes der Ladungs-Feinmasse

$$I_q = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \quad (7.20)$$

und das Verhältnis

$$\frac{I_q}{I_m} = \frac{\sqrt{m_q}}{\sqrt{m_e}}. \quad (7.21)$$

Der Ladungsstrom verhält sich zur Differenz aus Gesamt- und Ladungsstrom wie Überlagerungswelle zur Grundwelle (Ausgangswert ohne Berücksichtigung der Rückkopplung) im Kern des Elektrons:

$$\frac{\sqrt{m_q}}{\sqrt{m_e} - \sqrt{m_q}} = \frac{1}{2\pi + 1}. \quad (7.22)$$

Die Bildung dieses Verhältnisses basiert auf der einheitlichen Bezugsgröße in Form der COMPTON-Wellenlänge.

Das Verhältnis aus Überlagerungswelle und der durch Rückkopplung **reduzierten** Grundwelle ergibt die gleichwertige Beziehung:

$$\frac{\sqrt{m_q}}{(\sqrt{m_e} - \sqrt{m_q}) - \sqrt{m_q}} = \frac{1}{2\pi}. \quad (7.23)$$

Daraus errechnet sich das Verhältnis von Ladungs-Feinmasse zur Gesamtmasse des Elektrons auf der Basis der Referenzgröße λ_C zu

$$\frac{m_q}{m_e} = \frac{1}{[2(\pi + 1)]^2} = 0,0145... \approx 1,5\%. \quad (7.24)$$

D.h., der für die Wirbel der Feinmasse und die elektrische Polarität des Elektrons maßgebende Teil des Elektroimpulses überspringt die Grenze um den Kern des Elektrons. Jenseits dieser Grenze zirkuliert nur eine Untermenge der Gesamtmasse des Elektrons und überträgt die Wirbel in strahlenförmiger Ausbreitung in den Raum. Der sich für m_q ergebende Wert ist streng an die Referenzgröße λ_C geknüpft. Seine physikalische Aussage wird später noch näher auszudeuten sein. Das reale Massenverhältnis von Elektronenkern und umgebender Ladungs-Feinmasse wird dabei aufgezeigt.

Mit der Reduktion der Masse m_e des Elektrons auf den Wert von

$$m_e - m_q = m_e \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{[2(\pi + 1)]^2} \right\} \quad (7.25)$$

im Kern des Elektrons ist als Näherungswert die entsprechende Verlängerung der COMPTON-Wellenlänge auf den Wert

$$\lambda_C + \Delta\lambda_C = \lambda_C \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{[2(\pi+1)]^2}} \quad (7.26)$$

verbunden.

Zusammenfassend ist das Elektron also gleichzeitig elementarer Magnet, dessen Pole durch die Rotationsachse und den Drehsinn fixiert sind, und Ladungsträger, dessen Wirkung auf den Wirbeln aufgrund der komplexen Rotation beruht. Der resultierende Drehsinn der Wirbel, der sich in der Definition von positiver und negativer Ladung manifestiert, ist dabei dadurch bestimmt, welchen Drehsinn die interne Rotation (Umfangskomponente) in Relation zur überlagerten Rotation um den Mittelpunkt des Elektrons (Rotationskomponente) besitzt.

In der Aufteilung der ursprünglichen Grundwelle (Ausgangswert) in die Überlagerungswelle und die entsprechend reduzierte Grundwelle verbirgt sich aber noch mehr als die beschriebene Gleichgewichtsbedingung nach dem Verhältnis der Durchsatzflächen, also entsprechend 1 : 2 π . Denn diese Speisung der Überlagerungswelle aus der Grundwelle entspricht einer Rückwirkung (im Sinne einer Gegenkopplung) der Überlagerungswelle auf die Grundwelle im Verhältnis 1 : 1.

Diese Gegenkopplung bedeutet, dass die Überlagerungswelle nicht nur mit ihren 3 räumlichen Komponenten jeweils senkrecht auf den entsprechenden räumlichen Komponenten der Grundwelle steht, sondern sie auch im Umfange der Überlagerungswelle kompensiert. Als Konsequenz der komplexen Rotation speist also die Grundwelle nicht nur die Überlagerungswelle, sondern diese wirkt in gleicher Größenordnung auf die Grundwelle kompensierend zurück. In dieser Interaktion haben wir den Wesenskern der elektrischen Induktion vor uns!

Für die Überlagerungswelle sowie den korrespondierenden gleich großen Anteil der Grundwelle, der kompensiert wird, gilt zwar uneingeschränkt der Elektroimpulssatz. Die Natur der komplexen Rotation bewirkt aber das Auslösen des korrespondierenden Partners (Überlagerungswelle) beziehungsweise dessen Rückwirkung. Innerhalb des Elektronenkerns bis hin zu dessen äußerer Begrenzung sind damit die Verhältnisse eindeutig definiert. An der äußeren Begrenzung des Kerns ist - wie bereits erwähnt - der zeitlich alternierende Teil der Rotationskomponente und damit der Anteil, den sie zur Oberflächenkomponente beiträgt, auf Null abgeklungen. Dabei gilt aber die wesentliche Besonderheit, dass die Umfangskomponente als (im Gegensatz zur Rotationskomponente) verbliebener Anteil der Oberflächenkomponente, nach deren Natur in ein Paar gleich großer, senkrecht zueinander wirkender Komponenten aufgespaltet ist. Damit bleibt der zugehörige Wirbel der Feinmasse an der Grenze des Elektronenkerns und über die Grenze hinaus erhalten. Die Rotationskomponente überspringt quasi in verkappter Form diese Grenze. Unbeschadet dessen ist aber mit Verlassen des Kerns ein singulärer Sprung in der Form gegeben, dass die Grundwelle abbricht, während für die Überlagerungswelle die Kontinuität gewahrt bleibt. Damit existiert außerhalb des Kerns ein Abbild der Grundwelle mit den Proportionen der beteiligten Komponenten, wie sie an der Grenze des Elektronenkerns gegeben sind. Unabhängig vom Abklingen der Überlagerungswelle mit zunehmendem räumlichen Abstand zum Kern bleiben diese Proportionen erhalten.

Die Ladungs-Feinmasse zirkuliert aufgrund der Paarigkeit der Oberflächenkomponenten in komplexer Rotation einerseits als Welle auf Großkreisen um den Mittelpunkt des Elektrons. Andererseits zirkuliert die korrespondierende Welle senkrecht dazu auf den Meridianen. In radialer Richtung schwingt die Feinmasse, ohne dass es zu effektivem Feinmasse-Transport kommt. Aus der Überlagerung der Wellen der paarigen Oberflächenkomponenten resultiert die schraubenförmige Bewegung der Wirbel, die alle Raumpunkte um den Kern des Elektrons erfasst. Diese Bewegung entspricht bildlich einem Kollektiv von Schrauben, die sich leerlaufend ohne Vorschub drehen. Sobald Eingriff mit „fremder“ zirkulierender Feinmasse existiert,

entfaltet diese Schraubenbewegung jedoch die innewohnende Kraft als elektrische Feldstärke.

Das außerhalb des Kernbereichs induzierte Abbild der Grundwelle entspricht den Proportionen im Bereich der Kerngrenze des Elektrons. Im Sinne eines Abklingens der Überlagerungswelle muss auch das Abbild der Grundwelle in Abhängigkeit vom Abstand r abklingen. Bezogen auf den Mittelpunkt des Elektrons ergibt der Radius r die zugehörige Kugeloberfläche. Die mit Lichtgeschwindigkeit strömende Teilmenge $m(r)$ der gesamten Ladungs-Feinmasse m_q zwischen dieser Kugeloberfläche und dem Unendlichen ergibt den Strom I_{qr} , der in Analogie zu (7.20) definiert ist zu

$$I_{qr} = \sqrt{\frac{m(r)}{\lambda_C}} \cdot c. \quad (7.27)$$

Mit

$$\lambda_r = 2\pi r$$

gilt die Beziehung

$$I_{qr} \cdot \lambda_r = \text{konst.} \quad (7.28)$$

Darin kommt zum Ausdruck, dass - bezogen auf den Mittelpunkt des Elektrons - der Strom proportional zum Reziprokwert von λ_r abklingt. Die Wirkung der Kopplung jedes dieser nach (7.27) definierten Ströme ist nach (7.28) immer die gleiche, weil die Länge des „Leiters“, nämlich λ_r , im gleichen Umfang wächst wie der Abstand zum Mittel- und Bezugspunkt, womit das Abklingen des Stromes kompensiert wird.

Als Ergebnis der induktiven Wirkungen im Elektron ist die Ladungs-Feinmasse wie ein aus einem Zentrum heraus angeregtes Wellenbad aufzufassen, dessen Schwingungen aber im Gegensatz zu dem als Vergleich gewählten normalen Wellenbad nicht nur oberflächenorientiert sind, sondern alle 3 Dimensionen des Raums einbeziehen.

Von herausgehobener Bedeutung sind die Ladungs-Wellen in radialer Richtung. Aus der Sicht einer aus dem Mittelpunkt des Elektrons als Ursprung entspringenden radialen Linie können die elektrischen Verhältnisse mit einer eingeschwungenen, aber leer laufenden Leitung großer Länge verglichen werden, über die kein Energietransport, sprich: Feinmasse-Transport stattfindet. Diese „Leitung“ ist wie ein Lichtstrahl verlustfrei und hat über ihre Länge kontinuierlich sich ändernde elektrische Parameter. Trotz dieser Besonderheiten hat sie aber ein Merkmal mit den Gesetzmäßigkeiten im Lichtstrahl gemeinsam. Die Welle hat einen Drehsinn, wobei beide Drehrichtungen an sich gleichberechtigt sind. Ordnen wir dem Rechtsdrehsinn die Definition der positiven Ladung zu, so entspricht dem Linksdrehsinn dann die negative Ladung.

Für die Interaktion von Ladungs-Feinmassen zweier verschiedener Ladungsträger ist es nun entscheidend, ob sie sich - bildlich dargestellt - quasi ineinander schrauben, also sich anziehen, oder die gegensinnigen Bewegungen ausführen, sich also abstoßen.

Bildlich dargestellt, besitzt jeder Ladungsträger in radialer Richtung ein beliebig dichtes Kollektiv von schraubenförmig sich drehenden Feinmasse-Körpern, deren Wirkung freilich nach außen kontinuierlich abnimmt. Rechtsdrehsinn entspricht dabei - wie bereits gesagt - positiver Ladung und Linksdrehsinn negativer Ladung.

Für das Verständnis ist aber weiterhin wichtig, dass diese sich drehenden Feinmasse-Körper zum einen ohne starren Eingriff sich gegenseitig durchdringen, dass benachbarte Körper andererseits aber nicht etwa synchron laufen - dann würden sich ihre Wirkungen gegenseitig kompensieren -, sondern einen für die Welle charakteristischen Zeitversatz aufzeigen. Auch darin können wir eine Analogie zum Lichtstrahl erkennen, bei dem von Schicht zu Schicht - also auch radial - Zeitversatz und Wellenausbreitung regieren.

7.2 Ladungs-Feinmasse, Stromdichte, Strom

Aus (7.28) folgt mit (7.20)

$$I_{qr} \cdot \lambda_r = I_q \cdot \lambda_C \quad (7.29)$$

und mit (7.27)

$$\sqrt{m(r)} \cdot \lambda_r = \sqrt{m_q} \cdot \lambda_C. \quad (7.30)$$

Der geometrische Körper mit dem Mittelpunkt M , der die Differenz zwischen der Kugel mit dem Radius r und der Kugel mit unendlichem Radius darstellt, umschließt eine Teilmenge $m(r)$ der gesamten Ladungs-Feinmasse m_q und es gilt ausgehend von (7.30) das Bildungsge-
setz:

$$m(r) = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r^2}. \quad (7.31)$$

Der Radius r_C dient dabei als Bezugspunkt und errechnet sich aus der COMPTON-Wellenlänge λ_C des Elektrons entsprechend der Beziehung

$$\lambda_C = 2\pi r_C. \quad (7.32)$$

Die COMPTON-Wellenlänge dient in der Folge als natürliche Referenzgröße. Die Ausdehnung der Ladungs-Feinmasse ist in der vorliegenden Form (7.31) keiner Grenze unterworfen. Bezugspunkt bleibt aber stets Radius r_C als Startpunkt. Dies gilt unabhängig davon, dass, wie später gezeigt wird, die Oberfläche des Elektronenkerns von dieser reinen Bezugsgröße abweicht. Auch der Differentialquotient des Ladungsstromes I_{qr} nach (7.27) mit (7.31)

$$\frac{dI_{qr}}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\sqrt{\frac{m(r)}{\lambda_C}} \cdot c \right] = \frac{d}{dr} \left[\sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C} \cdot \frac{r_C^2}{r^2}} \cdot c \right] = -\sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C} \cdot \frac{r_C^2}{r^4}} \cdot c \quad (7.33)$$

hat den zugehörigen Umfang $2\pi r_C$ als Bezugsgröße. Die von dieser Größe abgeleitete differentielle Feinmasse pro Längeneinheit im Hohlzylinder mit Radius r und der Schnittfläche dr^2 (Dicke x Länge) beträgt:

$$\frac{m_q}{\lambda_C} \cdot \frac{r_C^2}{r^4} \cdot dr^2. \quad (7.34)$$

Wird diesem Hohlzylinder eine Länge der differentiellen Größe dr zugeordnet, so erkennt man, dass er aus einer Kugelschicht der Dicke dr gedanklich hervorgeht. Für die Berechnung der Stromdichte J_q in Richtung einer Oberflächenkomponente ist deshalb die Wurzel aus vorstehender Größe (maßgebend für die beiden senkrecht zueinander verlaufenden, betrags-
gleichen differentiell kleinen Ströme im Hohlzylinder) durch die differentiell kleine Fläche $\pi r \cdot dr$, die durchströmt wird (wertgleich für beide Oberflächenkomponenten), zu dividieren. Das Ergebnis ist mit der durch die Verbindung zur rotierenden Feinmasse im Rotationskörper vorgegebenen Lichtgeschwindigkeit zu multiplizieren und es ergibt sich schließlich:

$$J_q = \frac{\sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C} \cdot \frac{r_C^2}{r^4} \cdot dr^2}}{\pi r \cdot dr} \cdot c, \quad (7.35)$$

$$J_q = \frac{\sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C} \cdot \frac{r_C}{r}}}{\pi r^2} \cdot c.$$

J_q bezieht sich dabei auf jede der beiden gleich großen, senkrecht zueinander verlaufenden Oberflächenkomponenten.

Ohne Interaktion mit einem anderen Ladungsträger beschränkt sich die Feinmasse-Strömung auf die beiden betragsgleichen, senkrecht zueinander verlaufenden Oberflächenkomponenten.

Der dritte „Kanal“, der senkrecht zu beiden Oberflächenkomponenten, also radial verläuft, ist der Interaktion mit einem anderen Ladungsträger vorbehalten, die später behandelt wird. Im Vorgriff darauf sei jedoch darauf hingewiesen, dass sich für diese Radialkomponente die Gleichheit der Durchsatzflächen entsprechend

$$\pi r \cdot dr = \frac{\pi r}{dr} \cdot dr^2$$

manifestiert. Während im Falle der Radialkomponente alle Teilflächen parallel durchströmt werden, sind diese Teilflächen bei den korrespondierenden Oberflächenkomponenten **räumlich** jeweils hintereinander zu durchlaufen. In beiden Fällen werden sie jedoch **gleichzeitig** durchströmt.

Aus der Stromdichte nach (7.35) lässt sich nun unmittelbar durch Integration der Strom $I_q(r)$ der rotierenden Feinmasse ermitteln, die den Wesenskern der elektrischen Ladung darstellt.

$$\begin{aligned} I_q(r) &= \int_r^{r \rightarrow \infty} J_q \cdot \pi r \cdot dr \\ &= \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \cdot \int_r^{r \rightarrow \infty} \frac{r_C}{r} \cdot \frac{\pi r \cdot dr}{\pi r^2} = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \cdot \int_r^{r \rightarrow \infty} \frac{r_C \cdot dr}{r^2} = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \cdot \frac{r_C}{r}; \\ I_q(r) &= \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \cdot \frac{r_C}{r}. \end{aligned}$$

Für den Gesamtstrom der elektrischen Ladung gilt mit $r = r_C$ in Übereinstimmung mit (7.20)

$$I_q = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c.$$

Mit der COMPTON-Wellenlänge λ_C korreliert die zugehörige Frequenz

$$f_C = \frac{c}{\lambda_C}$$

und die Periodendauer

$$T_C = \frac{1}{f_C} = \frac{\lambda_C}{c}.$$

Die elektrische Elementarladung Q_e entspricht nun dem Produkt aus dem Ladungsstrom I_q und der Periodendauer T_C :

$$Q_e = I_q \cdot T_C = \frac{I_q}{f_C}. \quad (7.36)$$

Daraus ergibt sich die gleichwertige Form

$$Q_e = I_q \cdot \frac{\lambda_C}{c}, \quad (7.37)$$

und mit (7.20) gilt:

$$Q_e = \sqrt{m_q \cdot \lambda_C}. \quad (7.38)$$

Rückblickend auf die Ableitung, ausgehend von (7.31) und einmündend in (7.38), zeigt sich, dass die COMPTON-Wellenlänge λ_C des Elektrons als Bezugsgröße nicht willkürlich ist. λ_C stellt die optimale Bezugsgröße dar, durch deren Wahl der zugehörige typische Wert m_q der Ladungs-Feinmasse definiert wird, so dass aus den Werten λ_C und m_q jeweils auf direktem Wege, also ohne Umrechnungsfaktoren, die Beziehungen (7.20) sowie (7.35) bis (7.38) gebildet werden können. Insbesondere ist auch die direkte Verknüpfung von Ladung und Strom über die Zeit in Sinne von (7.36) angelegt. Außerdem ist festzustellen, dass auf der Basis dieser Definitionen ausgehend von dem realen Radius des Elektronenkerns, wie er später ermittelt wird, bis ins Unendliche die physikalischen Verhältnisse durch die Beziehungen (7.31) - (7.35) zutreffend abgebildet werden.

Trotzdem wird auf den definitorischen Charakter der Ladungs-Feinmasse m_q hingewiesen. Denn das „echte“ Maß der Ladungs-Feinmasse außerhalb des Elektronenkerns ergibt sich nicht aus m_q , sondern aus $m(r)$ nach (7.31), wobei für r der „echte“ Radius des Elektronenkerns $r_e = \frac{\lambda_C'}{2} \approx \frac{\lambda_C}{2}$ zu setzen ist. Einzelheiten folgen später an geeigneter Stelle.

Wir müssen uns bei vorstehenden Beziehungen aber immer vor Augen halten, dass die COMPTON-Wellenlänge λ_C mit der Gesamtmasse m_e des (im vorliegenden Fall) betrachteten Elektrons entsprechend Beziehung (6.143) korreliert. m_q ist dagegen nur eine Teilmenge von m_e und die Proportion soll nachfolgend berechnet werden.

Der mit der Masse m_e des Elektrons mit Hilfe der COMPTON-Wellenlänge

$$\lambda_C = \lambda_{Ce}$$

des Elektrons definierte Strom

$$I_m = I_{me}$$

beträgt:

$$I_m = \sqrt{\frac{m_e}{\lambda_C}} \cdot c = \sqrt{m_e \cdot f_C \cdot c}. \quad (7.39)$$

Aus (7.36) errechnet sich:

$$I_q = Q_e \cdot f_C. \quad (7.40)$$

Somit kann gesetzt werden:

$$\frac{I_q}{I_m} = \frac{Q_e \cdot f_C}{\sqrt{m_e \cdot f_C \cdot c}} = \frac{Q_e}{\sqrt{m_e \cdot \lambda_C}}.$$

Mit Beziehung (6.143) gilt also:

$$\frac{I_q}{I_m} = \frac{Q_e}{\sqrt{\frac{h}{c}}} = 0,121... \quad (7.41)$$

und

$$Q_e = \sqrt{\frac{h}{c}} \cdot 0,121... \quad (7.42)$$

Die Ladung Q_e (die üblicherweise in der Literatur die Bezeichnung e trägt: $e = Q_e$) wird in Listen der Naturkonstanten in der Regel in der physikalischen Einheit COULOMB = C = As angegeben. Entsprechend (6.23) ist deshalb jeweils wie folgt umzurechnen:

$$Q_e [C] = \sqrt{k_A} \cdot Q_e \left[\sqrt{kg \cdot m} \right].$$

Es lässt sich nun weiterhin ableiten:

$$\frac{I_q}{I_m} = \frac{\sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C} \cdot c}}{\sqrt{\frac{m_e}{\lambda_C} \cdot c}} = \sqrt{\frac{m_q}{m_e}}.$$

Mit (7.41) gilt also:

$$g = \frac{m_q}{m_e} = \frac{Q_e^2 \cdot c}{h} = 0,014594\dots \quad (7.43)$$

Die Abweichung der Näherung nach (7.24) gegenüber (7.43) beträgt also ca. 1%.

Der Strom in einem Leiter resultiert aus der Bewegung der Ladungsträger. Deshalb ergibt sich der Strom I aus der Zahl der Elementarladungen pro Längeneinheit $\frac{Q_e}{l}$ und der Geschwindigkeit v zu

$$I = \frac{Q_e}{l} \cdot v.$$

Setzt man den Strom I ins Verhältnis zum Ladungsstrom nach (7.40)

$$I_q = Q_e \cdot f_C = Q_e \cdot \frac{c}{\lambda_C},$$

ergibt sich:

$$\frac{I}{I_q} = \frac{v \cdot \lambda_C}{c \cdot l} = k_I.$$

Somit ist:

$$I = k_I \cdot I_q.$$

Nach (7.29) ist:

$$I_{qr} \cdot \lambda_r = I_q \cdot \lambda_C.$$

Wir definieren als vom Abstand r beziehungsweise von λ_r abhängige Größe

$$H_q(r) = \frac{I_{qr}}{\lambda_C} = \frac{I_q}{\lambda_r}$$

den spezifischen Wert der magnetischen Feldstärke der Ladungseinheit und erhalten die Form:

$$H_q(r) \cdot \lambda_r = I_q. \quad (7.44)$$

Dies ist die Grundform des Durchflutungssatzes. Die Wirkung von $H_q(r)$ ist dabei punktförmig aufzufassen und Beziehung (7.44) hat Analogie zum Gleichgewicht von Momenten. Die mit der magnetischen Feldstärke $H(r)$ gebildete allgemeine Form des Durchflutungssatzes

$$H(r) \cdot \lambda_r = I$$

zeigt im Vergleich mit (7.44), dass beide den gleichen Ursprung besitzen, nämlich die Gesetzmäßigkeit strömender Feinmasse, die allerdings auch bei autonomer, vom Ladungsträger abgelöster Feinmasse - Strömung (Funkwelle, Licht) ihre Gültigkeit beibehält.

7.3 Ableitung der Differentialgleichung

In weitgehender Analogie zu der Differentialgleichung der radialen Ausbreitung in der Koaxialleitung nach Unterabschnitt 4.1 ergibt sich die Differentialgleichung der radialen Ausbreitung im kugelförmigen Strömungsfeld des Elektrons. Im Unterschied zur Ableitung für den allgemeinen Fall einer Koaxialleitung tritt beim Elektron an die Stelle des spezifischen ohmschen Widerstandes ρ die spezifische kapazitive Widerstand $\frac{1}{\omega\epsilon_0}$. Da induktive und kapazitive Komponente im inneren Strömungsfeld des Elektrons gegenphasig auftreten und sich gegenseitig im Gleichgewicht halten, wird analog den Verhältnissen in einem Lichtstrahl der Faktor k_0 zu $k_0 = 1$ und für die räumlich konstante Komponente der Stromdichte wird $J_k = 0$ gesetzt, so dass die räumlich variable Stromdichte J_v identisch mit der resultierenden Stromdichte J ist:

$$J_v = J.$$

Demgemäß entfällt der Index v auch für alle abhängigen elektrischen Größen I , H und Φ' (Strom, magnetische Feldstärke und der auf die Längeneinheit bezogene magnetische Fluss). Mit dem zunächst nicht definierten Grenzwert r_D , der die äußere Begrenzung des Magnetflusses markiert, ergibt sich, beginnend mit der analogen Beziehung zu (4.2):

$$\Phi'(r) = \mu_0 \int_r^{r_D} H(r) \cdot dr. \quad (7.45)$$

Aus dem Induktionsgesetz resultiert:

$$\frac{1}{\omega\epsilon_0} \cdot J(r) = \omega \cdot \Phi'(r)$$

oder

$$\Phi'(r) = \frac{1}{\omega^2\epsilon_0} \cdot J(r). \quad (7.46)$$

Mit Einsetzen von (7.45) in (7.46) ergibt sich:

$$\mu_0 \int_r^{r_D} H(r) \cdot dr = \frac{1}{\omega^2\epsilon_0} \cdot J(r)$$

beziehungsweise

$$\int_r^{r_D} H(r) \cdot dr = \frac{1}{\omega^2\epsilon_0\mu_0} \cdot J(r) = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot J(r). \quad (7.47)$$

Mit

$$\alpha_0^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (7.48)$$

und Differenzieren von (7.47) ergibt sich schließlich die Form:

$$H(r) = -\frac{1}{\alpha_0^2} \cdot \frac{d[J(r)]}{dr}. \quad (7.49)$$

Die Gesetzmäßigkeit von *Biot* und *Savart* sowie *Ampère* für die magnetische Feldstärke $H = H(r)$ lautet:

$$H = I \cdot \Delta l \cdot \frac{\sin \alpha}{4\pi r^2} \quad \text{oder}$$

$$H \cdot 4\pi r^2 = I \cdot \Delta l \cdot \sin \alpha.$$

Dabei ist I der Strom in dem beliebig kurzen Teilstück Δl , das Ortpunkt und Richtung von I definiert. Der Ortpunkt der magnetischen Feldstärke H ist durch den Abstand r von I sowie durch den Winkel α von r gegen die Richtung von I definiert.

Die Anwendung dieser Grundform auf die Strömungsverhältnisse im kugelförmig gedachten Elektron führt zu der Form:

$$H \cdot 4\pi r^2 = \int_0^r J \cdot 4\pi r^2 \cdot dr. \quad (7.50)$$

Dabei ist das Produkt $I \cdot \Delta l$ in das Integral der Stromdichte J über die Volumeneinheit (Kugelschichten der differentiellen Ausdehnung dr) übergegangen und unter der Bedingung der allseits geschlossenen Kugel der Winkel α konstant, und zwar $\alpha = 90^\circ$ geworden. Nach Division von (7.50) durch 4π und Differenzieren erhält man die Form:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{H(r) \cdot r^2}{r^2} \right] = J(r). \quad (7.51)$$

Für die nachfolgenden Gleichungen (7.52) - (7.55) bedienen wir uns zur Vereinfachung der abgekürzten Schreibweise

$$J(r) = J$$

und

$$H(r) = H.$$

Durch Division der Gleichungen (7.51) und (7.49) lässt sich die Form ableiten:

$$\frac{dJ}{J} \cdot \frac{d(H \cdot r^2)}{H \cdot r^2} = -\alpha_0^2, \quad (7.52)$$

und weiterhin:

$$\left[\frac{d}{dr} (\ln J) \right] \cdot \frac{d}{dr} [\ln (H \cdot r^2)] = -\alpha_0^2. \quad (7.53)$$

Mit Gleichung (7.49) errechnet sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} [\ln (H \cdot r^2)] &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ}{dr} \cdot r^2 \right) \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ}{dr} \right) + 2 \cdot \ln r - \ln (\alpha_0^2) \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ}{dr} \right) \right] + \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (7.53) ergibt sich schließlich die Form:

$$\left[\frac{d}{dr} (\ln J) \right] \cdot \left\{ \frac{d}{dr} \left[\ln \left(-\frac{dJ}{dr} \right) \right] + \frac{2}{r} \right\} = -\alpha_0^2. \quad (7.54)$$

Allein zur Angleichung an die Ableitung nach Unteranschnitt 4.1 substituieren wir die Variable r durch die Variable s und erhalten in völliger Analogie zu (7.54):

$$\left[\frac{d}{ds} (\ln J) \right] \cdot \left\{ \frac{d}{ds} \left[\ln \left(-\frac{dJ}{ds} \right) \right] + \frac{2}{s} \right\} = -\alpha_0^2. \quad (7.55)$$

Mit der abgekürzten Schreibweise

$$J = J(s) = J_0 \cdot e^{f(s)} \quad (7.56)$$

ist

$$\ln J = \ln J_0 + f(s)$$

und

$$\frac{d}{ds}(\ln J) = \frac{d}{ds} [f(s)]. \quad (7.57)$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{dJ}{ds} = J_0 \cdot \frac{d}{ds} [f(s)] \cdot e^{f(s)}$$

und

$$\ln \left(-\frac{dJ}{ds} \right) = \ln J_0 + \ln \left\{ -\frac{d}{ds} [f(s)] \right\} + f(s)$$

sowie

$$\frac{d}{ds} \left[\ln \left(-\frac{dJ}{ds} \right) \right] + \frac{2}{s} = \frac{-\frac{d^2}{ds^2} [f(s)]}{-\frac{d}{ds} [f(s)]} + \frac{d}{ds} [f(s)] + \frac{2}{s}. \quad (7.58)$$

(7.56) und (7.57) ergeben, eingesetzt in (7.55):

$$\left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\} \cdot \left\{ \frac{\frac{d^2}{ds^2} [f(s)]}{-\frac{d}{ds} [f(s)]} + \frac{d}{ds} [f(s)] + \frac{2}{s} \right\} = -\alpha_0^2.$$

Nach Multiplizieren ergibt sich in weitgehender Übereinstimmung mit (4.18):

$$\frac{d^2}{ds^2} [f(s)] + \left\{ \frac{d}{ds} [f(s)] \right\}^2 + \frac{2 \cdot \frac{d}{ds} [f(s)]}{s} = -\alpha_0^2. \quad (7.59)$$

Die von (4.18) ausgehende Lösung der Differentialgleichung nach Unterabschnitt 4.1 ist bewusst so allgemein gefasst, dass auch die Lösung von (7.59) bereits enthalten ist. Unter Bezug auf (4.25) erkennt man in (7.59) im Vergleich mit (4.18) den Parameter

$$q = 2 \quad (\text{neben } n = 0, p = 1)$$

für das Strömungsfeld im Elektron im Gegensatz zu

$$q = 1 \quad (\text{neben } n = 0, p = 1)$$

für das Strömungsfeld der Koaxialleitung.

Die Lösung der Differentialgleichung für die Strömungsverhältnisse im Elektron ist somit durch die folgenden im Unteranschnitt 4.1 bereits abgeleiteten markanten Größen bestimmt:

$$\tau_2 = \frac{\pi}{2}$$

nach (4.40), und

$$\gamma_2 = 1$$

nach (4.93).

Die Lösung der Differentialgleichung und die Berechnung der maßgebenden Größe τ_2 erlaubt nun unmittelbar, die räumliche Begrenzung des Elektrons zu berechnen. Der die äußere Grenze markierende Radius ist identisch mit der Eindringtiefe, die analog (6.52) für den Lichtstrahl zu berechnen ist. Während aber in (6.52) für den Lichtstrahl $\tau = 1, 20241277885$ die bestimmende Größe darstellt, ist für das Elektron $\tau_2 = \frac{\pi}{2}$ der maßgebende Wert, mit dessen Hilfe sich der Radius des Elektrons wie folgt berechnet:

$$D_e = 2\tau_2 \cdot \frac{c}{\omega} = \pi \cdot \frac{c}{\omega}. \quad (7.60)$$

Die für das Elektron maßgebende Kreisfrequenz ist aber aufgrund der Quantisierung der Energie durch Beziehung (6.143) vorgegeben, aus der sich mit Hilfe der grundlegenden Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge

$$\begin{aligned} f \cdot \lambda_C &= c \\ \omega &= 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{c}{\lambda_C} \end{aligned} \quad (7.61)$$

errechnet.

(7.61) eingesetzt in (7.60) ergibt dann mit Umbenennung $D_e = r_e$:

$$r_e = \frac{\lambda_C}{2}. \quad (7.62)$$

Bis hierher ist die Berechnung insoweit nur fiktiver Natur, als die Unterteilung des Elektrons in seinen Kernbereich und die diesen Kernbereich umgebende Feinmasse der elektrischen Ladung noch unberücksichtigt geblieben ist. Deshalb soll in dem nächsten Schritt die Berechnung so modifiziert werden, dass dem Kern des Elektrons nur die gegenüber der Gesamtmasse des Elektrons m_e reduzierte Masse m_e' zugewiesen wird, wobei dann die Differenz der Massen

$$m_q' = m_e - m_e' = g_s \cdot m_e. \quad (7.63)$$

für die Ladungs-Feinmasse steht. Daraus ergibt sich:

$$\frac{m_e'}{m_e} = 1 - g_s. \quad (7.64)$$

Für die reduzierte Feinmasse im Elektronenkern ergibt sich aber aufgrund der obligatorischen Quantisierung der Energie eine vergrößerte Wellenlänge λ_C' mit

$$\frac{\lambda_C'}{\lambda_C} = \frac{1}{1 - g_s}. \quad (7.65)$$

Dieser Zusammenhang wird aus der entsprechend modifizierten Beziehung (6.143) für die Quantisierung der Energie ersichtlich:

$$m_e \cdot \lambda_C = m_e' \cdot \lambda_C' = \frac{h}{c}. \quad (7.66)$$

Unbeschadet der vorstehenden Überlegung gilt die für die Ladungs-Feinmasse m_q gewählte optimale Referenzgröße in Form der unveränderten COMPTON-Wellenlänge λ_C in analoger Weise auch für das Elektron mit seiner Gesamtmasse m_e . Ausgehend von Definitionsgleichung (7.43), aber zur Unterscheidung von der nachfolgenden, davon unabhängigen Berechnungsmethode, wird $g \rightarrow g_e$ gesetzt und es ergibt sich:

$$m_q = g_e \cdot m_e. \quad (7.67)$$

m_q ist also die durch Definition auf Basis der COMPTON-Wellenlänge λ_C festgelegte Größe der Ladungs-Feinmasse. m_q' berücksichtigt dagegen die durch die auf λ_C' gedehnte Wellenlänge entsprechend reduzierte Ladungs-Feinmasse. Unter Bezug auf (7.31) kann dann später der Wert von $g_e(\lambda_C)$ aus dem Wert $g_s(\lambda_C')$ errechnet werden. Um den Anteil der Ladungs-Feinmasse $g_s \cdot m_e$ an der gesamten Masse m_e des Elektrons berechnen zu können, stellen wir folgende Überlegung an: An der Kerngrenze des Elektrons muss offensichtlich die Radialkomponente der Stromdichte im Kern sowohl identisch mit der Umfangs- beziehungsweise Oberflächenkomponente sein, als auch mit der nach (7.35) definierten Stromdichte der

Ladungs-Feinmasse. Diese Gleichsetzung führt zu folgender Beziehung:

$$\frac{\sqrt{\frac{m_e \cdot (1-g_s) \cdot \left(\frac{V_K}{V_Z}\right)^{\frac{2}{3}}}{2\pi \cdot \frac{\lambda_C'}{2}}} \cdot v_R}{\pi \cdot \left(\frac{\lambda_C'}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\frac{m_e \cdot g_s \cdot (1-g_s)^{\frac{2}{3}}}{2\pi \cdot \frac{\lambda_C'}{2}}} \cdot c \cdot \sqrt{\pi}}{\pi \cdot \left(\frac{\lambda_C'}{2}\right)^2} \quad (7.68)$$

Dabei geht die rechte Gleichungsseite aus (7.35) auf der Basis folgender Modifikationen hervor:

$$m_q \rightarrow m_q' = g_s \cdot m_e, \quad \lambda_C \rightarrow \pi \lambda_C', \quad r_C \rightarrow \frac{\lambda_C'}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{\lambda_C'}{2}.$$

Hervorzuheben ist, dass der Ladungsstrom nicht nur von $\lambda_C \rightarrow \lambda_C'$ hochgerechnet wird, sondern zur Anpassung an die geometrischen Verhältnisse im Elektronenkern auf das weit größere Verhältnis entsprechend $\lambda_C \rightarrow \pi \cdot \lambda_C'$! Für die beiden Werte der Stromdichte an der Kerngrenze des Elektrons, die in Gleichung (7.68) einander gegenübergestellt sind, gibt es einen entscheidenden Unterschied für die jeweils maßgebende Geschwindigkeit der Feinmasse. Während auf der linken Gleichungsseite für den Elektronenkern die aus der Differentialgleichung sich ergebende Geschwindigkeit v_R unmittelbar in Ansatz zu bringen ist, resultiert auf der rechten Gleichungsseite für den Ladungsstrom wegen der für die Vergleichbarkeit erforderlichen Umrechnung der Strombahnlänge von $\lambda_C \rightarrow \pi \cdot \lambda_C'$ eine entsprechende Anpassung der maßgebenden Geschwindigkeit von $c \rightarrow \sqrt{\pi} \cdot c$ beziehungsweise deren Quadrate von $c^2 \rightarrow \pi \cdot c^2$. Dieser Faktor π für die Umrechnung resultiert aus der Definition von Elementarladung Q_e und Ladungs-Feinmasse m_q auf der Basis der COMPTON-Wellenlänge λ_C , während für den Elektronenkern der Umfang an der Kerngrenze nach der Differentialgleichung $\pi \cdot \lambda_C$ beträgt (beziehungsweise mit Berücksichtigung der Dehnung $\pi \cdot \lambda_C'$). Dieser Faktor π für die Anpassung spielt später bei der Berechnung der Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungsträgern eine gewichtige Rolle hinter der das wertmäßig nachrangige Verhältnis $\frac{\lambda_C'}{\lambda_C}$ zurücksteht. Unbeschadet dieses nur geringfügig vom Zahlenwert 1 abweichenden Verhältnisses soll jetzt aber sein Einfluss näher beleuchtet werden.

Zu den einzelnen Gliedern dieser Gleichung sind folgende Erklärungen zu machen: Bei der gedanklichen Verschiebung der Grenze zwischen Kern und maßgebender Ladung von λ_C auf λ_C' ist das Volumen die natürliche Bezugsgröße, denn das, was dem Kern an Raum zugeschlagen wird, wird dem Bereich der Ladung entzogen. Die Berücksichtigung der Balance zwischen Kern und Bereich der Ladung erfordert nun aber, die unterschiedliche Raumabhängigkeit der Masse von Kern und Ladung durch einen Korrekturfaktor zu berücksichtigen, wobei die Kernmasse als Bezugsgröße gilt und die Ladungs-Feinmasse entsprechend korrigiert wird. Bezogen auf den Raum ist

$$m_e \cdot (1 - g_s) = m_e \cdot \left(\sqrt[3]{1 - g_s}\right)^3$$

abhängig von einer effektiven Längenänderung in Höhe von $\sqrt[3]{1 - g_s}$. Diese effektive Längenänderung ist im Hinblick auf die für die Ladungs-Feinmasse nach (7.31) gegebene quadratische Abhängigkeit vom Radius entsprechend zu quadrieren. Mit dem sich daraus ergebenden Wert von $(1 - g_s)^{\frac{2}{3}}$ ist schließlich die Ladungs-Feinmasse $m_e \cdot g_s$ auf der rechten Gleichungsseite unter der Wurzel im Zähler zu multiplizieren, um die unterschiedliche Raumabhängigkeit von Kern einerseits und Ladung andererseits zu erfassen.

Auf der linken Gleichungsseite ist unter der Wurzel im Zähler neben der reduzierten Masse des Kerns auch noch der von Beziehung (7.5) ausgehende Korrekturfaktor $\left(\frac{V_K}{V_Z}\right)^{\frac{2}{3}}$ eingefügt, der die unterschiedliche Massendichte von zylinderförmigem Lichtstrahl und kugelförmigem

Elektron andererseits berücksichtigt. Der Exponent dieses Korrekturfaktors berücksichtigt die Abhängigkeit von der Dehnung des Kerndurchmessers von λ_C auf λ_C' .

Unter der Wurzel ist auf linker wie rechter Gleichungsseite also jeweils die maßgebende Feinmasse der Strömung erfasst. Deshalb kann auf der rechten Gleichungsseite für die Ladungsfeinmasse unmittelbar das nach (7.35) ermittelte Ergebnis in Ansatz gebracht werden, wenn

$$r = \frac{\lambda_C'}{2}$$

gesetzt wird und für m_q'

$$m_q' = g_s \cdot m_e.$$

Zur Bildung der Stromdichte aus dem Quotienten des maßgebenden Stromes im Zähler und der Bezugsfläche im Nenner, ist für beide Gleichungsseiten von identischen Werten des Nenners nach Maßgabe von Beziehung (7.35) für $r = \frac{\lambda_C'}{2}$ auszugehen.

An der Kerngrenze, also bei $z = 1$ errechnet sich das Verhältnis

$$\frac{v_R}{c} = \frac{v_U}{c} = 0,202\,642\,367\,284\,674.$$

Aus (7.68) errechnet sich:

$$g_g = \left(\frac{v_R}{c \cdot \sqrt{\pi}} \right)^2 \cdot \left(\frac{V_K}{V_Z} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,014\,245\,297\,177\,123, \quad (7.69)$$

$$g_g = \frac{g_s}{(1 - g_s)^{\frac{1}{3}}}, \quad (7.70)$$

$$g_s = 0,014\,177\,654\,857\,377\,1. \quad (7.71)$$

Wie zu (7.67) bereits ausgeführt, lässt sich schließlich aus dem Wert g_s (λ_C') mit Hilfe der Beziehung (7.31) der zur Bezugsgröße λ_C gehörige Wert von $g_e(\lambda_C)$ berechnen. Aus (7.31) ergibt sich mit (7.65):

$$\frac{m_q}{m_q'} = \left(\frac{\lambda_C'}{\lambda_C} \right)^2 = \frac{1}{(1 - g_s)^2}.$$

Dabei wird in (7.31) eingesetzt:

$$m(r) \rightarrow m_q', \quad r \rightarrow r_C' \quad \text{und} \quad \lambda_r = 2\pi r \rightarrow \lambda_C' = 2\pi r_C'.$$

Mit $g_s = \frac{m_q'}{m_e}$ aus (7.63) ergibt sich schließlich:

$$\frac{m_q}{m_q'} \cdot \frac{m_q'}{m_e} = \frac{m_q}{m_e} = g_e(\lambda_C) = \frac{g_s}{(1 - g_s)^2}.$$

Es errechnet sich der Wert von

$$g_e(\lambda_C) = 0,014\,588\,380\,555\,749. \quad (7.72)$$

Die relative Abweichung von g_e gegenüber dem nach (7.43) errechneten Wert von g beträgt ca. 0,4‰.

Bei der Beurteilung der mit den Werten von g_e beziehungsweise m_q verknüpften Toleranzen drängt sich der Schluss auf, dass die im Mikrokosmos geltenden Gesetzmäßigkeiten durchaus die uns aus dem Makrokosmos bekannten elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten einschließen. Hier einen künstlichen, der Realität widersprechenden Widerspruch zu konstruieren,

kann dem Eindringen in die spezifischen Naturgesetzmäßigkeiten im Mikrokosmos sicher nicht dienlich sein.

Der Wert von m_q ist, wie bereits an anderer Stelle ausgeführt, definitorischer Natur. Er ist nicht identisch mit dem „echten“ Anteil der Ladungs-Feinmasse, der die Bezeichnung m_{qK} als Feinmasse außerhalb des Elektronenkerns tragen soll.

Zunächst ist festzustellen, dass der Radius des Elektronenkerns nach (7.62)

$$r_e = \frac{\lambda_C}{2}$$

beträgt. Die Dehnung berücksichtigend errechnet sich daraus mit (7.65)

$$r_e' = \frac{\lambda_C}{2 \cdot (1 - g_s)}. \quad (7.73)$$

(7.62) eingesetzt in (7.31) ergibt:

$$m_{qK} = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r_e^2} = m_q \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_C}{2\pi}\right)^2}{\left[\frac{\lambda_C}{2}\right]^2} = m_q \cdot \frac{1}{\pi^2}. \quad (7.74)$$

Die Dehnung berücksichtigend ergibt (7.73) eingesetzt in (7.31) mit $r_e \rightarrow r_e'$:

$$m_{qK'} = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r_e'^2} = m_q \cdot \frac{\left(\frac{\lambda_C}{2\pi}\right)^2}{\left[\frac{\lambda_C}{2 \cdot (1 - g_s)}\right]^2} = m_q \cdot \frac{(1 - g_s)^2}{\pi^2}. \quad (7.75)$$

Daraus ergibt sich ein Massenverhältnis von Ladung zu Kern des Elektrons:

$$\frac{m_{qK'}}{m_e} = \frac{m_q}{m_e} \cdot \frac{(1 - g_s)^2}{\pi^2} = g_e \cdot \frac{(1 - g_s)^2}{\pi^2} = \frac{g_s}{\pi^2} \approx 0,0014. \quad (7.76)$$

Der zur Kerngrenze des Elektrons gehörige Ladungsstrom errechnet sich aus dem im Anschluss an (7.35) erhaltenen Integrationsergebnis zu:

$$I_{qE}(r_e') = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \cdot \frac{r_C}{r_e'} = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c \cdot \frac{\frac{\lambda_C}{2\pi}}{\frac{\lambda_C}{2 \cdot (1 - g_s)}} = I_q \cdot \frac{1 - g_s}{\pi}. \quad (7.77)$$

7.4 Kraftwirkung elektrischer Ladung

Allein durch das Medium der Feinmasse kann Kraftwirkung auf eine Masse ausgeübt werden. Auf Materiebausteine (Beispiel: das Elektron) wirkt also eine Kraft immer nur indirekt, nämlich über die zu ihrer elektrischen Ladung gehörige Feinmasse. Die Feinmasse ist der exklusive Angriffspunkt für alle in der Natur wirkenden Kräfte!

Die Feinmasse rotiert um den Kern des Elektrons auf Großkreisen (Oberflächenkomponente im Sinne einer Rotationskomponente). Die Feinmasse strömt aber auch gleichzeitig auf den dazu senkrecht verlaufenden Meridianlinien (Oberflächenkomponente im Sinne einer Umfangskomponente). Die strömende Feinmasse der elektrischen Ladung hat deswegen als resultierende Umlaufbahn die vorher beschriebene Raumkurve, die ihre Maxima und Minima in stetiger Folge durchlaufen. Die Stromdichte von beiden Oberflächenkomponenten ist an jedem Punkt einer Oberfläche identisch und nur vom Abstand r zum Mittelpunkt des Elektrons abhängig.

Bei der gegenseitigen Wirkung zweier Ladungen ist nun zu trennen zwischen dem Teil der Feinmasse, der beide Ladungen umschlingt und dem Rest, der zwischen beiden Ladungen strömt.

Bei der Interaktion der Ladungen ist der Teil der Feinmasse zwischen beiden Ladungen der antreibende Teil, der abhängig vom gegenseitigen Drehsinn der Schraubenbewegung „zu- oder aufschraubt“, d. h. eine anziehende oder abstoßende Kraft entfaltet. Die Intensität dieser Wirkung ist aber direkt davon abhängig, wie nahe sich die beiden Akteure gegenüber stehen: Je näher desto größer ist die Wirkung, desto größer also auch der Anteil der sich gegenseitig umschlingenden, und in diesem Sinne aktiven Ladungs-Feinmassen. Wegen des maßgebenden Einflusses dieser Verkettung repräsentiert **der** Teil der Feinmasse, der beide Ladungen umschlingt, das mit dieser Kraft beeinflusste Energiepotential.

Für zwei Ladungen, die aufeinander wirken, gilt zunächst Folgendes: Mit der elektrischen Elementarladung $Q_e = \sqrt{m_q \cdot \lambda_C}$ korrespondiert die Ladungs-Feinmasse $m_q = \frac{Q_e^2}{\lambda_C}$. Mit der elektrischen Elementarladung $Q_n = \sqrt{n \cdot m_q \cdot \lambda_C}$ korrespondiert die Ladungs-Feinmasse $n \cdot m_q = \frac{n \cdot Q_e^2}{\lambda_C}$. Für die wechselseitige Wirkung zweier Ladungen Q_n und Q_m ist neben deren gegenseitigem Abstand r der geometrische Mittelwert $\sqrt{nm} \cdot m_q$ der beteiligten Ladungs-Feinmassen die bestimmende Größe. Der geometrische Mittelwert $\sqrt{nm} \cdot m_q = \sqrt{nm} \cdot \frac{Q_e^2}{\lambda_C}$ repräsentiert den Grundwert der wechselseitigen Durchdringung der beteiligten Ladungs-Feinmassen. Dieser Grenzwert der optimalen gegenseitigen Durchdringung wird aber nur in dem Bruchteilverhältnis der maßgebenden Kopplung $\frac{\lambda_C}{2\pi r}$ wirksam. Diese Kopplung entspricht unmittelbar einem durch den gegenseitigen Abstand r bestimmten Verhältnis der beiden identischen Hebelarme, die auf den jeweiligen Mittelpunkt der beiden Ladungen bezogen sind. Nach dieser vorangestellten Erklärung können sich die folgenden Ableitungen auf zwei gleich große (Elementar-)Ladungen beschränken.

r soll der Abstand zwischen zwei (gleich großen) Ladungen sein und kann jeweils bezogen auf den Mittelpunkt des Ladungsträgers als Radius angesprochen werden. Die die beiden Ladungsträger gemeinsam umschlingende Feinmasse ist abhängig vom Radius r als Variable und nach (7.31) definiert zu:

$$m(r) = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r^2}.$$

In dieser Form können alle differentiellen Teilmengen

$$2 \cdot m_q \cdot \frac{r_C^2}{r^3} \cdot dr$$

so zusammengefasst gedacht werden, als wäre die gesamte umschlingende Feinmasse im Abstand r vom Mittelpunkt konzentriert. Diese Überlegung gilt unmittelbar auch für den zugehörigen Energieinhalt

$$W_q = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r^2} \cdot c^2. \quad (7.78)$$

Das Produkt aus der Kraft und dem Radius r , auf den sie bezogen ist, hat nicht nur die formale Struktur eines Moments und ist damit dimensionsgleich mit Energie; sondern diese Überlegung zeigt uns auch, dass alle Teilwirkungen, ob nun interpretiert als Energie oder Moment, stets zusammengefasst erscheinen und auf Radius r bezogen sind.

Hervorzuheben ist hierbei, dass nach dem Gesetz der paarweise und senkrecht zueinander wirkenden Elektropulse, vorstehende Überlegungen immer in gleicher Weise für den Wirkungsmechanismus in radialer Richtung wie auch senkrecht dazu gelten.

Die für einen Ladungsstrom nach (7.27)

$$I_{qr} = \sqrt{\frac{m(r)}{\lambda_C}} \cdot c$$

maßgebende Ladungs-Feinmasse $m(r)$ nimmt geometrisch Bezug auf einen kugelförmigen Körper. Die Ladungs-Feinmasse $m(r)$ ist, wie vorstehend ausgeführt, mit dem Radius r nach (7.31) definiert und erfasst denjenigen Anteil der Ladungs-Feinmasse m_q , der auf den Bereich außerhalb dieser Kugel mit dem Radius r trifft. Die zu dieser Ladungs-Feinmasse $m(r)$ beziehungsweise zu diesem Ladungsstrom I_{qr} gehörige Bezugslänge $\lambda_r = 2\pi r$ ist eine Umfangslinie dieser Kugel.

Bei der Interaktion zweier Ladungsträger ist der umschlingende Ladungsstrom durch den gegenseitigen Abstand der Ladungsträger definiert. Für diese beiden umschlingenden Ladungsströme ist ideale Verkopplung gegeben, wobei die Intensität dieser Kopplung sich aus dem Verhältnis der Strecken gegenseitiger Beeinflussung ergibt. Dabei fließt mit Rücksicht auf den Unterschied zwischen der Bezugsgröße der Ladungs-Feinmasse m_q in Form der COMPTON-Wellenlänge λ_C und der Umfangslinie $\pi \cdot \lambda_C$ des Elektronenkerns das Verhältnis $\pi : 1$ in die Berechnung ein, so wie es zu Gleichung (7.68) näher beschrieben ist.

Mit dem Verhältnis $\pi : 1$ ergibt sich unter Bezug auf (7.27) und (7.31):

$$F_C(r) = I_{qr}^2 \cdot \pi = \frac{m_q \cdot \frac{r c^2}{r^2} \cdot c^2}{\lambda_C^2} \cdot \pi = \frac{m_q}{2} \cdot \frac{c^2}{r} \cdot \frac{\lambda_C}{\lambda_r}. \quad (7.79)$$

In der COULOMB-Wechselwirkungskraft kommt der Anteil der Ladungs-Feinmasse zum Ansatz, der aktiv für die Kraftentfaltung wirksam ist. Der aktive Anteil der Ladungs-Feinmasse ist abhängig vom Quadrat des Verhältnisses von $\frac{\lambda_C}{\lambda_r}$. Die Kopplung beider Ladungsströme ist dagegen linear abhängig vom Kehrwert von $\frac{\lambda_C}{\lambda_r}$. Insgesamt ergibt sich damit eine lineare Abhängigkeit von $\frac{\lambda_C}{\lambda_r}$.

Die Gesamtenergie der Ladungs-Feinmasse $m_q \cdot c^2$ verteilt sich je zur Hälfte auf die beiden Oberflächenkomponenten zu $\frac{m_q}{2} \cdot c^2$. Eben dieser Wert, reduziert durch Multiplikation mit dem für die COULOMB-Wechselwirkungskraft maßgebenden Verhältnis $\frac{\lambda_C}{\lambda_r}$, ist auch für die zur entsprechenden Radialkomponente gehörige Energie maßgebend:

$$W_{qR} = \frac{m_q}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\lambda_C}{\lambda_r}. \quad (7.80)$$

Die Division dieser Energie durch den Radius r als Bezugsgröße der aktiven Ladungs-Feinmasse ergibt schließlich die wirksame COULOMB-Wechselwirkungskraft. Die von der Gesamtenergie $m_q \cdot c^2$ zu einer Oberflächenkomponente gehörige Energie $\frac{m_q}{2} \cdot c^2$ ist identisch mit einem Kräftelement, das im Verhältnis der Hebelarme $\frac{\lambda_C}{\lambda_r}$ von innen (λ_C) nach außen (λ_r) auf das Elektron übertragen wird. Das Verhältnis der Hebelarme ist identisch mit elektrischer Kopplung.

Um die COULOMB-Wechselwirkungskraft und ihre Konsequenzen im Gleichgewicht der Kräfte auf anwendungsorientierter Basis zu beleuchten, wird nachfolgend unter teilweisem Vorgriff auf Kapitel Unterabschnitt 7.7 die Bewegung eines Elektrons um ein Proton, als Grundform eines Atomkernes, betrachtet. Die Bewegung des Elektrons als Ladungsträger auf einer Umlaufbahn um das Proton ist identisch mit einem Strom, der nachfolgend als Bahnstrom bezeichnet wird. Dieser Bahnstrom des Elektrons und der das Elektron umschlingende Anteil der Ladungs-Feinmasse des Protons sind ideal verkopplert. Den Bahnstrom kennzeichnet die Strömungsgeschwindigkeit v , die unabhängig von der für die Ladungs-Feinmasse von Elektron wie Proton maßgebenden Lichtgeschwindigkeit c ist. v hat den Charakter einer Relativgeschwindigkeit. Die Lichtgeschwindigkeit c regiert intern als übergeordnete Größe und wirkt nach außen wie ein Antrieb, der mit einem definiertem Übersetzungsverhältnis die abhängige Relativgeschwindigkeit v hervorruft. Dabei gilt folgender wesentlicher Zusammenhang:

Die anziehende Kraft des Protons korrespondiert mit einem Strom seiner Ladungs-Feinmasse im maßgebenden Anteilsverhältnis. Diese anziehende Kraft löst eine Bewegung des Elektrons aus, die ihrerseits einem Strom, nämlich dem Bahnstrom des Elektrons entspricht.

Verursacht ein primärer Strom durch Induktion einen sekundären Strom, so ist es vertraute Gesetzmäßigkeit, dass der sekundäre Strom dem primären induktiv entgegenwirkt. Als Folge dieser Gesetzmäßigkeit wirkt deshalb auch die mit dem Bahnstrom des Elektrons verbundene Kraft, der auslösenden anziehenden COULOMB-Wechselwirkungskraft entgegen. Mit dem Bahnstrom ist also eine abstoßende Kraft verbunden. Das Kräftegleichgewicht verlangt überdies Betragsgleichheit von anziehender und abstoßender Kraft. Dies unterstreicht auch, dass Elektromagnetismus und Mechanik von ein und derselben Wurzel ausgehen. Die systematische Fortsetzung dieser Betrachtung führt schließlich zwingend zu der Schlussfolgerung, dass auch bei der Interaktion gleichpoliger Ladungsträger stets mit der (in diesem Fall) abstoßenden COULOMB-Wechselwirkungskraft eine gleich große anziehende Kraft korrespondiert, die von dem jeweiligen Bahnstrom aufgrund gegenseitiger Bewegung herrührt. Diese Erkenntnis ist für die Interaktion von Protonen im Atomkern von besonderer Bedeutung. Auch im Atomkern besteht also keine Ursache, sich voreilig von elektromagnetischer Gesetzmäßigkeit zu „verabschieden“. Das Elektron folgt bei seinem Umlauf um das Proton analog der Strömungsbahn der Ladungs-Feinmasse der bekannten geschlängelten Raumkurve. Das Elektron folgt also auf einer Kugeloberfläche einer Raumkurve, die sich aus der Überlagerung zweier Drehbewegungen ergibt, deren Rotationsachsen variabel sind und an jedem Kurvenpunkt jeweils senkrecht aufeinander stehen. Damit ergibt sich für die mit dem Bahnstrom des Elektrons verbundene abstoßende Kraft als Ableitung aus der Beziehung für die COULOMB-Wechselwirkungskraft, indem zwei Unterschiede Eingang finden:

1. Der Bahnstrom betrifft nicht nur einen Anteil der Ladungs-Feinmasse $m_q \cdot \frac{rc^2}{r^2}$, sondern die gesamte Ladungs-Feinmasse m_q .
2. Die Lichtgeschwindigkeit c ist durch die Umlaufgeschwindigkeit v zu substituieren.

Diese Unterschiede berücksichtigend, kann die Beziehung (7.79) für die COULOMB-Wechselwirkungskraft mit dem Faktor $\frac{r^2}{rc^2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{\lambda_r^2}{\lambda_C^2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$ multipliziert werden, und man erhält die durch den Bahnstrom ausgelöste Anziehungskraft zu:

$$F_B(r) = F_C(r) \cdot \frac{\lambda_r^2}{\lambda_C^2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_q}{2} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda_C}. \quad (7.81)$$

Zu einem identischen Ergebnis führt die alternative Möglichkeit, rechnerisch unmittelbar den Bahnstrom

$$I_B(r) = \frac{Q_e \cdot v}{\lambda_r}$$

in Ansatz zu bringen. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass auch für diese Alternative der Faktor $\frac{\lambda_r^2}{\lambda_C^2}$ im Spiele ist. Damit gilt:

$$F_B(r) = I_B(r)^2 \cdot \pi \cdot \frac{\lambda_r^2}{\lambda_C^2} = \frac{m_q \cdot \lambda_C \cdot v^2 \cdot \pi}{\lambda_r^2} \cdot \frac{\lambda_r^2}{\lambda_C^2} = \frac{m_q}{2} \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda_C}. \quad (7.82)$$

Dies erklärt sich daraus, dass der Bahnstrom des Elektrons nicht etwa den Kern des Elektrons umschlingt wie sein Ladungsstrom, wohl aber das Proton, um das sich das Elektron und der mit seiner Bewegung verbundene Strom auf der besagten Raumkurve bewegt. Außerdem umschlingt die auch für die Umlaufgeschwindigkeit v maßgebende Ladungs-Feinmasse des Elektrons das Proton nicht anteilig entsprechend $m_q \cdot \frac{rc^2}{r^2}$, sondern mit der gesamten Ladungs-Feinmasse m_q .

Am Beispiel der durch die Umlaufbahn des Elektrons erzeugten abstoßenden Kraft zwischen Elektron und Proton wurde vorstehend veranschaulicht, wie die radiale Kraft zustande

kommt. Die radiale Kraft ist ein elektromagnetisches Phänomen und korrespondiert stets mit einem dazu senkrecht gerichteten elektrischen Strom. Die Kraft ist eine direkt proportionale Größe zum Quadrat des Stromes. Doch wie entsteht dieser Strom? Wir legen gedanklich eine Symmetrieebene durch Proton und Elektron, sodass die Bewegungsrichtung des Elektrons senkrecht zu dieser Ebene verläuft. Bei seiner Bewegung muss das Elektron in Bewegungsrichtung vor sich, vergleichbar einer Bugwelle, ein elektrisches Feld aufbauen und hinter sich wieder abbauen. Auf- und Abbau eines elektrischen Feldes ist aber ein Strom mit allen dem Elektromagnetismus eigenen Manifestationen. In der Momentaufnahme entstehen links und rechts der Symmetrieebene elektrische Felder von spiegelbildlich gleicher Geometrie. Ein permanenter Stromfluss um das Gebilde, das aus Proton, Elektron und ihrer Verbindungslinie besteht, ist die Folge. Lediglich entlang dieser Verbindungslinie sind die Wirkungen von linker und rechter Feldhälfte auf Null abgeklungen. Mit dieser Trennlinie ist aber der Verlauf der mechanischen Kraft festgelegt, die mit diesem elektromagnetischen Phänomen verbunden ist. Die weiteren Konsequenzen seien nachfolgend aufgezeigt:

Ein auf stationärer Bahn um ein Proton mit konstanter Geschwindigkeit v umlaufendes Elektron weist einen konstanten Elektroimpuls oder Bahnstrom auf. Für die mit der Elektronenbewegung verbundenen elektrischen Feldgrößen gilt: Die elektrische Feldstärke und die aus der Bewegung des Elektrons resultierende Verschiebungsstromdichte sind stets, bezogen auf den Mittelpunkt des Elektrons, radial nach außen gerichtet. Auf jeder Kugelschicht um diesen Mittelpunkt ist die Richtung der magnetischen Feldstärke durch Kreise vorgegeben, die in die Kugelschicht fallen und senkrecht zur Bewegungsrichtung stehen. An jedem Punkt eines solchen Kreises herrscht gleiche magnetische Feldstärke und die Richtung entspricht der zu diesem Punkt gehörigen Tangente. Der POYNTINGSche Vektor weist senkrecht zu elektrischer wie magnetischer Feldstärke, ist also auf die entsprechende Kugelschicht fixiert. Elektrische Energie fließt also auch im Umfeld des Elektrons immer nur in geschlossenen Bahnen bei strikter Bindung an das auslösende Elektron. Eine Komponente der Energieabstrahlung in das Umfeld tritt nicht auf. Deswegen ist die in der wissenschaftlichen Literatur allgemein anzutreffende Auffassung falsch, dass mit der Umlaufbahn des Elektrons Verluste verbunden sein müssten. Dass diese Verluste aber ausbleiben und deswegen auch kein Elektron in seinen Atomkern stürzt, wird als Widerspruch elektromagnetischer Gesetzmäßigkeit in Makrokosmos einerseits und Mikrokosmos andererseits gedeutet. Diese scheinbare dubiose Grauzone im Mikrokosmos, in der elektromagnetische Gesetzmäßigkeit teils gültig (COULOMB-Wechselwirkungskraft), teils aufgehoben sein soll, wird als nicht erklärbares Phänomen akzeptiert. Dieser blinde Fleck des Elektromagnetismus ist aber, wie dargelegt, nur ein Fehlschluss.

Ein Strom I , identisch mit dem Elektroimpuls, hat die Struktur $I = \sqrt{\frac{dm}{dl}} \cdot v \cdot \frac{dm}{dl}$ ist die (für den allgemein gültigen Fall als variabel angenommene) differentielle Feinmasse dm pro differentieller Längeneinheit dl und v die Geschwindigkeit der strömenden Feinmasse. Konstituierendes Element jeder Energieabgabe ist, dass im betrachteten Raumelement der Differentialquotient $\frac{d}{dl} \left(\frac{dm}{dl} \right) = \frac{d^2m}{dl^2}$ ungleich Null und negativ ist. Merkmal einer stationären Umlaufbahn des Elektrons im Mikrokosmos ist aber, dass der Differentialquotient $\frac{d^2m}{dl^2} = 0$ ist. Erst beim Wechsel des Elektrons von einer stationären Umlaufbahn auf eine andere, erfährt der Differentialquotient einen singulären Sprung (bildlich wie physikalisch identisch mit dem Quantensprung), der aufwärts oder abwärts gerichtet sein kann.

Bei einem Strom in einem Dipol haben wir es dagegen mit einem leitungsgebundenen Energietransport zu tun, dessen Eigenschaften in Abschnitt 8 dargestellt werden und dessen Natur Energieabgabe in das Leitungsmedium wie auch Abstrahlung in das Umfeld mit sich bringt. Die Elektronen in ihrer gegenseitigen Position sind dabei das Medium, um im zyklischen Prozess Feinmasse aufzunehmen um sie anschließend weiterzugeben, jeweils mit einem Diffe-

rentialquotienten $\frac{d^2m}{dt^2} \neq 0$, der also ungleich Null ist. Projiziert man die aus dem Bahnstrom des Elektrons gewonnene Erkenntnis auf die mit Lichtgeschwindigkeit um Proton wie Elektron und deren gegenseitige Verkettung zirkulierende Ladungs-Feinmasse, so erkennt man, dass den umlaufenden Maxima und Minima der Oberflächenkomponenten analog dem umlaufenden Elektron elektromagnetische Wirkungen eigen sind, die als in radialer Richtung stehende Wellen zu begreifen sind und in ihrer Gesamtheit die COULOMB-Wechselwirkungskraft auslösen.

Der Bahnstrom des Elektrons im Mikrokosmos ist wie elektromagnetische Strahlung dem fundamentalen Gesetz der Quantisierung unterworfen. Deshalb gilt in Erweiterung der Beziehung (6.143) für das Elektron und seine Umlaufbahn als Grundform:

$$\frac{m_q}{2} \cdot \lambda_r = \frac{h}{c} = m_e \cdot \lambda_C. \quad (7.83)$$

Aus (7.83) ergibt sich:

$$\frac{\frac{m_q}{2}}{m_e} = \frac{\lambda_C}{\lambda_r}$$

beziehungsweise

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_r} = \frac{\frac{m_q}{2}}{m_e}.$$

Eingesetzt in (7.82) erhalten wir die durch den Bahnstrom des Elektrons ausgelöste abstoßende Kraft:

$$F_B(r) = m_e \cdot \frac{v^2}{r}. \quad (7.84)$$

In dieser Ableitung erkennen wir die der Mechanik zugerechnete Zentrifugalkraft unmittelbar als Phänomen des Elektromagnetismus! Mit der Beschleunigung

$$b(r) = \frac{v^2}{r}$$

ist außerdem der direkte Zusammenhang zum Grundgesetz der Mechanik hergestellt:

$$F_B(r) = m \cdot b(r). \quad (7.85)$$

Das Gleichgewicht von anziehender COULOMB-Wechselwirkungskraft und der durch den Bahnstrom verursachten abstoßenden Kraft (Zentrifugalkraft) verlangt:

$$\frac{m_q}{2} \cdot \frac{c^2}{r} \cdot \frac{\lambda_C}{\lambda_r} = m_e \cdot \frac{v^2}{r}. \quad (7.86)$$

Nach Umformung ergibt sich mit (7.85):

$$\frac{\frac{m_q}{2}}{m_e} = \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda_C} = \frac{\lambda_C}{\lambda_r}.$$

Daraus errechnet sich schließlich:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_C}{\lambda_r}$$

oder

$$v = c \cdot \frac{\lambda_C}{\lambda_r}. \quad (7.87)$$

Aus (7.79) lässt sich unmittelbar bilden:

$$F_C(r) = \frac{m_q \cdot \lambda_C}{4\pi r^2} \cdot c^2. \quad (7.88)$$

und mit (7.38)

$$F_C(r) = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r^2}. \quad (7.89)$$

Diese Form ist unter Berücksichtigung der unter (6.119) dargestellten Beziehung

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_c = \frac{1}{c^2}$$

also identisch mit dem COULOMB-Gesetz für die Wechselwirkungskraft, wie es in der „klassischen“ Elektrotechnik dargestellt wird.

Für den nach (7.27) definierten Teilstrom I_{qr} des Elektrons gilt nach (7.29) mit (7.38):

$$I_{qr}^2 = I_q^2 \cdot \frac{\lambda_C^2}{\lambda_r^2} = \frac{m_q}{\lambda_C} \cdot c^2 \cdot \frac{\lambda_C^2}{\lambda_r^2} = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r^2}.$$

Daraus ergibt sich in Übereinstimmung mit (7.79) und (7.88) die Beziehung:

$$F_C(r) = I_{qr}^2 \cdot \pi. \quad (7.90)$$

D.h., eine mechanische Kraft ergibt sich aus dem Quadrat des Stromes, multipliziert mit einem Faktor, der der Kopplung oder (in gleichwertiger Interpretation) dem Verhältnis der Hebelarme entspricht.

Schließlich ist die elektrische Feldstärke $E(r)$ als Kraft $F_C(r)$ pro elektrischer Ladung Q_e definiert und demgemäß:

$$E(r) = \frac{F_C(r)}{Q_e} = \frac{Q_e \cdot c^2}{4\pi r^2}. \quad (7.91)$$

7.5 Die Induktion

Der zu einem Elektron der Ladung

$$Q_e = \sqrt{m_q \cdot \lambda_C}$$

gehörige Ladungsstrom

$$I_q = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c$$

ist die Bezugsgröße für die Definition des Stromes

$$I = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v,$$

der mit der Bewegung der Elektronen verbunden ist.

Die Zahl der bewegten Ladungs-Feinmassen

$$m = n \cdot m_q,$$

bezogen auf die Leiterlänge l , und die Bewegungsgeschwindigkeit v sind die bestimmenden Faktoren für die Relation zum Ladungsstrom I_q .

Der zum (Gleich-)Strom I gehörige, senkrecht zur Geschwindigkeit v rotierende Strom ist von gleicher Größe.

Der elektromotorischen Kraft, die den Strom auslöst, ist eine antreibende Feinmasse zuzurechnen, deren Größe mit der des Stromes übereinstimmt.

Diese antreibende Feinmasse ist räumlich konzentriert auf die Elektronen als Ladungsträger beziehungsweise den Leiter. Diese Antriebskraft rührt in letzter Konsequenz aus dem atomaren Bereich, in dem der Energieaustausch durch ein sehr großes Kollektiv sehr kleiner Energieportionen bewirkt wird. Jede Energieportion wird durch einen Wellenzug der Feinmasse von sehr hoher Frequenz und sehr kleiner Dimension bestimmt. Gleich- und Wechselstrom sind in jeder dieser Wellen überlagert.

Damit werden die Elektronen in Bewegung gesetzt. Die in Bewegung gesetzten Ladungsträger nehmen die gleiche Geschwindigkeit v wie die „antreibende“ Feinmasse an, wobei jeweils der Mittelwert maßgebend ist. Bei dem kugelförmigen Rotationskörper der Elementarladung Q_e klingt die Verteilung der Feinmasse im Raum nach Gesetzmäßigkeit (7.31) ab, so dass sich für die Stromdichte J_q die Beziehung (7.35) ergibt. Bei der im Anschluss an (7.35) durchgeführten Integration von J_q ergibt sich ein endlicher Wert des Ladungsstromes I_q , obwohl die Integrationsgrenze bis ins Unendliche reicht.

Im Gegensatz dazu führt die perlschnurartige Aneinanderreihung von Elektronen in einem (unendlich lang gedachten) Leiter zu einer Überlagerung der Ladungs-Feinmassen der Elektronen und zu einem neuen Verteilungsgesetz der resultierenden Feinmasse. Bildlich können wir uns dabei die Überführung des Verteilungsgesetzes der Feinmasse einer isoliert betrachteten Elementarladung in das Verteilungsgesetz der Feinmasse des Leitungsstromes wie die Komprimierung eines kugelförmigen Rotationskörpers auf eine sehr dünne kreisförmige Scheibe vorstellen. (Dies erinnert uns, ohne die Unterschiede zu verkennen, an ein papierenes Lampion, das bei Gebrauch zur Kugelform aufgespannt und zur Aufbewahrung zusammengefaltet wird.)

Die auf diesem Verteilungsgesetz der Feinmasse eines Leitungsstromes basierende Integration der Umfangskomponente der Stromdichte ergibt **keinen** endlichen Wert des Stromes, sofern die Integrationsgrenze ins Unendliche reicht. Dieses auf den ersten Blick unplausible Ergebnis verdeutlicht aber lediglich, dass

- die gedankliche Voraussetzung einer unendlich langen Leitung unreal ist und deshalb
- der Durchflutungssatz immer nur eine Näherung darstellt.

Wird der Durchflutungssatz auf eine gerade Leitung der Länge l für einen Punkt im Abstand a angewandt, so ist er streng genommen nur für den Grenzfall

$$\frac{l}{a} \rightarrow \infty, \quad \frac{a}{l} \rightarrow 0$$

ohne Fehler. Für jeden Wert

$$\frac{a}{l} > 0$$

ergibt sich dagegen eine Fehlertoleranz.

Das Verteilungsgesetz der Feinmasse im Umfeld eines Leiters soll in der Folge dargelegt werden. Die Gesetzmäßigkeiten im Elektron sind dabei der bestimmende Ausgangspunkt.

Der Strom wird aus der Gesamtheit aller Ladungs-Feinmassen der bewegten Ladungsträger gebildet. Der „natürlichen“ Bewegung der Ladungs-Feinmassen wird die Geschwindigkeitskomponente v überlagert. Zu dieser Komponente in Längsrichtung gehört, nach dem Elektroimpulssatz die entsprechende Umfangskomponente.

Dabei vergleichen wir mit der inneren Dynamik im Elektron und stellen fest, dass dessen Rotationskomponente der Komponente des Leiterstroms in Längsrichtung entspricht. Die Analogie geht aber noch entscheidend weiter. Auch für den Leiterstrom ist neben der Grundwelle in Längsrichtung eine Überlagerungswelle in radialer Richtung (senkrecht zur Mittellinie des Leiters) überlagert. Wie beim Elektron gilt das Verhältnis von Überlagerungswelle zu Grundwelle von

$$1 : 2\pi.$$

Bei isolierter Betrachtung eines Elektrons liegt ein eingeschwungener Zustand der Überlagerungswelle und des von ihr induzierten Abbildes der Grundwelle außerhalb des Elektronenkerns vor. Auch im Umfeld eines Leiters gibt es einen eingeschwungenen Zustand, aber nur unter der Bedingung, dass der Leiterstrom konstant ist. Die Reichweite von Überlagerungswelle und induziertem Abbild der Grundwelle hängt aber im Unterschied zum Elektron von der wirksamen Kompensation durch den eigenen Rückleiter oder eine verkoppelte (fremde) Leiterschleife ab.

Der Ladungsstrom eines Elektrons ist konstant. Ein Leitungsstrom kann dagegen variieren. Jede Variation bedeutet aber gleichzeitig Variation der Überlagerungswelle und ihres induzierten Abbildes der Grundwelle.

Damit einher flutet Feinmasse in radialer Richtung hin und her und setzt diesen Änderungen einen Widerstand entgegen, wie es dem Trägheitsgesetz entspricht. Die Spannungsquelle muss die entsprechende Feinmasse einbringen beziehungsweise abziehen und dabei den angesprochenen Widerstand überwinden. Der bei diesen Stromänderungen auftretende Widerstand kann also sowohl positiv (Aufbau des Feldes) wie auch negativ (Abbau des Feldes) sein. Allgemein ist dieser Wirkungsmechanismus identisch mit der (selbst)induktiven Wirkung. Bei verkoppelten Leitern kommt es darüber hinaus zur Fremdinduktion. Selbst- und Fremdinduktion finden ihre natürliche Begrenzung durch die kompensierende Überlagerung der Magnetfelder von Hin- und Rückleitung eines Stromkreises, dessen geometrische Verhältnisse also das Maß der Induktivität bestimmen.

Die maßgebende Stromdichte $J_\phi = J_\phi(r)$, die die Überlagerungswelle des Leiterstroms I kennzeichnet, ergibt sich in weitgehender Analogie zu der entsprechenden Stromdichte der Ladungs-Feinmasse im Elektron nach (7.35) wie folgt:

$$J_\phi = \frac{\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v}{2\pi \cdot 2\pi r^2}.$$

Dabei ist die Stromdichte

$$J_\phi = \frac{d\phi'(r)}{2\pi r \cdot dr}$$

nichts anderes als der auf die Flächeneinheit bezogene differentielle magnetische Fluss $d\phi'(r)$, der seinerseits bekanntlich bereits auf die Längeneinheit bezogen ist. Dass der (auf die Längeneinheit bezogene) Magnetfluss und der Strom identische Größen darstellen, sei an dieser Stelle besonders hervorgehoben.

In Fortsetzung der Ableitung ergibt sich für den Strom I und die magnetische Feldstärke $H(r)$ die Beziehung:

$$\frac{d\phi'(r)}{dr} = H(r) = J_\phi \cdot 2\pi r = \frac{\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r}.$$

Unter Bezug auf (7.35) erhalten wir schließlich folgende Relation zur Stromdichte des Ladungsstromes im Elektron:

$$\frac{J_\phi}{J_q} = \frac{\sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v \cdot \pi r^2}{2\pi \cdot 2\pi r^2 \cdot \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot \frac{r_C}{r} \cdot c} = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot \frac{r}{r_C} \cdot \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot \frac{r}{2\lambda_C} \cdot \frac{v}{c}.$$

In dem Verhältnis der Geschwindigkeiten $\frac{v}{c}$ und der beteiligten Parameter l und r bilden sich die spezifischen Unterschiede der Bildungsgesetze der in Beziehung gesetzten Stromdichten ab. Unbeschadet dessen korrespondiert aber auch unter den Bedingungen eines Leiterstromes die Grundwelle mit einer Überlagerungswelle.

Die vorstehenden Beziehungen beschränken sich nun aber nicht allein auf das Innere des Leiters. Vielmehr überspringt die Überlagerungswelle die Leitergrenze ohne Unstetigkeit und

induziert im Umfeld des Leiters ein Abbild der Grundwelle. Zum **inneren** Strom gehört also stets auch ein **äußerer** Strom, der seinerseits sowohl eine Komponente in Umfangsrichtung wie auch in Längsrichtung aufweist. Dieser **äußere** Strom ist identisch mit dem auf die Längeneinheit bezogenen (äußeren) magnetischen Fluss, wobei die Betrachtung nach dem Stand der Wissenschaft (unzulässigerweise) auf die Umfangskomponente eingengt wird. Die Überlagerungswelle und damit der äußere Strom (oder der äußere magnetische Fluss) klingt nach einer durch die Zylinderform des Leiters und seines Umfelds bestimmten Gesetzmäßigkeit ab.

In einem Elektron gilt für jeden Ladungs-Teilstrom I_{qr} eine gleiche Kopplung, die in den Beziehungen (7.28) und (7.29) zum Ausdruck kommt. Auch die differentiell kleinen Stromfäden sind in ihrer gegenseitigen Verkopplung im Gleichgewichtszustand, weil Länge des Stromfadens und Abstand zum Mittelpunkt des Elektrons sich in der Waage halten.

Die Verhältnisse im Umfeld des leitungsgebundenen Stromes liegen prinzipiell anders. Jeder Teilstrom des äußeren Stromes und jeder differentielle Stromfaden hat hinsichtlich Kopplung eine individuelle Beziehung zum inneren Strom. Das ist die natürliche Konsequenz daraus, dass innerer Strom und äußerer Stromfaden zwar immer eine identische maßgebende Länge aufweisen, dagegen ihr gegenseitiger Abstand, also der Radius r , naturgemäß variiert. Bei der Betrachtung des Stromes in einem Leiter ist dessen Grundwelle mit den entsprechenden Werten der Stromdichte der Ausgangspunkt.

Der Grundwelle ist eine Überlagerungswelle überlagert, die dem magnetischen Fluss entspricht. Mit dem Durchflutungssatz wird der Zusammenhang zwischen Grund- und Überlagerungswelle dargestellt. Die Überlagerungswelle wirkt nach dem Induktionsgesetz auf den eigenen Strom sowie auch auf einen fremden Stromkreis. In diesem Sinne kann die Überlagerungswelle in einem fremden Stromkreis Ursache einer neuen Grundwelle sein.

Für die Grundwelle gilt also exklusiv der Durchflutungssatz, für die Überlagerungswelle exklusiv das Induktionsgesetz.

Gegensinnige Überlagerungswellen kompensieren sich in dem Umfange, als Betrag sowie die Richtung jeweils mit der Gegenrichtung des Partners übereinstimmen.

Im Inneren eines Leiters existiert Grund- und Überlagerungswelle. Aber nur die Überlagerungswelle überspringt die räumlichen Grenzen des Leiters und breitet sich im Umfeld des Leiters aus. Die Ladungs-Feinmasse im Bereich außerhalb des Elektronenkerns ist das Modell, das zum Vergleich herangezogen werden kann.

Für die von der Grundwelle abhängige und eingeschlungene Überlagerungswelle außerhalb des Leiters und damit für den äußeren Strom ist der Durchflutungssatz irrelevant!

Zur weiteren Betrachtung der Überlagerungswelle beleuchten wir erneut die Verhältnisse im Koaxialleiter, um dann wieder zu den induktiven Wirkungen im Umfeld eines Einzelleiters zurückzukehren.

Der alternative Auf- und Abbau des magnetischen Feldes bei Wechselstrom konzentriert sich unter den Bedingungen des idealen Koaxialleiters auf dessen Inneres. In dem Umfange, wie dieser Koaxialleiter von der idealen, nach außen abgeschirmten Form abweicht und zum offenen System wird, vermag die Überlagerungswelle partiell wie durch ein Leck in radialer Richtung zu entweichen. Die Formgebung von Hin- und Rückleitung bestimmt den Umfang dieses Lecks, das bei Antennen den eigentlichen Zweck dieser technischen Einrichtung darstellt.

Eine durch das Leck „entwichene“, sich fortpflanzende Überlagerungswelle ist dann als autonom zu betrachten und wird damit ihrerseits zur Grundwelle mit allen daraus erwachsenden Konsequenzen. Diese autonome Grundwelle oder Funkwelle ist dann freilich nicht mehr in einer Koaxialleitung geführt. Sie folgt demgemäß unabhängig von prinzipieller Verwandtschaft abweichenden Gesetzmäßigkeiten der Ausbreitung.

Der Einzelleiter, interpretiert als Innenleiter eines Koaxialleitung, wäre nun der Grenzfall des

völlig offenen Systems. Ein Einzelleiter ist aber für sich alleine nicht funktionsfähig. (Das Modell „Lichtstrahl“, das einen Außenleiter ohne Innenleiter darstellt, kann für einen Vergleich nicht herangezogen werden). Deswegen bestimmen in jedem Fall die geometrischen Verhältnisse von Hin- und Rückleitung als Gesamt„system“ sowie die Frequenz, wieweit dieses Leck bei der Berechnung des resultierenden magnetischen Flusses berücksichtigt werden muss oder idealisierend vernachlässigt werden kann. Die nachfolgende Darstellung von magnetischer Feldstärke und resultierendem magnetischen Fluss, die dem bekannten Stand der Wissenschaft entspricht, basiert auf dieser Idealisierung. Es liegt also - streng genommen - wieder nur eine Näherung vor.

Während - wie bereits ausgeführt - in einem Elektron jeder Stromfaden der Ladungs-Feinmasse mit jedem anderen Stromfaden eine konstante Kopplung entsprechend Beziehung (7.29) aufweist, liegen die Verhältnisse im Umfeld des leitungsgebundenen Stromes prinzipiell anders. Für jedes kreisringförmige Raumelement im Abstand r zum Leitermittelpunkt und mit differentiell kleiner Wandstärke dr existiert bei immer gleichem Strom I proportional zum Kehrwert des Radius r eine Kopplung, ausgedrückt durch die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Für ein kreisringförmiges Raumelement, das den Bereich (ohne Kompensationswirkung!) zwischen Radius r_1 und Radius r_2 überstreicht, gilt deshalb eine Kopplung, die sich in der resultierenden Größe des (auf die Längeneinheit bezogenen) magnetischen Flusses

$$\phi'(r) = \int_{r_1}^{r_2} H(r) \cdot dr = \frac{I}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

ausdrückt.

7.6 Dualismus von Magnetismus und elektrischer Ladung

Mit der Strömung von Feinmasse in Fortpflanzungsrichtung in einem Leiter ist stets in der Ebene senkrecht dazu eine zirkulierende, in sich geschlossene Strömung verbunden, deren Existenz und Wirkung identisch ist mit dem Phänomen des Magnetismus. Da für einen räumlich abgegrenzten Strom die Zirkulation eine zwingende Folge des Gesetzes der paarweisen und senkrecht zueinander wirkenden Elektropulse darstellt, ist Magnetismus also eine notwendige Konsequenz dieses Gesetzes.

Vorgenannte Aussage beschränkt sich aber nicht allein auf den inneren Bereich des Leiters. Vielmehr muss auch in Umkehrung des für den **inneren** Bereich des Leiters Gesagten, mit dem Magnetismus **außerhalb** der Leitung, der einer Umfangskomponente eines Stromes entspricht, ein gleich großer äußerer Strom parallel zum Leiter verbunden sein. Innerer und äußerer Strom (beziehungsweise das auf die Längeneinheit bezogene magnetische Feld) stehen zueinander in Beziehung, wie in Unterabschnitt 7.5 dargestellt.

Magnetismus ist identisch mit Strom und deshalb trägt auch der auf die Längeneinheit bezogene magnetische Fluss unter Berücksichtigung der Substitution der magnetischen Feldkonstanten μ_0 durch die nur einen Zahlenwert ohne physikalische Einheit darstellende Größe μ_c

$$\mu_0 \rightarrow \mu_c = 1$$

nach Beziehung (6.120), die gleiche physikalische Einheit wie der Strom.

Es lässt sich also aus dem resultierenden magnetischen Fluss, der den Leiter umschlingt, der Strom ermitteln, der außerhalb des Leiters fließt. Diese Betrachtungsweise ist auf den ersten Blick völlig ungewohnt. Andererseits wird nach dem Stand der Wissenschaft ganz

selbstverständlich dem magnetischen Feld der zugehörige Energieinhalt zugewiesen. Dies ist aber nichts anderes als eine andere Betrachtungsweise der strömenden Feinmasse, also des Stromes außerhalb der Leiterbahn.

Notwendiges Bindeglied zwischen dem Elektroimpuls in Fortpflanzungsrichtung (z. B. eines Leiters) und dem für den Magnetismus verantwortlichen Elektroimpuls in Richtung des Umfangs ist, bei Aufbau und Abbau, also bei jeder Änderung des Elektroimpulses, die radiale Komponente.

Diese radiale Komponente des Elektroimpulses ist naturgemäß ebenfalls unverzichtbar im Spiel, wenn in umgekehrter Richtung, nämlich ausgehend von einem magnetischen Fluss, in der Ebene senkrecht dazu eine Elektroimpuls in Fortpflanzungsrichtung eines Leiters ausgelöst werden soll. Der Elektroimpuls in Fortpflanzungsrichtung wirkt aber nur unter der Voraussetzung, dass eine Relativbewegung zwischen der zur Radialkomponente gehörigen Feinmasse und der „fremden“ Feinmasse, auf die eingewirkt wird, existiert. Diese Relativbewegung kann gleichermaßen durch räumliche oder zeitliche Änderung bewirkt werden.

Mit der Definition des Magnetismus sind gleichzeitig die Voraussetzungen zur Definition von elektrischer Ladung geschaffen.

Die auf den Meridianlinien des Elektrons zirkulierende Ladungs-Feinmasse (Umfangskomponente) ist prinzipiell identisch mit Magnetismus. Diese Zirkulation wird aber nicht wie bei einem Stromkreis von „außen“ durch Verkettung mit dessen Strom bewirkt, sondern von innen, ausgelöst durch die um die Achse des Elektrons zirkulierende Feinmasse (Rotationskomponente). Damit existiert dieser Spezialfall des Magnetismus autonom und seine Quelle ist konstant und unverlierbar.

„Normaler“ Magnetismus befindet sich mit dem verketteten Strom, der ihn auslöst, in einem wechselseitig wirkenden dynamischen Gleichgewichtszustand der beteiligten Strömungen. Für den autonomen Magnetismus der elektrischen Ladung gilt prinzipiell das Gleiche. Für den internen Gleichgewichtszustand wirkt jeder der zirkulierenden, differentiell kleinen Feinmasse-Ströme auf die benachbarte Strömung, so dass sich eine abklingende radiale Kraftwirkung in den Raum ausbreitet, die intern auf die Ladungs-Feinmasse wirkt und weit in den umgebenden Raum reicht.

Sobald in den Bereich dieses autonomen Magnetismus der elektrischen Ladung aber „fremde“ Feinmasse eindringt, tritt die typische Verkettung von senkrecht zueinander stehenden Feinmasse-Strömungen in Erscheinung. Zwischen Ladungsträger und Träger der „fremden“ Feinmasse (im typischen Fall: ebenfalls ein Ladungsträger) wirkt dabei eine Kraft. Magnetismus und elektrische Ladung sind also zwei unterschiedliche Ausprägungen, die auf ein und dasselbe elektrische Phänomen des zirkulierenden Stroms zurückgehen.

Diese innige Verwandtschaft von Magnetismus und elektrischer Ladung tritt beim Fließen der Ladungsträger im geschlossenen Stromkreis unmittelbar in Erscheinung. Aber auch die Gleichungen für die Kraftwirkungen zwischen stromdurchflossenen Leitungen nach (6.108) sowie zwischen Ladungen nach (7.70) haben nicht nur auffällige Analogien. Sie müssen sich vielmehr unmittelbar ineinander überführen lassen.

Dazu formen wir Gleichung (7.89) unter Verwendung von (7.38) wie folgt um:

$$\begin{aligned}
 F_C(r) &= \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r^2} \\
 &= \frac{m_q \cdot \lambda_C \cdot c^2}{4\pi r^2} \\
 &= \frac{m_q \cdot c^2}{\lambda_C} \cdot \frac{\lambda_C^2}{4\pi r^2} \\
 &= I_q^2 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r_C^2}{4\pi r^2} \\
 &= I_q^2 \cdot \frac{2\pi r_C \cdot \pi \cdot r_C}{2\pi r^2} \\
 &= I_q^2 \cdot \frac{2\pi r_C}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \pi \cdot r_C} \right) \quad r \gg r_C; \\
 F_C(r) &= \frac{I_q^2 \cdot \lambda_C}{2\pi r} - \frac{I_q^2 \cdot \lambda_C}{2\pi \left(r + \frac{\lambda_C}{2} \right)}. \tag{7.92}
 \end{aligned}$$

Das heißt, die Wechselwirkungskraft nach dem COULOMB-Gesetz kann interpretiert werden wie eine Kraft, die ein Einzelleiter auf eine in der gleichen Ebene liegende parallele Leiterschleife rechteckiger Form ausübt, wobei Einzelleiter wie Leiterschleife mit dem Strom I_q der Ladungs-Feinmasse beaufschlagt sind.

Der Abstand zwischen Einzelleiter und Leiterschleife entspricht der Entfernung r und die Seitenlängen der rechteckigen Leiterschleife sind λ_C parallel zum Einzelleiter und $\frac{\lambda_C}{2}$ senkrecht dazu.

Die vorstehende Betrachtung lässt sich aber noch entscheidend erweitern und verallgemeinern. Die entsprechenden Überlegungen sind nachfolgend dargestellt:

Der Ladungsstrom I_q verteilt sich auf die beiden Oberflächenkomponenten. Dazu senkrecht verläuft die Radialkomponente. Jeder der beiden Oberflächenkomponenten ist je die Hälfte der Feinmasse zuzurechnen, die zum Gesamtladungsstrom gehört. Mit Blick auf die Oberflächenkomponenten verteilt sich die Feinmasse auf 2 (senkrecht aufeinander stehenden) Umfangslinien gleicher Länge. Dagegen ergibt sich für die Radialkomponente eine Verteilung über den zugehörigen Radius. Zusammenfassend ist also von folgender Massenverteilung auszugehen:

$$\begin{aligned}
 \text{Oberflächenkomponenten :} & \quad \frac{m_q}{2} \cdot \frac{1}{2\pi r_C}, \\
 \text{Radialkomponente :} & \quad \frac{m_q}{2} \cdot \frac{1}{r_C}.
 \end{aligned}$$

Der zur Radialkomponente gehörige Ladungsstrom ergibt sich deshalb zu:

$$I_{qR} = \sqrt{\frac{m_q}{2r_C}} \cdot c$$

und sein Quadrat ist identisch mit der radialen Kraft, die das Elektron auf seine eigene Feinmasse ausübt:

$$F_{qR} = \frac{m_q}{2r_C} \cdot c^2.$$

Diese Kraft, die auf den zur COMPTON - Wellenlänge gehörigen Radius r_C bezogen ist, wirkt auf einen benachbarten Ladungsträger im Abstand r mit dem Anteilsverhältnis von

$$k_r = \frac{r_C}{r} = \frac{\lambda_C}{\lambda_r}.$$

Dieses Anteilsverhältnis kann sowohl wie ein Verhältnis der Hebelarme im Sinne der Mechanik wie auch als Kopplung, also als elektromagnetisches Phänomen interpretiert werden.

Die Wirkung zwischen Ladungsträgern (oder generell: zwischen Massen) ist aber stets wechselseitig und die effektive Wirkung ist identisch mit der Rückwirkung, die der Partner bei dem Kräftespiel ausübt. Diese Rückwirkung ist aber naturgemäß dem gleichen Anteilsverhältnis unterworfen wie die auslösende Kraft. Damit ergibt sich die resultierende Kraft, die jeder der beiden Partner auf den jeweils anderen ausübt, zu:

$$F_{qr} = F_{qR} \cdot k_r^2 = \frac{m_q \cdot \lambda_C}{4\pi r^2} \cdot c^2.$$

Es besteht also Übereinstimmung mit Beziehung (7.88) für die COULOMB-Wechselwirkungskraft.

Diese Ableitung belegt in besonders anschaulicher Weise, dass elektrische Ladung und Magnetismus nur zwei Ausprägungen desselben Phänomens der strömenden Feinmasse sind. Aber auch die Affinität mechanischer und elektromagnetischer Effekte scheint auf. So erkennen wir, dass das grundlegende Gesetz der Mechanik:

- actio = reactio

nichts anderes darstellt, wie den Spezialfall des Anteilsverhältnisses von

$$k_r = 1.$$

k_r ist dabei wie gesagt das Verhältnis der Hebelarme oder der Kopplungsfaktor. Dabei müssen wir uns vor Augen stellen, dass dieser Anteilfaktor nicht auf einem Grundwert der Kraft analog F_{qR} basiert, sondern auf einer Kraft, in der die sich einstellende „Kopplung“ an der Berührungsstelle der Körper, die aufeinander eine Kraft ausüben, bereits implizit enthalten ist. Der Kopplungsfaktor $k_r = 1$ ist insofern keine „Überraschung“. Wesentlich bleibt aber dennoch, dass die Kraft, die sich an einem Körper auswirkt, immer nur dem Echo (der Rückwirkung) seiner eigenen Einwirkung auf den Partner entspricht.

Bei einem Vergleich mit dem Bildungsgesetz der Ladungs-Feinmasse nach Beziehung (7.31)

$$m(r) = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r^2}$$

erkennen wir, dass auch die Teilmenge $m(r)$, die beide Ladungsträger umschlingt, direkt proportional zu dem Quadrat des Anteilsverhältnisses k_r ist, nämlich:

$$m(r) = m_q \cdot k_r^2.$$

Die für die Radialkomponente maßgebenden, korrespondierenden Werte von

$$\begin{aligned} \text{Masse :} & \quad m_R = \frac{m_q}{2}, \\ \text{Energie :} & \quad E_c = \frac{m_q}{2} \cdot c^2 \quad \text{und} \\ \text{radialer Kraft :} & \quad F_{qR} = \frac{m_q}{2r_C} \cdot c^2 \end{aligned}$$

unterliegen immer folgender Proportion:

- Grundwert : Einwirkung = Einwirkung : Rückwirkung,

oder:

$$1 \quad : \quad k_r \quad = \quad k_r \quad : \quad k_r^2.$$

Die Energie E_c entspricht dabei dem Maximalwert der potentiellen Energie und $E_c \cdot k_r$ ist die mit der gegenseitigen Einwirkung korrespondierende Energie, aus der nach Division durch c^2 die Menge an Feinmasse ermittelt werden kann, die aus dem Umfeld aufgenommen werden muss, damit zwei gleichpolige Ladungsträger gegen den Widerstand ihrer abstoßenden Kräfte bis auf den Abstand r aneinander herangeführt werden. Einzelheiten zur Berechnung der potentiellen Energie sind später zur Ableitung von Beziehung (7.121) dargestellt.

Ohne Feinmasse - Transfer gibt es weder Kraft noch Bewegung!

Dass die Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern der gleichen Wurzel entspringen, liegt auf der Hand. Die Analogie sei deshalb nachfolgend dargestellt: Das Anteilsverhältnis k_L ist bei Leitern der Länge l im Abstand r :

$$k_L = \sqrt{\frac{l}{2\pi r}}.$$

Dieses Verhältnis erklärt sich daraus, dass zu der Feinmasse jeder Volumeneinheit des Leiterstromes

$$I_L = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v,$$

der die Komponente in Fortpflanzungsrichtung darstellt, eine Umfangskomponente und gleich große Radialkomponente entsprechend

$$I_U = I_R = \sqrt{\frac{m}{2\pi r}} \cdot v$$

gehört. D.h., die radiale Wirkung der gesamten Feinmasse wird auf einen Zylinder mit dem Radius r projiziert, eine Vorgehensweise, die sich an die Erkenntnisse über die Ladungs - Feinmasse des Elektrons direkt anschließt. Die Feinmasse klingt im Umfeld einer Kugel (Elektron) mit dem Kehrwert des Quadrats des Radius r ab, bei einem Zylinder (Leiter) dagegen mit dem einfachen Kehrwert.

Die Kraft zwischen 2 Leitern errechnet sich schließlich zu:

$$F_L = I_L^2 \cdot k_L^2 = I_L^2 \cdot \frac{l}{2\pi r},$$

also besteht Übereinstimmung mit der klassischen Elektrotechnik, wenn nach (6.120)

$$\mu_0 \rightarrow \mu_c = 1$$

berücksichtigt wird.

7.7 Das Atom

7.7.1 Ladungsträger in Interaktion

Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf die Grundform des Wasserstoffatoms, das aus einem Proton und einem Elektron besteht. Ein Proton als positiver Ladungsträger hat gegenüber einem Elektron als negativem Ladungsträger einen gegenläufigen Drehsinn

der radialen Ladungswellen. In dem Bereich zwischen positivem und negativem Ladungsträger drehen deshalb die aufeinandertreffenden Ladungswellen mit gleichem Drehsinn, sie „schrauben“ sich ineinander und erzeugen eine anziehende Kraft.

Bewegt sich das Elektron unter dem Einfluss der anziehenden Kraft in Richtung Proton, durchdringt es dessen Schalen von gleicher Dichte der Feinmasse und Intensität der paarigen Elektroimpulse. D.h., das Elektron erfährt bei der radialen Bewegung eine Änderung dieser Einflussgrößen. Dadurch wird eine Kraft senkrecht zur radialen Richtung ausgelöst, also in Richtung einer Umfangslinie um das Proton. Gesamtheitlich strebt das Elektron auf seiner Bahn einem Gleichgewichtszustand zu. Die Bedingungen für die Gleichgewichtszustände, die sich einstellen können, werden später beleuchtet.

Gleichwohl soll ein spezifischer Teil des Gleichgewichts bereits jetzt betrachtet werden, nämlich die Position der Rotationsachse des Elektrons in Bezug auf seine Umlaufbahn. Da die räumliche Ausdehnung des Elektronenkerns nicht vernachlässigbar ist, können niemals alle Stromfäden des Elektronenkerns bezüglich der Feinmasse des Protons der gleichen Schale differentiell kleiner Dicke angehören. Da sie deshalb in der Regel unterschiedlichen, wenn auch sehr dicht beieinanderliegenden Schalen zugehören, wirken auf sie die entsprechenden Unterschiede der Feinmasse und der Intensität der Elektroimpulse. Unter diesen Bedingungen wirken bezogen auf die Rotationsachse resultierende Kraftmomente am Elektron, die nur für eine spezifische Position der Rotationsachse zu Null werden, nämlich wenn die Rotationsachse senkrecht zur Umlaufbahn steht, wobei zu unterscheiden ist zwischen zwei Möglichkeiten:

1. Die Drehrichtung der Feinmasse um die Rotationsachse und der Umlaufbahn des Elektrons stimmen überein.
2. Die genannten Drehrichtungen stimmen **nicht** überein.

Zur Beurteilung kann man als Ersatzbild ein quadratischer Rahmen dienen, durch dessen Mittelpunkt und in senkrechter Position die Rotationsachse verläuft. Mit dem Rahmen wird schwerpunktmäßig die Strömung der Feinmasse abgebildet. Unter Bezugnahme auf Unterabschnitt 7.6 wird offensichtlich für die geschilderten beiden Alternativen für die Position der Rotationsachse das Optimum der elektrischen Ankopplung des Elektrons an das Proton erreicht. Ohne die Bedeutung dieses Optimums herunterspielen zu wollen, darf aber nicht außer Acht gelassen werden, dass bezogen auf den Grundwert der Kraftwirkung zwischen Proton und Elektron der Unterschied zwischen Optimum und suboptimaler Position sehr gering ist. In die Interaktion zwischen Proton und Elektron sind prinzipiell alle 3 räumlichen Richtungen des Elektroimpulses einbezogen. Eine herausgehobene Bedeutung hat die Abfolge dynamischer Gleichgewichtszustände, die einem periodischen Prozess entspricht. Wie in Unterabschnitt 7.4 ausgeführt, folgt das Elektron bei seinem Umlauf um das Proton analog der Strömungsbahn der Ladungs-Feinmasse der bekannten geschlängelten Raumkurve. Das Elektron folgt also auf einer Kugeloberfläche einer Raumkurve, die sich aus der Überlagerung zweier Drehbewegungen ergibt, deren Rotationsachsen variabel sind und an jedem Kurvenpunkt jeweils senkrecht aufeinander stehen. Bei Vernachlässigung der Masse des Elektrons gegenüber der des Protons, bleibt die Umlaufgeschwindigkeit bezogen auf das Proton als ruhendes Zentrum konstant und die radiale Geschwindigkeit wird zu Null. Bei der Interaktion von Proton und Elektron bleiben die Beträge (nicht die Richtungen) der Oberflächenkomponenten und der Radialkomponente beider Partner konstant. Die Radialkomponenten von Proton und Elektron halten sich im Gleichgewicht. Im Gegensatz dazu finden z.B. die Elektronen, die in einem Dipol schwingen, für die Radialkomponente der Feinmasse - Strömung keine Barriere gegen den Freiraum.

Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen haben wir bereits bei der Betrachtung des Lichtstrahls kennen gelernt und für die radiale Beschleunigung ist dabei nach (6.80) der halbe

Wert zum Ansatz gebracht wie er sich in der Mechanik ergeben würde. Elektrodynamik und Mechanik haben eine enge Verwandtschaft. Deshalb sind auch bei der späteren Berechnung der maßgebenden Parameter des periodischen Prozesses, die elektrotechnischen Gesetzmäßigkeiten (COULOMB-Wechselwirkungskraft) und mechanischen Gesetzmäßigkeiten (Fliehkraft) direkt miteinander verknüpft, wie in Unterabschnitt 7.4 im Vorgriff schon angesprochen. Und dies, obwohl wir das Elektron vorstehend nicht als Massenpunkt, sondern als kompliziert aufgebautes, rein elektromagnetisches Gebilde kennen gelernt haben.

Bei isolierter Betrachtung von Proton und Elektron kommt es bis zum Einschwingen in den Gleichgewichtszustand wegen der paarigen Natur des Elektroimpulses niemals zur geradlinigen Anziehung, sondern zu einer Bewegung auf gekrümmter Bahn. Außerdem wird jede Gleichgewichtssituation nur unter Energie-, d.h. Feinmasseaustausch mit dem Umfeld verlassen, so dass sich eine „isolierte“ Betrachtung im strengen Wortsinn verbietet. Deswegen führt eine Vorstellung, dass sich Proton und Elektron quasi nach dem Rückstoßprinzip unter Abgabe von Feinmasse einander nähern, in die Irre. Vielmehr ist die Massenänderung bei Proton und Elektron teilweise gegenläufig und nicht gleichgewichtig. Einzelheiten der Energiebilanz werden später erläutert.

Ist das „System“ aus Proton und Elektron in einen Gleichgewichtszustand eingeschwungen, findet kein Feinmasseaustausch mit dem Umfeld mehr statt. Jede Komponente der Feinmasseströmung des Elektrons wird bei dessen Umlauf um das Proton durch die entsprechenden Komponenten des Protons jederzeit im Gleichgewicht gehalten, also elektrisch neutralisiert. D. h., bei der Betrachtung eines gegenüber dem Proton festen Punktes, den das Elektron periodisch durchläuft, wird zwar durch das Elektron ein elektromagnetisches Wechselfeld erzeugt, alleiniger Partner für die damit verbundene Energieströmung bleibt das Proton, dessen Einwirkung ein ideales Gleichgewicht garantiert. Energieabgabe ins Umfeld findet im Gleichgewichtszustand nicht statt. Dies ist keinesfalls ein Widerspruch zur klassischen Elektrotechnik und den elektromagnetischen Abläufen z. B. in einem Dipol. In einem Dipol gibt es keinen vergleichbaren Prozess, der die periodisch in den umgebenden investierte elektromagnetische Energie immer wieder im „System Dipol“ festhält.

Die Natur der Ladungsträger mit ihren paarweise senkrecht zueinander verlaufenden Oberflächenkomponenten der Feinmasseströmung erlaubt uns die Einsicht, dass zwei Ladungsträger wie magnetisch miteinander verkoppelte Spulen aufeinander wirken und in das dynamische Gleichgewicht auch die gegenseitige Bewegung einbringen. Der der Elektronenumlaufbahn im eingeschwungenen Zustand zuzurechnende Strom hat direkte Verwandtschaft zu den Verhältnissen im Lichtstrahl, in dem ja ebenfalls interne Energie schwingt, und zwar ohne Verlust nach außen.

Dass ein unter dem Einfluss von Wechselspannung schwingendes Elektron in einem Dipol zum Vergleich weit vom Gleichgewichtszustand entfernt ist und deshalb elektromagnetische Energie abstrahlt, im Mikrokosmos eines Atoms ein solcher Gleichgewichtszustand sich aber sehr wohl einstellt, wird dann nachvollziehbar. Dass es im Atom verschiedene Stufen des Gleichgewichts gibt, die sprunghaft ineinander übergehen können, wobei dann elektromagnetische Energie aufgenommen oder abgegeben wird, soll im Vorgriff bereits erwähnt werden.

Als Konsequenz vorstehender Überlegungen erkennen wir im Einklang mit der Paarigkeit des Elektroimpulses ein zwingendes Gebot der Paarigkeit elektrischer Ladungen in der Natur, die gesamtheitlich einem Gleichgewicht zwischen positiver und negativer Ladung unterliegt. Ungleichgewicht existiert immer nur lokal. Jedes lokale Ungleichgewicht, soweit es sich auch räumlich ausdehnen mag, ist jedoch immer in einen überörtlichen Gleichgewichtszustand eingebettet. Dieser Gleichgewichtszustand ist also gleichzeitig

- labil im Sinne lokaler Ungleichgewichte und
- gesamtheitlich stabil.

Bei der Betrachtung zweier Ladungsträger als theoretischen Grenzfall ist dabei immer zu bedenken, dass sinnvolle Randbedingungen gegeben sein müssen. So macht es z.B. keinen Sinn, von zwei benachbarten negativen Ladungsträgern auszugehen, die sich im Ruhezustand befinden. Dass z.B. Elektronen im Leitungsband zwar leicht beweglich sind, sich aber keinesfalls durch die Abstoßungskraft zerstreuen, zeigt ja bereits, dass der Einfluss der zugehörigen positiven Ladungsträger nicht vernachlässigbar und isolierte Betrachtungsweise nicht möglich ist.

7.7.2 Das Atommodell

Die für das Elektron abgeleiteten Beziehungen können unmittelbar auf das Proton übertragen werden. Für Masse und COMPTON-Wellenlänge sind dabei natürlich die für das Proton maßgebenden Werte in Ansatz zu bringen, was einer ausgeprägten Verdichtung der Energie im Vergleich zum Elektron entspricht.

Nun betrachten wir das Verhalten des Elektrons mit seiner (negativ definierten) Ladung unter dem Einfluss positiver Ladung, identisch mit einem oder mehreren Protonen im Atomkern. Damit treten wir in die Anfangsgründe der für ein einfaches Atommodell - in Anlehnung an das Atommodell von BOHR - maßgebenden Gesetzmäßigkeiten ein. Wenn nach dem Stand der Wissenschaft atomphysikalische Erkenntnisse mehr abstrakt formuliert werden, ihr Ausgangspunkt mit von der Mechanik übertragenen Gesetzen hat seine Nachwirkung; dies allein schon deshalb, weil dieser Ausgangspunkt stufenweise weitere theoretische Verfeinerungen initiiert hat. Wenn dieser Einstieg „bescheiden“ angegangen wird, soll dies keinesfalls bedeuten, dass die Grenzen der bis hierher entwickelten Modellvorstellungen beim Vordringen in den Aufbau der Materie erreicht sind. - Im Gegenteil: Es zeichnet sich ab, dass mit dieser Modellvorstellung die bereits existierenden Erkenntnisse nach dem Stand der Wissenschaft harmonisieren und, dass auf diesem Wege noch manche anschauliche und plausible Interpretation von physikalischen Effekten im Mikrokosmos sowie zusätzliche Erkenntnisse gewonnen werden können.

Doch zurück zum Elektron und seinem Verhalten im Atom, also unter direktem Einfluss des Protons, oder präziser: unter dem Einfluss der strömenden Feinmasse, die das Proton als elektrische Ladung umgibt. Diese Feinmasse strömt mit Lichtgeschwindigkeit und steht mit der zur Ladung des Elektrons gehörigen Feinmasse in Eingriff.

Das Elektron bewegt sich auf der mehrfach erwähnten geschlängelten Raumkurve und es stellt sich eine Geschwindigkeit v erheblich unterhalb der Lichtgeschwindigkeit ein:

$$v \ll c.$$

Es muss also ständig ein Schlupf vorhanden sein, um eine Kraftwirkung zu erzielen.

Bewegt sich das Elektron aber auf seiner Umlaufbahn, so ist dies gleichbedeutend mit Stromfluss entlang dieser Bahn. Das sich einstellende Gleichgewicht ist in Unterabschnitt 7.4 beschrieben.

Für die Darstellung der maßgebenden Gesetzmäßigkeiten dürfen Parameter wie die Stellung der Achse des Elektrons zu seiner Umlaufbahn und dessen Drehimpuls, unterschieden nach Eigen- und Bahndrehimpuls, nicht vernachlässigt werden, wenn Schritt für Schritt die Verfeinerung des Atommodells vorangetrieben werden soll. Für die grundsätzlichen Zusammenhänge, die an dieser Stelle aufgezeigt werden sollen, darf die Variation dieser Einflussgrößen aber unbeachtet bleiben. Wir unterstellen lediglich eine Achsenstellung des Elektrons senkrecht zur Umlaufbahn.

7.7.3 Compton-Wellenlänge der elektrischen Ladung

Das Elektron folgt bei seinem Umlauf um das Proton analog der Strömungsbahn der Ladungs-Feinmasse der bekannten geschlängelten Raumkurve. Das Elektron folgt also auf einer Kugeloberfläche einer Raumkurve, die sich aus der Überlagerung zweier Drehbewegungen ergibt, deren Rotationsachsen variabel sind und an jedem Kurvenpunkt jeweils senkrecht aufeinander stehen. Durch dieses Spezifikum der Umlaufbahn des Elektrons ist auch die Besonderheit des zugehörigen Bahnstromes festgelegt, nämlich, dass der Bahnstrom des Elektrons analog dem Ladungsstrom in zwei Komponenten zerfällt, die betragsgleich sind und zueinander senkrecht verlaufen. Die Struktur des Bahnstromes und aller zugehörigen elektromagnetischen Feldgrößen ist also voll angepasst an die Struktur des Ladungsstromes. Diese strukturelle Identität ist eine wesentliche Voraussetzung für die Erklärung der Interaktion des Bahnstromes des Elektrons mit dem Ladungsstrom des Protons. Bei der Aufteilung des Bahnstromes in zwei Teile wird die gesamte Ladungs-Feinmasse des Elektrons m_q in zwei Hälften $\frac{m_q}{2}$ aufgeteilt.

Unabhängig von dieser Aufteilung gelten die Gesetzmäßigkeiten der Quantisierung für jede der beiden Komponenten separat. Die Gesetzmäßigkeiten der Quantisierung gilt für jede der beiden betragsgleichen Komponenten des Bahnstromes wie für elektromagnetische Freiraumstrahlung. Multipliziert man also $\frac{m_q}{2}$ mit der Umlaufbahn $u_K = \lambda_K = 2\pi r_K$, so ergibt sich die Grundform

$$\frac{m_q}{2} \cdot \lambda_K = \frac{h}{c}. \quad (7.93)$$

Alle elektromagnetischen Vorgänge im Freiraum wie im Mikrokosmos der Atome sind also der gleichen Gesetzmäßigkeit der Quantisierung unterworfen. Im Bahnstrom des Elektrons kommt überdies die Identität elektromagnetischer Vorgänge und mechanischer Bewegungsabläufe zum Ausdruck. Dieser Bewegungsablauf des Elektrons entspricht der Überlagerung zweier Rotationsbewegungen, deren Rotationsachsen stets aufeinander senkrecht stehen. Die am Prozess beteiligten Parameter von Masse, Weg und Zeit lassen sich im konkreten Fall deckungsgleich sowohl als elektromagnetisches wie als mechanisches Phänomen interpretieren (siehe Ableitung zu (7.84)). Es geht hier nicht um eine Nahtstelle an sich wesensverschiedener physikalischer Manifestationen sondern um ihre Identität. Diese Einsicht mag bei der Erweiterung des Blickfeldes über den Mikrokosmos hinaus auf das weite Feld der Mechanik im Makrokosmos aus dem Blick geraten. Und die von den Einheiten der Mechanik traditionell weitgehend abgeschotteten Einheiten der Elektrotechnik tun das ihre zur Zementierung dieses scheinbaren Nebeneinanders. Dennoch haben wir es auch bei den komplexen physikalischen Vorgängen im Makrokosmos, die wir der Mechanik zurechnen, stets mit purem Elektromagnetismus zu tun.

Anknüpfend an (7.93) gilt nach Vorstehendem auch für den zur Umlaufbahn u_K eines Elektrons gehörigen Strom

$$I_{eK} = \sqrt{\frac{m_q}{2\lambda_K}} \cdot v_K \quad (7.94)$$

unabhängig von der Bahngeschwindigkeit v_K in analoger Weise die Grundbeziehung für den Zusammenhang zwischen PLANCKSchen Wirkungsquantum und COMPTON-Wellenlänge nach (6.142). λ_K ist also die COMPTON-Wellenlänge für die maßgebende Ladungs-Feinmasse $\frac{m_q}{2}$ des Stromes in der Elektronenumlaufbahn. Die Wellenlänge λ_K und die Länge der Umlaufbahn u_K mit dem Radius r_K sind identisch.

Der zur Elektronenumlaufbahn gehörige Strom ist die vom Lichtstrahl her bekannte Überlagerung von Gleich- und Wechselstrom, die wellenförmig sich fortpflanzend zirkulieren und letztendlich auf den gleichen Stromtypus im Kern des Elektrons zurückgehen.

Die Grundbeziehung (7.93) bedeutet, dass ein Zyklus der Welle identisch ist mit einer kompletten Umlaufbahn

$$u_K = \lambda_K \quad (7.95)$$

des Elektrons und dass auf diese Bahn die Menge an Ladungs-Feinmasse entsprechend $\frac{m_q}{2}$ trifft. Die sich aus der Umlaufbahn mit ihrer Periodendauer ergebende Affinität zwischen dem Gleichstrom (in der Umlaufbahn des Elektrons) und dem zugehörigen wellenförmig sich ausbreitendem Wechselstrom kann aber nicht nur an identischen Parametern wie Wellenlänge und Frequenz und der engen Analogie zwischen den Beziehungen nach (6.142) und (7.93) festgemacht werden. Vielmehr lässt sich die als Spezialfall zu betrachtende Beziehung (7.93) in die allgemeine Form überführen:

$$\frac{m_q}{2n} \cdot \frac{u_n}{n} = \frac{h}{c} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.96)$$

Dabei gelten für die Umlaufbahn des Elektrons die Beziehungen:

$$\lambda_n = n \cdot \lambda_K; \quad (7.97)$$

$$u_n = 2\pi r_n = n \cdot \lambda_n = n^2 \cdot \lambda_K. \quad (7.98)$$

Die Umlaufbahn u_n mit dem Radius r_n enthält also n komplette Schwingungen, deren jede eine n -fach größere Wellenlänge λ_n gegenüber dem Grundwert λ_K hat, aber nur den n -ten Teil an Feinmasse gegenüber dem Grundwert $\frac{m_q}{2}$.

Das heißt, die Verdichtung der Feinmasse in jeder der n Schwingungen der Elektronenumlaufbahn ist für $n > 1$ im Vergleich zu $n = 1$ im Verhältnis $1 : n$ herabgesetzt. Das heißt aber weiter, dass das Längenverhältnis von Umlaufbahn u_n und dem Grundwert

$$u_K = \lambda_K \quad (7.99)$$

jeweils dem Quadrat des ganzzahligen Wertes n entspricht:

$$\frac{u_n}{u_K} = n^2. \quad (7.100)$$

Die Umlaufbahn und die beteiligte Feinmasse werden durch einen ganzzahligen Teiler in Abschnitte beziehungsweise Teilmengen gleicher Größe unterteilt. Dies bedeutet, dass zirkulierende Feinmasse immer nur in Portionen unterteilt werden kann, die einer kompletten Schwingung entsprechen. Oder anders ausgedrückt: In dem ringförmig geschlossenen Stromkreis lässt sich nur ein elektrisch stabiler Zustand erzielen, wenn er aus einem ganzzahligen Vielfachen einer Schwingung der Wellenlänge λ_n besteht. Der ganzzahlige Teiler n lässt nur diskrete, sprunghaft sich ändernde Umlaufbahnen und stabile Energiezustände zu, wie es mit den fundamentalen Erkenntnissen der Quantentheorie übereinstimmt.

Für den Strom I_{en} in der Elektronenumlaufbahn ergibt sich mit (7.96) und (7.98):

$$I_{en} = \sqrt{\frac{\frac{m_q}{2n}}{\frac{u_n}{n}}} \cdot v_n = \sqrt{\frac{m_q}{2n^2 \cdot \lambda_K}} \cdot v_n; \quad (7.101)$$

$$I_{en} = \frac{I_{eK}}{n} \cdot \frac{v_n}{v_K}. \quad (7.102)$$

7.7.4 Bahnradius und -geschwindigkeit des Elektrons, Bohr-Postulat

Aus den Beziehungen (7.96) und (7.98) ergibt sich für die möglichen Kreisradien der Umlaufbahnen des Elektrons

$$r_n = \frac{h}{\pi c \cdot m_q} \cdot n^2. \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.103)$$

Wird für m_q die unter (7.43) abgeleitete Beziehung

$$m_q = m_e \cdot \frac{Q_e^2 \cdot c}{h}$$

eingesetzt, erhalten wir

$$r_n = \frac{h^2}{\pi m_e \cdot Q_e^2 \cdot c^2} \cdot n^2. \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.104)$$

Für den Spezialfall mit $n = 1$ errechnet sich:

$$r_1 = 5,293 \dots \cdot 10^{-11} \text{ m.}$$

Diese Größe stimmt mit den für das BOHRsche Atommodell bekannten Ergebnissen überein. Der scheinbare Unterschied der Beziehung (7.104) zum Stand der Wissenschaft beruht darin, dass nach dem Stand der Wissenschaft die elektrische Feldkonstante noch als eigenständige Naturkonstante betrachtet und eingesetzt wird, während in (7.104) bereits die Erkenntnis nach (6.119)

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_c = \frac{1}{c^2}$$

eingeflossen ist und für die Ladung Q_e , wie zu (7.42) erläutert, die physikalische Einheit $\sqrt{kg \cdot m}$ in Ansatz gebracht ist.

Zur Berechnung der Bahngeschwindigkeit v_n bringen wir das Kräftegleichgewicht von COULOMB-Anziehungskraft entsprechend (7.89) und die Zentrifugalkraft in Ansatz:

$$\frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r_n^2} = m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n}. \quad (7.105)$$

Daraus ergibt sich:

$$v_n^2 = c^2 \cdot \frac{Q_e^2}{4\pi m_e \cdot r_n}.$$

Setzt man für den Radius r_n entsprechend Beziehung (7.104) ein, ergibt sich:

$$v_n^2 = c^2 \cdot \frac{Q_e^2 \cdot \pi m_e \cdot Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi m_e \cdot h^2 \cdot n^2},$$

und schließlich:

$$v_n = \frac{c^2 Q_e^2}{2h} \cdot \frac{1}{n}. \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.106)$$

Für die breite Diskussion der Ergebnisse und deren Folgerungen z. B. hinsichtlich Kreisfrequenz darf auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen werden.

Zum Abschluss dieses Unterabschnitts soll lediglich noch das erste BOHR-Postulat im Sinne der in diesem Aufsatz dargelegten Modellvorstellung abgeleitet werden. Dazu formen wir Beziehung (7.103) wie folgt um:

$$\frac{\pi r_n \cdot c \cdot m_q}{n} = n \cdot h.$$

Setzt man Beziehung (7.43) für m_q und anschließend für das Teilmittel

$$\frac{c^2 Q_e^2}{2h} \cdot \frac{1}{n} = v_n$$

nach Beziehung (7.106) ein, ergibt sich das erste BOHR-Postulat

$$m_e \cdot 2\pi r_n \cdot v_n = nh. \quad (7.107)$$

Diese von BOHR s. Zt. intuitiv erfasste Beziehung passt also in die bis zu dieser Stelle entwickelte und vorgestellte Modellvorstellung von Elektromagnetismus und Materie. Für die weitere Verfeinerung im Sinne des BOHR-SOMMERFELD-Atommodells und dessen abstrakt-theoretischer Nachfolger sind mit dieser Modellvorstellung verheißungsvolle Grundlagen gegeben. Diese Forschungsarbeit gilt es noch zu leisten.

Aus (7.107) ergibt sich mit der Grundbeziehung für die COMPTON-Wellenlänge nach (6.143) die prägnante Form:

$$\frac{r_C}{r_n} = \frac{v_n}{n \cdot c}. \quad (7.108)$$

Die Größe

$$L_n = m_e \cdot r_n \cdot v_n = \frac{nh}{2\pi} \quad (7.109)$$

entspricht dabei dem (makrophysikalischen) Bahndrehimpuls des Materiebausteins „Elektron“. Dieser Bahndrehimpuls ist für $n = 1$ identisch mit dem inneren Drehimpuls im Materiebaustein, wie er später in Unterabschnitt 9.2, Beziehung (9.10) dargestellt wird.

7.7.5 Potential- und Energiestufen, Relativität der Ladungs-Feinmasse

Der folgenden Ableitung werden einige Berechnungen vorangestellt. Aus Beziehung (7.104) und (7.106) ergibt sich:

$$v_n^2 \cdot r_n = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi m_e}.$$

Daraus errechnet sich:

$$m_e \cdot v_n^2 \cdot \lambda_n = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{2} \quad (7.110)$$

und

$$m_e \cdot v_n^2 = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r_n} \quad (7.111)$$

Sehen wir zunächst von dem Einfluss der Geschwindigkeit v_n ab, so hat das Elektron unabhängig vom Abstand r_n zum Proton die gleiche Menge an Ladungs-Feinmasse. Die Neutralisierung im Bereich der das Proton und das Elektron gemeinsam umschlingenden Feinmasse kann das Proton nur bewirken, wenn die mit wachsendem Abstand r_n zum Elektron an sich abnehmende Dichte der Ladungs-Feinmasse durch Aufnahme von zusätzlicher Feinmasse aus der Umgebung in Form absorbierter Strahlungsenergie kompensiert wird. Die Ladungs-Feinmasse des Protons hat also zwar einen Grundwert, aber ausgehend von diesem Grundwert variiert die effektive Menge an Ladungs-Feinmasse abhängig vom Abstand zum korrespondierenden Ladungsträger, im vorliegenden Fall: zum Elektron.

Diese Relativität der Ladungs-Feinmasse korrespondierender Ladungsträger ist ein allgemeingültiges Phänomen. Es spielt beim Energietransport eines Stromes in einem mit ohmschen Widerstand belegten Leiter die entscheidende Rolle, indem die Dichte der Ladungsträger längs des durchströmten Widerstands kontinuierlich abnimmt und im umgekehrten Umfang das Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt. Die Stromstärke bleibt dabei zwar konstant, aber die maßgebenden Parameter des Stroms nach Beziehung (6.17) variieren fortschreitend, wobei Feinmasse an die Materie des Widerstandes abgegeben wird. Es kann also im Gegensatz zu üblicher Darstellung in der Fachliteratur keine Rede von gleichförmiger Strömung der Ladungsträger im ohmschen Widerstand sein.

Doch zurück zum Atom! An dieser Stelle interessiert das Energie- oder Feinmasse-Speichervermögen des Atoms abhängig vom Bahnradius des Elektrons. Hierzu errechnen wir das (negative) Potential, d.h., den Spannungsabfall, den das Elektron bei seiner Bewegung weg vom Proton durchläuft, also zwischen der Elektronenbahn mit dem Wertepaar von Bahnradius und -geschwindigkeit r_n, v_n und dem Grenzfall der Bahn mit $r_n \rightarrow \infty, v_n \rightarrow 0$.

Es ergibt sich aus (7.91) das Potential:

$$\varphi = \int_{r_n}^{\infty} E \cdot dr = -\frac{Q_e \cdot c^2}{4\pi r_n}. \quad (7.112)$$

Mit (7.91) ergibt sich weiterhin:

$$\varphi = -E \cdot r_n = -\frac{F}{Q_e} \cdot r_n. \quad (7.113)$$

Mit (7.86) errechnet sich weiter:

$$\varphi = -\frac{1}{Q_e} \cdot \frac{m_q}{2} \cdot \frac{r_C}{r_n} \cdot c^2. \quad (7.114)$$

Die zugehörige potentielle Energie beträgt nach (7.112)

$$W_e = \varphi \cdot Q_e = -\frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r_n},$$

und mit (7.111)

$$W_e = -m_e \cdot v_n^2. \quad (7.115)$$

Aus (7.114) ergibt sich die Form:

$$W_e = -\frac{m_q}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{r_C}{r_n}. \quad (7.116)$$

Unter Einbeziehung von (7.80) und in Übereinstimmung mit (7.108) ergibt sich der Faktor

$$k_n = \frac{W_{qR}}{|W_e|} = \frac{r_C}{r_n} = \frac{v_n}{n \cdot c}. \quad (7.117)$$

(7.116) ist so zu interpretieren, dass zwischen Proton und Elektron ein Energiegefälle W_e existiert, das durch die spezifische, auf einen Wellenzug bezogene Relativgeschwindigkeit $\frac{v_n}{n}$ gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c verursacht wird. W_e beträgt ein Mehrfaches von W_{qR} , das nach (7.80) dem Energieinhalt der gemeinsam umschlingenden Feinmasse im „Ruhezustand“, also ohne Relativgeschwindigkeit entspricht.

In dem negativen Vorzeichen von W_e kommt zum Ausdruck, dass diese Energie beim Abrücken des Elektrons vom Proton „fehlt“, und zwar für den Weg aus seiner aktuellen Bahn bis ins (theoretisch) Unendliche. Dieses Defizit muss durch Feinmasse aus dem Umfeld gedeckt werden.

Der Teil der Ladungs-Feinmasse, der über die durch die Umlaufbahn des Elektrons gezogene Grenze hinausreicht, errechnet sich mit (7.31) zu:

$$m_g = m(r_n) = m_q \cdot \frac{r_C^2}{r_n^2}.$$

Mit der Grundbeziehung für die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons nach (6.143)

$$m_e \cdot \lambda_C = \frac{h}{c}$$

errechnet sich mit (7.43):

$$m_g = \frac{Q_e^2 \cdot h}{c \cdot m_e \cdot 4\pi^2 r_n^2}.$$

Damit ergibt sich mit (7.111) und (7.115):

$$\frac{m_g}{2} \cdot \lambda_n = -W_e \cdot \frac{h}{c^3 \cdot m_e} = \frac{h}{c} \cdot \frac{v_n^2}{c^2} \quad (7.118)$$

sowie:

$$\sqrt{\frac{m_g}{2\lambda_n}} \cdot c = \frac{\sqrt{\frac{h}{c}}}{\lambda_n} \cdot v_n. \quad (7.119)$$

Mit (7.110) ergibt sich nach Umformung:

$$\frac{m_g}{2} = \frac{2h}{Q_e^2 \cdot c} \cdot m_e \left(\frac{v_n}{c}\right)^4,$$

und mit (7.43)

$$\frac{m_g}{2} = \frac{m_e}{\frac{m_g}{2}} \cdot m_e \left(\frac{v_n}{c}\right)^4, \quad (7.120)$$

sowie schließlich mit (7.43), (7.106) und (7.117)

$$E_c : E_v = E_v : E_g \quad (7.121)$$

mit

$$E_c = \frac{m_q}{2} \cdot c^2, \quad (7.122)$$

$$E_v = m_e \cdot v_n^2 = \frac{m_q}{2} \cdot c \cdot \frac{v_n}{n} = \frac{m_q}{2} \cdot c^2 \cdot k_n, \quad (7.123)$$

$$E_g = \frac{m_g}{2} \cdot c^2 = \frac{m_q}{2} \cdot c^2 \cdot k_n^2. \quad (7.124)$$

Dieses Ergebnis kann wie folgt interpretiert werden:

Die gesamte zur Radialkomponente der Ladungs-Feinmasse des Elektrons gehörige Energie beträgt E_c . Die dem Einfluss des Protons zuzurechnende Teilmenge von E_c entspricht E_v . Das Elektron seinerseits wirkt auf das Proton im Umfange von E_g zurück, wobei E_g den äußeren Teil der Ladungs-Feinmasse des Elektrons repräsentiert, der (indirekt) durch die Umlaufbahn des Elektrons abgegrenzt wird und das Proton umschlingt.

Die identischen Verhältnisse

$$E_c : E_v$$

und

$$E_v : E_g$$

haben den Charakter von Kopplungen stromdurchflossener Leitungen. Induziert eine Leiterschleife a auf eine gleichartige parallele Leiterschleife b entsprechend dem Kopplungsfaktor k_n eine Spannung, unter deren Einfluss ein Strom fließt, so induziert dieser Strom seinerseits in der Leiterschleife a im Sinne einer Gegenkopplung eine Spannung, wobei der gleiche Kopplungsfaktor wirksam ist. Die Gegenkopplung ist also proportional zu k_n^2 .

Im gleichen Sinne sind die zirkulierenden Ladungs-Feinmassen von Proton und Elektron ja Ströme, die im vorliegenden Fall ideal verkoppelt sind. Ideal bedeutet hierbei, dass im Atom die Kopplung als perfekt anzusehen ist, also im Sinne gleichartiger Leiter ohne Verluste und ohne Berücksichtigung zusätzlicher Verkopplungen mit dem benachbarten Umfeld.

In Form der Energie E_g haben wir nicht nur, wie vorstehend beschrieben, den nach außen abgegrenzten Teil der Ladungs-Feinmasse des Verbundes von Proton und Elektron, also des Atoms vor uns. Die Energie E_g ist vielmehr die grundlegende physikalische Größe, die die Eigenschaften der Pufferzone zwischen den Atomen, und zwar sowohl **innerhalb** des Atomverbandes, wie auch bei Kraftwirkungen **zwischen** Körpern definiert. Die nachstehenden Überlegungen nehmen teilweise bereits Bezug auf spätere Kapitel, die der Kontraktion der Masse sowie der Gravitation gewidmet sind.

Um die physikalische Natur von E_g darzustellen, werden aus (7.120) und (7.124) folgende gleichwertige Formen entwickelt:

$$E_g = \frac{m_q}{2} \cdot c^2 \cdot \left(\frac{m_e}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_n}{c}\right)^4,$$

$$E_g = \frac{m_q}{2} \cdot \left(v_n \cdot \sqrt{\frac{m_e}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{v_n}{c} \cdot \sqrt{\frac{m_e}{2}}\right)^2,$$

sowie schließlich mit

$$v_g = v_n \cdot \sqrt{\frac{m_e}{2}} = v_n \cdot k_m$$

$$E_g = \frac{m_q}{2} \cdot v_g^2 \cdot \left(\frac{v_g}{c}\right)^2 = \frac{m_q}{2} \cdot (v_g \cdot k_s)^2.$$

Dabei ist

$$k_m = \sqrt{\frac{m_e}{2}} = \sqrt{\frac{2h}{Q_e^2 \cdot c}}$$

das Massenverhältnis und

$$k_s = \frac{v_g}{c}$$

der Schlupf.

Die für die Pufferzone um das Atom maßgebende Energie ist also

- abhängig von der 4. Potenz der Geschwindigkeit des Elektrons,
- in zweifacher Weise auf die halbe Ladungs-Feinmasse $\frac{m_q}{2}$ als Bezugsgröße umzurechnen, nämlich hinsichtlich Massenverhältnis k_m und Schlupf k_s .

Dass sich aus dem Quadrat des Schlupfes $\frac{v_g^2}{c^2}$ direkt ein Kontraktionsfaktor

$$f(v_g) = \sqrt{1 - \frac{v_g^2}{c^2}}$$

bilden lässt, ist dabei ein bezeichnender Zusammenhang im Hinblick auf die später erläuterte relativistische Änderung der Masse des Elektrons und des Radius seiner Umlaufbahn beziehungsweise des Quotienten aus Masse und Radius.

Der Schlupf zwischen der mit Lichtgeschwindigkeit strömenden Feinmasse und dem Elektron mit seiner weit geringeren Geschwindigkeit prägt die Verhältnisse in der Pufferzone um die Atome und hat die Abhängigkeit der Energie von der 4. Potenz der Elektronengeschwindigkeit zur Folge. Diese Abhängigkeit hat eine sehr bedeutsame Konsequenz an der Nahtstelle der Gesetzmäßigkeiten von Mikrokosmos und klassischer Physik!

Die Bewegung des Elektrons als Ladungsträger ist gleichbedeutend mit einem Strom, der eine proportionale Größe zur Elektronengeschwindigkeit darstellt. Die mit diesem Strom korrespondierende Kraft entspricht dem Quadrat des Stromes und ist damit proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Auch bei der mehr oder weniger intensiven Überlagerung der

Pufferzonen zweier oder mehrerer Atome bleibt die prinzipielle Abhängigkeit der Energie von der 4. Potenz der Elektronengeschwindigkeit, dagegen der wirksamen Kraft von der 2. Potenz erhalten.

Wenn sich also in der Pufferzone zwischen den Atomen die zugehörigen Energiebeträge partiell überlagern, kommt es zur algebraischen Addition der Energien sowie zur algebraischen Addition der Quadrate der Kräfte und damit zu einer resultierenden Kraft, die der vektoriellen Zusammenfassung entspricht. Bis hierher ist aber an sich nur das mathematische Bildungsgesetz für die Summe der Kräfte beschrieben, das wie gesagt der vektoriellen Zusammenfassung entspricht. Aber auch das für die vektorielle Zusammenfassung unverzichtbare Element der Richtung ist bei der Interaktion von Atomen natürlich definiert. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung:

Auf ein Atom können bezogen auf sein Zentrum stets nur radiale Kräfte sowie senkrecht dazu auf Umfangslinien um das Zentrum wirken. Die radiale Kraft ist bei der Interaktion mit einem Partner für das äußere Gleichgewicht verantwortlich. Das innere Gleichgewicht ist dadurch gewährleistet, dass die Komponente senkrecht zur radialen Kraft zu Null wird. Bei der Interaktion mit mehreren Partnern gelten diese Gleichgewichtsbedingungen für die sich überlagernden Kräfte in analoger Weise: Die resultierende radiale Kraft bestimmt sich nach dem äußeren Gleichgewicht, die **resultierende** Kraft in Umfangsrichtung, also senkrecht zur radialen Kraft muss für das innere Gleichgewicht zu Null werden.

Am Beispiel zweier radialer Kräfte, die sich zu einer resultierenden Kraft überlagern, erkennen wir, dass nur bei vektorieller Addition alle bestehenden Gesetzmäßigkeiten erfüllt sind:

- Jede der beiden ursprünglichen radialen Kräfte wird in eine radiale Komponente in Richtung der Resultante und in eine Komponente senkrecht dazu zerlegt, wobei das Additionsgesetz nach dem Quadrat der Kräfte gewahrt bleibt.
- Die Proportion der je zwei senkrecht aufeinander stehenden Komponenten ist aber nicht beliebig sondern durch das innere Gleichgewicht bestimmt. Die beiden senkrecht zur radialen Richtung wirkenden Komponenten müssen gegeneinander gerichtet und gleich groß sein. Diesem Bildungsgesetz entspricht allein die vektorielle Addition.

Die aufgezeigten Gesetzmäßigkeiten für Potentiale, Schlupf, Kontraktion und Addition der Kräfte gelten aber nicht exklusiv für ein einfaches Atom aus Proton und Elektron, denn jedem Teilchen und jedem noch so komplexen Verbund von Teilchen (Atome und Moleküle) hat prinzipiell die gleichen Eigenschaften.

- Jede Form von Masse unterliegt in der Interaktion mit ihrem Umfeld einem Potential, das durch das Quadrat einer Geschwindigkeit als äquivalentem Wert dargestellt werden kann.
- In dieser Geschwindigkeit kommt zum Ausdruck, dass es unter Einbeziehung der Vorgänge im Mikrokosmos niemals ein statisches Gleichgewicht geben kann. Statisches Gleichgewicht im Sinne der klassischen Physik heißt: Beschränkung der Betrachtung auf resultierende Kräfte an der Nahtstelle zwischen Masseteilchen.
- Bei der Interaktion zwischen Massen addieren sich die Energien der beteiligten Pufferzonen anteilmäßig in einem quantitativen Verhältnis, das der Intensität der Interaktion entspricht. Unbeschadet dessen bedeutet dies aber stets algebraische Addition der Massen und Energien, die an der Überlagerung beteiligt sind.
- Mit der algebraischen Addition der Massen korrespondiert die vektorielle Addition der Kräfte.

- Die Interaktion ist gleichbedeutend mit Feinmasse-Transfer aus der beziehungsweise in die Pufferzone und korrespondiert mit einer spezifischen Äquivalenzgeschwindigkeit und einem entsprechenden Kontraktionsfaktor.

7.7.6 Relativität der Masse

Wird ein Elektron in einer strömenden Feinmasse beschleunigt beziehungsweise verzögert, so nimmt es an Masse zu beziehungsweise ab. Bei dieser Anregung von außen ist das Paar der Elektroimpulse der anregenden Feinmasse-Strömung verantwortlich für die Dynamik. Zusammen mit den Oberflächenkomponenten („statisches“ Element) des Elektrons wird die Radialkomponente ausgelöst, die von allen Seiten ins Innere des Elektrons zeigt (Massenspeicherung und Beschleunigung) beziehungsweise in die umgekehrte Richtung bei Massenverlust und Verzögerung.

Wenn in der Folge vom „ruhenden Bezugssystem“ gesprochen wird, so geschieht dies im Vorgriff auf Abschnitt 9.1. Bei der Untersuchung der Dynamik des Elektrons im Atom darf der Atomkern, also im einfachsten Fall: das Proton, als „ruhendes Bezugssystem“ gelten.

Ausgehend vom „Ruhezustand“ des Elektrons (keine Geschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem) erfährt jede seiner differentiell kleinen Massen mit dem unveränderlichen Energieinhalt $dm \cdot c^2$ durch die Anregung eine Aufspaltung entsprechend

$$dm \cdot c^2 = dm \cdot c'^2 + dm \cdot v^2. \quad (7.125)$$

Dabei beziehen sich c' und v auf das ruhende Bezugssystem und c auf das Elektron, also auf die „interne Sicht“. Mit diesem Prozess der Beschleunigung von Geschwindigkeit 0 auf Geschwindigkeit v ist ein Anwachsen der Feinmasse dm auf den Wert dm' verbunden. Nach dem Impulssatz errechnet sich hierfür:

$$dm \cdot c = dm' \cdot c' = \frac{dm}{f(v)} \cdot c \cdot f(v). \quad (7.126)$$

D.h., die Masse dm wächst umgekehrt proportional zur Reduzierung der Geschwindigkeit:

$$dm \rightarrow dm' = \frac{dm}{f(v)}, \quad (7.127)$$

$$c \rightarrow c' = c \cdot f(v). \quad (7.128)$$

(7.128) eingesetzt in (7.125) ergibt nach Kürzen durch dm

$$c^2 - v^2 = [c \cdot f(v)]^2; \\ f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.129)$$

Durch die Beschleunigung und den damit verbundenen Massenzuwachs von $dm \rightarrow dm'$ ergibt sich ein resultierender Energiezuwachs, identisch mit der kinetischen Energie:

$$dE_k = dm' \cdot c^2 - dm \cdot c^2 = dm \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (7.130)$$

Für die Bedingung $v \ll c$ gilt mit entsprechend hoher Genauigkeit die uns vertraute Form:

$$dE_k \approx \frac{dm}{2} \cdot v^2. \quad (7.131)$$

Angewandt auf das Elektron mit der Masse m_e erfährt dieses also eine von der Relativgeschwindigkeit v_n gegenüber dem Atomkern abhängigen Massenzuwachs auf

$$m_e' = \frac{m_e}{f(v_n)}. \quad (7.132)$$

Die Grundbeziehung (6.143) gilt in Analogie zu (7.126) in der allgemeinen Form, die die Relativgeschwindigkeit einschließt:

$$m_e \cdot \lambda_C = m_e' \cdot \lambda_C' = \frac{h}{c}. \quad (7.133)$$

Die COMPTON-Wellenlänge erfährt also eine Abnahme auf den Wert:

$$\lambda_C' = \lambda_C \cdot f(v). \quad (7.134)$$

Dieser Zusammenhang gilt aber nicht nur für die Gesamtheit des Elektrons und Beziehung (6.143), sondern auch für die Teilmenge der Ladungs-Feinmasse und die zugehörige Beziehung (7.96).

Die Relativität oder Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse wurde bekanntlich von EINSTEIN in seiner speziellen Relativitätstheorie postuliert. Hierzu ist jedoch konkretisierend zu ergänzen, dass dieser relativistische Massenzuwachs keinesfalls als „wundersame“ Massenvermehrung aufgefasst werden darf, gespeist von einer Energiequelle, die als Phänomen quasi **neben** der Masse steht. Vielmehr ist alle Energie identisch mit Masse. Wenn also Masse, ob nun als Materiebaustein oder Feinmasse, einen Geschwindigkeitszuwachs erfährt, dann ist damit stets Anlagerung weiterer Feinmasse entsprechend Beziehung (7.132) verbunden.

Der Energie-/Massezuwachs des Elektrons ergibt sich nach (7.130) zu

$$W_k = m_e \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{c}\right)^2}} - 1 \right]. \quad (7.135)$$

Unter der Bedingung $v_n \ll c$ gilt:

$$W_k \approx \frac{m_e}{2} \cdot v_n^2. \quad (v_n \ll c) \quad (7.136)$$

W_k ist also identisch mit der kinetischen Energie für Geschwindigkeiten weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit.

7.7.7 Das Atom als Energiespeicher

Ausgehend von den beiden letzten Unterabschnitten ist für die innere Dynamik des Atoms eine zweifache Relativität der Feinmasse festzustellen.

- Nach Unterabschnitt 7.7.5 unterliegt die Ladungs-Feinmasse einer relativistischen Änderung abhängig vom gegenseitigen Abstand der Ladungsträger, hier: Proton in seiner Einwirkung auf das Elektron.
- Nach Unterabschnitt 7.7.6 unterliegt die gesamte Masse des Elektrons einer relativistischen Änderung abhängig von der gegenseitigen Geschwindigkeit der Ladungsträger, hier: das Elektron relativ zum Proton.

Wir nehmen nun - wie in den beiden letzten Kapiteln geschehen - den Grenzfall der Elektronenumlaufbahn mit dem Wertepaar von Bahnradius und -geschwindigkeit

$$r_n \rightarrow \infty, \quad v_n = 0$$

als Referenzbahn. Die Zusammenfassung der relativistischen Änderung nach (7.115) abhängig vom Abstand, mit der relativistischen Änderung nach (7.136) abhängig von der Geschwindigkeit, ergibt bezogen auf die Referenzbahn das resultierende Energiepotential

$$\begin{aligned} W_P &= W_e + W_k, \\ W_P &= -m_e \cdot v_n^2 + \frac{m_e}{2} \cdot v_n^2, \\ W_P &= -\frac{m_e}{2} \cdot v_n^2. \end{aligned} \quad (7.137)$$

Die Energieänderung abhängig von relativem Abstand und relativer Geschwindigkeit sind also gegenläufig, wobei erstere mit einem doppelt so hohen Absolutwert zu Buche schlägt. Hierbei wird jeweils die Bedingung $v_n \ll c$ unterstellt, die aber für alle Elektronenbahnen erfüllt ist. Die Energie W_P nach (7.137) sowie die zugehörige Feinmasse

$$m_P = \frac{m_e}{2} \cdot \left(\frac{v_n}{c}\right)^2 \quad (7.138)$$

repräsentieren den dynamischen Teil der Energie des Atoms, der dem Anregungszustand des Atoms entspricht. Dabei ist Anregung im Sinne eines wachsenden Bahnradius r_n und des zugehörigen Faktors n zu verstehen.

Die gewählte Referenzbahn führt zu negativen Werten von W_P . Dies ist aber lediglich ein Problem der Eichung. Tatsächlich muss die Umlaufbahn des Elektrons im kürzesten Abstand entsprechend $n = 1$ und mit der größten Bahngeschwindigkeit $v_n = v_1$ als Nullpunkt für die dynamische Energie des Atoms betrachtet werden. Am Nullpunkt ist der Energie-/Feinmassespeicher des Atoms leer. Die größte dynamische Energie kommt der Referenzbahn zu und der gesamte Dynamikbereich oder das Speichervermögen entspricht dem Wert

$$W_{P1} = \frac{m_e}{2} \cdot v_1^2. \quad (7.139)$$

Die Steigerung des Abstands des Elektrons entsprechend den Werten $n = 1, 2, 3 \dots$ hat die Aufnahme von Feinmasse zur Voraussetzung, die dem Atom von außen als Strahlungsenergie beziehungsweise Feinmasse der Strahlung zugeführt werden muss. Die durch die Strahlung „angebotene“ Feinmasse wird also von dem aus Proton und Elektron gebildeten Atom bis zu einer gewissen Grenze absorbiert, wobei der Abstand des Elektrons zum Proton wächst. Das Atom wird - bildlich gesprochen - unter Strahlungsdruck wie ein Ballon „stoßweise“ im Sinne der Quantensprünge mit Feinmasse, sprich: Energie, „aufgeblasen“ und hat ständig die Bereitschaft, diesen Inhalt wieder stufenweise abzugeben, wenn die Umgebung sich nicht durch Gegendruck widersetzt.

Der Dynamik des Atoms als Energie- und Feinmasse-Speicher sind enge Grenzen gesetzt. Es ergibt sich mit (7.106) für das Speichervermögen:

$$\begin{aligned} W_{P1} &= \frac{m_e}{2} \cdot v_1^2 = m_e \cdot c^2 \cdot \frac{c^2 \cdot Q_e^4}{8h^2}; \\ W_{P1} &\approx 2,7 \cdot 10^{-5} \cdot m_e \cdot c^2. \end{aligned} \quad (7.140)$$

Das entsprechende Speichervermögen für Feinmasse ist

$$\Delta m \approx 2,7 \cdot 10^{-5} \cdot m_e \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \cdot m_P$$

Bezogen auf die Masse m_P des Protons wirkt sich das maximale Speichervermögen für Masse also mit einem Faktor von $1,5 \cdot 10^{-8}$ aus.

7.7.8 Das Neutron

Auf der Basis vorstehender Überlegungen eröffnet sich nun aber auch die Möglichkeit, sich der Natur des Neutrons zu nähern.

Für das Elektron gibt es keine engere „Tuchföhlung“ zum Proton als es der kürzeste Radius der Umlaufbahn entsprechend $n = 1$ zulässt. Wird jedoch bildlich der schwere Kern des Elektrons ausgestoßen, so kann die verbleibende Ladungs-Feinmasse auf einer Bahn zirkulieren, die eng um das Proton gezogen ist und deren Radius nachfolgend berechnet werden soll.

Die Zunahme der Ladungs-Feinmasse aufgrund der Relativgeschwindigkeit zum Proton muss in Beziehung (7.96) noch berücksichtigt werden, damit die eingangs stillschweigend formulierte Bedingung $v \ll c$ entfallen kann. Beziehung (7.96) wird damit durch folgende modifizierte Form ersetzt:

$$\frac{m_q}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{c}\right)^2}} \cdot \frac{u_n}{n} = \frac{h}{c}. \quad (7.141)$$

Daraus errechnet sich in entsprechender Modifizierung von (7.103) der Bahnradius zu:

$$r_n = \frac{h \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{c}\right)^2}}{\pi \cdot c \cdot m_q} \cdot n^2. \quad (7.142)$$

Das Kräftegleichgewicht von COULOMB-Anziehungskraft entsprechend (7.91) und Zentrifugalkraft föhrt in Analogie zu (7.105) zu der Beziehung:

$$\frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r_n^2} = \frac{m_q}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_n}{c}\right)^2}} \cdot \frac{v_n^2}{r_n}. \quad (7.143)$$

D. h., es wird im Gegensatz zu (7.105) einerseits nur die pure Ladungs-Feinmasse berücksichtigt (ohne den Kern des Elektrons) und andererseits die relativistische Massenzunahme in Ansatz gebracht.

Wird (7.142) in (7.143) eingesetzt, so ergibt sich für die Berechnung der Bahngeschwindigkeit:

$$v_n = \frac{Q_e \cdot c^2}{2h} \cdot \sqrt{\frac{h}{c}} \cdot \frac{1}{n}. \quad (7.144)$$

Die Masse der (verbliebenen) Ladungs-Feinmasse „pur“ des (abgestoßenen) Elektronenkerns muss aufgrund des Zuwachses entsprechend (7.127), der Differenz der Massen von Neutron m_N und Proton m_P entsprechen. Deshalb gilt mit Übergang von Index n für r_n, v_n auf Index N für Neutron:

$$\frac{m_q}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_N}{c}\right)^2}} = m_N - m_P. \quad (7.145)$$

Daraus ergibt sich mit (7.43)

$$\frac{v_N}{c} = \sqrt{1 - \left[\frac{Q_e^2 \cdot c \cdot m_e}{h \cdot (m_N - m_P)} \right]^2}; \quad \frac{v_N}{c} = 0,999\,983 \dots \quad (7.146)$$

Für die das Neutron kennzeichnende Zahl n_N , deren Kehrwert ein Maß für die Verdichtung der Masse darstellt, ergibt sich mit (7.144):

$$n_N = \frac{c \cdot Q_e}{2v_N} \cdot \sqrt{\frac{c}{h}}; \quad n_N = 0,06 \dots \approx \frac{1}{16,6}. \quad (7.147)$$

Für den Radius r_N der Umlaufbahn der negativen Ladungs-Feinmasse des Neutrons errechnet sich aus (7.142) unter Einsetzen von (7.145):

$$r_N = \frac{h}{\pi \cdot c \cdot (m_N - m_P)} \cdot n_N^2; \quad r_N \approx 10^{-15} \text{ m}. \quad (7.148)$$

Das Neutron ist also als Proton im Verbund mit einem kernlosen Elektron aufzufassen. Es vereinigt in dichter Packung seine eigene positive Ladungs-Feinmasse mit einer auf Distanz gehaltenen zirkulierenden negativen Ladungs-Feinmasse. Diese Distanz entspricht dem Bahnradius $r_N \approx 10^{-15} \text{ m}$, wobei außerhalb dieser Grenze die Neutralisierung von positiver und negativer Ladung gegeben ist. Dass der durch die COMPTON-Wellenlänge λ_{CP} des Protons entsprechend (7.62) determinierte Radius des Kerns des Protons mit

$$r_P = \frac{\lambda_{CP}}{2} \approx 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ m} \quad (7.149)$$

noch um den Faktor 1,5 kleiner ist, sei der Vollständigkeit halber erwähnt. Betrachten wir abschließend den für den Massenzuwachs maßgebenden Faktor

$$f_{vN} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_N}{c}\right)^2}}, \quad (7.150)$$

so errechnet sich für die negative Ladungs-Feinmasse des Neutrons der stark ins Gewicht fallende Wert von

$$f_{vN} \approx 173.$$

Zum Vergleich beträgt dagegen für $n = 1$, also für das niedrigste Energieniveau des Elektrons, das ja dessen höchste Bahngeschwindigkeit aufweist, der Faktor für den Massenzuwachs nur

$$f_{vK} = 1,000\,026 \dots$$

Es bedarf also von daher praktisch keiner Korrektur der für den Bahnradius ermittelten Beziehung (7.104).

7.7.9 Zusammenfassende Betrachtung

Spätestens an dieser Stelle ist es angezeigt, ein vorläufiges Resümee zu ziehen.

1. Alle dargestellten Überlegungen zur strömenden Feinmasse kennen keine Barriere zwischen elektromagnetischer Wirkung und den auf die Masse wirkenden Kräften. Beide Wirkungen sind identisch und es besteht auch keine Veranlassung nach einer Wirkung von Teilchen, also Photonen oder Lichtquanten, und einer solchen von elektromagnetischen Wellen aufzutrennen. Das Postulat der Welle-Teilchen-Dualität elektromagnetischer Strahlung konstruiert einen Gegensatz zweier physikalischer Erscheinungsformen. Dass dieses scheinbar widersprüchliche Verhalten in der spezifischen Natur dieses besonderen „Teilchens“ liegt, drängt sich auf, ohne dass solche Überlegung reflexartig als Rückfall in vorquantenmechanische Denkweise abgetan werden kann. Es tut quantenmechanischer Gesetzmäßigkeit keinen Abbruch, dass in diesem Teilchen elektromagnetische Eigenschaften immanent bleiben und bei Interaktion mit elektromagnetischen Feldern im atomaren Bereich ihre Wirkung zeigen. Pragmatisch und ohne den Tabubruch zu fürchten, ist zu beleuchten, welche Struktur diesem Teilchen von definierter Energie und äquivalenter Masse bei Beachtung elektromagnetischer Gesetzmäßigkeit zukommt.

Aus der Berechnung ergibt sich ein Strukturelement von konkreten Abmessungen, das intern ein komplexes Schwingungsverhalten aufweist, und zwar sowohl in Ausbreitungsrichtung wie auch in rotierender Form senkrecht dazu. Die Verkettung elektromagnetischer Gesetzmäßigkeit und strömender Feinmasse tritt dabei markant in Erscheinung. Ob Strukturelement, Teilchen, Photon oder Lichtquant benannt, die definierte Portion an Feinmasse in einer definierten räumlichen Struktur ist gekennzeichnet durch eine Zylinderform, deren Länge der Wellenlänge entspricht.

Die Teilchen unterliegen als Kollektiv Verteilungsgesetzen, verlieren aber nicht ihre durch die Phasenlage bestimmte Orientierung gegenüber Nachbarpartikeln. Bei der Superposition von Strukturelementen im engen Umfeld von Atomen wirken sich diese eingetragenen Eigenschaften als überlagerter Effekt zusätzlich zum atomaren Feldeinfluss aus und beeinflussen die daraus resultierende Verteilung des Kollektivs. Aus dieser Perspektive erklären sich die Eigenschaften des Lichts bei Beugung oder Interferenz.

2. Die dargelegte innere Struktur der Materiebausteine wie Elektron, Proton und Neutron von strömender Feinmasse schließt keinesfalls die Existenz von unterlagerten Substrukturen aus. Im Gegenteil lässt das bei jeder Form des Elektromagnetismus (im Mikro- wie im Makrokosmos) typische Überlagerungsprinzip freien Raum für die vielfältigsten „Kompositionen“ von Einzelwirkungen, die aber in der Kombinationswirkung nach den bekannten Gesetzmäßigkeiten festgelegt sind.
3. Die aufgezeigten physikalischen Gegebenheiten brechen auch mit der bislang unwidersprochenen Aussage in der wissenschaftlichen Literatur, dass bereits bei den Anfangsüberlegungen zur Kernphysik nach dem BOHR-Modell ein Gegensatz zwischen den Gesetzen klassischer Physik und den physikalischen Gesetzmäßigkeiten im Mikrokosmos zu konstatieren wäre. Die aus diesem scheinbaren Widerspruch sich ergebenden Konsequenzen, dass z.B. Elektronen nach den Gesetzen der klassischen Physik in den Atomkern stürzen oder auf ihrer Bahn sich verzehrend permanent elektromagnetische Strahlung aussenden müssten, sind Trugschlüsse.

Davon zu unterscheiden ist aber natürlich die von PLANCK eingeführte fundamentale Gesetzmäßigkeit der Quantisierung der Energie in Materiebausteinen, die im Mikrokosmos schlechthin das konstituierende Element darstellt, dagegen in der klassischen Physik nur marginale Bedeutung besitzt. Diese Quantisierung ist aber nicht nur für die Materie sowie bei Emission und Absorption von elektromagnetischer Strahlung, also an der Nahtstelle der Materie, von Relevanz. Prinzipiell ist jede elektromagnetische Strahlung vom charakteristischen Merkmal der Quantisierung der Energie - identisch mit schwingender Feinmasse - geprägt, so dass es nicht nur erlaubt, sondern zwingend erforderlich ist, von diskreten Lichtstrahlen im strengen Wortsinn zu reden. Denn Licht kann keinesfalls als ein wellenförmig sich ausbreitendes Konglomerat ohne innere Struktur betrachtet werden, auch wenn sich eine bedeutende Untermenge seiner physikalischen Eigenschaften damit bequem beschreiben lässt.

4. Schließlich bleibt festzustellen, dass zu den Gesetzmäßigkeiten für die Freiraumstrahlung nach MAXWELL, die wie beim HERTZschen Dipol auf sich kugelförmig ausbreitende Funkwellen abgestellt sind, hier die zwingend erforderliche innere Struktur der Strahlung hinzugefügt wird. Denn weder bei der Emission von Licht noch bei der Abstrahlung der Funkwellen aus einer Antenne ergibt sich in der Folge ein strukturloser „Wellenbrei“. Vielmehr gilt von der Quelle bis zur Senke die obligatorische Gesetzmäßigkeit der Quantisierung und inneren Struktur: Ohne Struktur keine physikalische Natur!

7.8 Die Faktoren des elektrischen Stromes

Nach Beziehung (6.17) gilt für den Strom: $I = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v$. Bestimmende Faktoren sind dabei die Feinmasse pro Längeneinheit $\frac{m}{l}$ und die Strömungsgeschwindigkeit v .

Im Folgenden wird untersucht, welchen Variationen diese beiden Faktoren beim Stromfluss unterworfen sind. Ein Strom konstanter Stromstärke in einer homogenen, widerstandsbehafteten Leitung unterliegt Gesetzmäßigkeiten, die erheblich von den üblichen Darstellungen in der elektrotechnischen Literatur (Beispiel [2]) abweichen.

Aus Avogadro-Konstante, Dichte und molarer Masse des betrachteten Materials (als Beispiel wird Kupfer gewählt) lässt sich die Zahl der „beweglichen“ Ladungsträger im Leitungsband, bezogen auf die Volumeneinheit berechnen. Im einzelnen ist:

- Avogadro-Konstante: $N_A = 6,022\,1 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- Dichte von Kupfer: $\gamma_{Cu} = 8,9 \cdot 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$;
- Molare Masse von Kupfer: $M_r = 64 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

Daraus errechnet sich die Zahl der Kupferatome (und damit auch die Zahl der Valenzelektronen = „bewegliche“ Ladungsträger) pro Volumen zu:

$$n_e = \frac{\gamma_{Cu}}{M_r} \cdot N_A = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}. \quad (7.151)$$

$$N_e = n_e \cdot q \quad (7.152)$$

ist deshalb die Zahl der Ladungsträger pro Längeneinheit beim Durchsatz durch den Querschnitt q .

Der elektrische Strom lässt sich auch als Durchsatz elektrischer Ladung Q pro Zeiteinheit darstellen:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl} \cdot v. \quad (7.153)$$

Die elektrische Leistung

$$N = I^2 \cdot R$$

in einem Leiter mit Widerstand R und konstantem Querschnitt q ist proportional

- dem **Quadrat** des Stromes,
- dem **Quadrat** der Ladung pro Längeneinheit und
- dem Volumen des Leiters (konstanter Querschnitt!).

Es ist deshalb wohl zulässig, aus dem Querschnitt q und n_e als Zahl der Valenzelektronen pro Volumen, die Zahl der driftenden Ladungsträger = Elektronen zu ermitteln, aber nicht etwa die resultierende elektrische Ladung pro Längeneinheit!

Markant tritt diese Eigenschaft in Beziehung (7.38) für die Elementarladung in Erscheinung:

$$Q_e = \sqrt{m_q \cdot \lambda_C}.$$

Für n Ladungsträger gilt:

$$\sqrt{n} \cdot Q_e = \sqrt{n \cdot m_q \cdot \lambda_C},$$

weil sich nicht etwa die Ladungen Q_e addieren, sondern die Ladungs-Feinmassen m_q der Ladungsträger.

n Elektronen entsprechen also \sqrt{n} Elementarladungen.

Dieser Effekt hat seine Ursache darin, dass Elektronen in einer Leitung oder auch in einer Kapazität immer unter Spannung stehen, also elektrische Energie repräsentieren (vergleichbar elastischer Energie in der Mechanik). Deshalb darf die Interaktion der Ladungsträger nicht vernachlässigt werden, und das bloße Aufaddieren der Zahl der Ladungen wie bei Zwetschgen in einem Korb führt in die Irre.

Diesen Zusammenhang erkennen wir im übrigen auch an der bekannten Formel für den Energieinhalt W des in einer Kapazität C gespeicherten elektrischen Feldes eines Elektrons:

$$W = \frac{Q_e^2}{2C}.$$

Würden sich die Ladungen Q_e zweier Elektronen nämlich addieren, würden sie zusammen nicht die doppelte, sondern eine vierfache Energie repräsentieren. Dieses offensichtlich sinnwidrige Ergebnis beleuchtet also in übereinstimmender Weise den beschriebenen Zusammenhang und führt auch aus der Sicht klassischer Elektrotechnik zum gleichen, vorstehend dargestellten Ergebnis.

Die in der elektrotechnischen Literatur üblicherweise angegebene Beziehung für die Driftgeschwindigkeit der Elektronen im Leiter

$$v_d = \frac{I}{N_e \cdot Q_e} = \frac{I}{q \cdot n_e \cdot Q_e} \quad (7.154)$$

ist also fehlerhaft!

Richtig gilt vielmehr folgende Ableitung. Mit (7.153) und (6.17) ist:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dl} \cdot v = \sqrt{\frac{dm}{dl}} \cdot v. & \left(\frac{dm}{dl} = \frac{m}{l} \right) \\ \frac{dQ}{dl} &= \sqrt{\frac{dm}{dl}}; & (7.155) \\ dQ &= \sqrt{dm \cdot dl}. \end{aligned}$$

Wie bereits ausgeführt, gilt nach (7.38) für die elektrische Elementarladung

$$Q_e = \sqrt{m_q \cdot \lambda_C}.$$

Dabei ist m_q die Ladungs-Feinmasse des Elektrons und λ_C seine COMPTON-Wellenlänge.

Damit errechnet sich mit (7.152) und (7.155):

$$\frac{dQ}{dl}(l=0) = \sqrt{N_e \cdot m_q} = \sqrt{q \cdot n_e \cdot m_q} = \sqrt{\frac{q \cdot n_e}{\lambda_C}} \cdot Q_e; \quad (7.156)$$

$$\frac{dm}{dl}(l=0) = \frac{m_0}{l_0} = \frac{q \cdot n_e}{\lambda_C} \cdot Q_e^2. \quad (7.157)$$

Für $q = 10^{-6} m^2$ errechnet sich beispielhaft mit (7.151):

$$\frac{m_0}{l_0} = 1,11 \dots \cdot 10^{-9} \frac{kg}{m}.$$

Die zugehörige Geschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v_0 = \frac{I}{\frac{dQ}{dl}(l=0)} = \frac{I}{\sqrt{\frac{q \cdot n_e}{\lambda_C}} \cdot Q_e}. \quad (7.158)$$

Für $I = 1A = 1,12 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{kg \cdot m}}{s}$ errechnet sich beispielhaft: $v_0 = 33,6 \frac{m}{s}$.

Für die beispielhaften Werte von q und I ergäbe sich nach (7.154) $v_d = 7,45 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}$, und durch Rückrechnung (zur Kontrolle) aus $\frac{m_0}{l_0} = 1,11 \cdot 10^{-9} \frac{kg}{m}$ der völlig unplausible Wert von

$$\frac{m_0}{l_0}(v_d) = \frac{m_0}{l_0} \cdot \frac{v_0^2}{v_d^2} = 226 \frac{kg}{m}.$$

Dass in (7.157) und (7.158) als Bezugspunkt $l = 0$ gewählt wurde, bedeutet, dass es sich in Strömungsrichtung der Feinmasse um das Ende der Leitung handelt. Bei einer Leitungslänge von l_L entspricht also $l = l_L$ dem Anfang der Leitung.

Über die gesamte Leitungslänge ist zwar die Stromstärke konstant, nicht aber der Differentialquotient der Feinmasse in Form der Feinmasse pro Längeneinheit $\frac{dm}{dl}$.

Denn am Anfang der Leitung ist dieser Wert am größten und nimmt kontinuierlich auf dem Weg zum Leitungsende ab. Dieser „Verlust“ an Feinmasse entlang der Leitung ist identisch mit dem ohmschen Verlust. Die Materie des Leiters absorbiert also während des Stromflusses permanent Feinmasse. Damit aber gleichwohl der Strom, also der Elektroimpuls entlang der Leitung konstant bleibt, ist die Geschwindigkeit der Feinmasse, die identisch ist mit der Geschwindigkeit der Ladungsträger, am Leitungsanfang am kleinsten und am Leitungsende am größten.

Als mechanisches Ersatzbild des Stromes kann man sich eine Spiralfeder vorstellen, die in einen Zylinder gedrückt wird und dabei eine Reibung an der Wandung erfährt, die für jeden Längenabschnitt einen gleich großen Energieverlust erzeugt. Am Zylinderende ist die Spiralfeder entspannt und hat ihre Originalform ohne Deformation. Mit jedem Schritt in Richtung Zylinderanfang ist sie immer mehr zusammengedrückt (Die Spannung steigt linear!). Jede Windung der Spiralfeder erfährt auf dem Weg durch den Zylinder nach einer Kompression am Anfang eine gleichmäßig fortschreitende Entspannung, bis sie das Zylinderende erreicht hat. Damit ist natürlich auch ihre individuelle Geschwindigkeit jeweils variabel und weicht von der Grundgeschwindigkeit der Spiralfeder als Gesamtheit jeweils in definierter Form ab (Sie ist jeweils kleiner!).

Quintessenz dieser Überlegungen ist also die Erkenntnis, dass ein Strom von z.B. 1A genauso wenig eindeutig definiert ist wie etwa die kinetische Energie durch Masse m und Geschwindigkeit v mit einem Wert von z.B.

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = 1kg \frac{m^2}{s^2}.$$

Bei der kinetischen Energie sind uns die beispielhaften Alternativen von

$$\begin{aligned} m &= 2kg, & v &= 1 \frac{m}{s} & \text{oder} \\ m &= \frac{1}{2}kg, & v &= 2 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

vertraut. Bei der elektrischen Stromstärke in der Definition nach (6.17) liegen aber prinzipiell vergleichbare Bedingungen vor und wir stellen fest: Mit der Definition einer Stromstärke von z.B. 1A haben wir den maßgebenden physikalischen Prozess nur pauschal eingegrenzt, aber noch nicht eindeutig beschrieben. Wie die maßgebenden Parameter variieren, soll im folgenden dargestellt werden.

Der gleichmäßige Energieverlust entlang der Leitung ist identisch mit der gleichmäßigen Abnahme der strömenden Feinmasse pro Längeneinheit, die den Strom bildet. Es gilt also:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{dm}{dl} \right) = \frac{d^2m}{dl^2} = konst. \quad (7.159)$$

Nach Maßgabe dieser Größe geht also Feinmasse von der Strombahn in die Materie des Leiters über. Wird dieser Feinmasse-Übergang nach (7.159) energetisch bewertet, so ergibt sich für jeden differentiell kleinen Abschnitt die differentiell kleine Leistung

$$dN = \frac{d^2m}{dl^2} \cdot dl \cdot c^2 \cdot v_0. \quad (7.160)$$

Die Geschwindigkeit v_0 weist in radiale Richtung, also in Richtung des POYNTINGSchen Vektors. Der konstante Energieverlust pro Längeneinheit entlang der Leitung hat einen konstanten Wert von v_0 zur Voraussetzung. Es wäre nun prinzipiell gleichgültig, welches Paar der beiden konstanten Werte $\frac{d^2m}{dl^2}$ und v_0 gewählt wird, wenn mit ihrem Produkt ein zutreffendes Ergebnis für die Verluste nach (7.160) erzielt wird. Zweckmäßig wird für v_0 aber der Wert der Strömungsgeschwindigkeit in Längsrichtung am **Leitungsende** gewählt, an dem Punkt also, an dem das driftende Elektronen-, „Gas“ völlig entspannt ist (Spannung = 0 am letzten differentiell kleinen Stück der Leitung). Kennzeichnend ist, dass die Paarigkeit des Elektroimpulses mit identischer Geschwindigkeit v_0 für radiale wie Längsrichtung auch für die differentiell kleine Leistung, die die ohmschen Verluste abbildet, gewahrt bleibt.

Unter diesen Prämissen ergibt sich mit (7.158) folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2m}{dl^2} \cdot dl \cdot c^2 \cdot v_0 &= I^2 \cdot dR = I^2 \cdot \frac{\rho \cdot dl}{q}, \\ \frac{d^2m}{dl^2} &= \frac{I^2}{v_0} \cdot \frac{\rho}{c^2 \cdot q} = \frac{I^2}{\frac{I}{\sqrt{\frac{q \cdot n_e}{\lambda_C}} \cdot Q_e}} \cdot \frac{\rho}{c^2 \cdot q}, \\ \frac{d^2m}{dl^2} &= I \cdot Q_e \cdot \sqrt{\frac{n_e}{q \cdot \lambda_C}} \cdot \frac{\rho}{c^2} \end{aligned} \quad (7.161)$$

sowie

$$\frac{d^2m}{dl^2} \cdot v_0 = I^2 \cdot \frac{\rho}{c^2 \cdot q}. \quad (7.162)$$

Für das im Beispiel gewählte Material Kupfer ist mit (6.25):

$$\rho = \frac{1}{56 S \frac{m}{mm^2}} = 1,42 \dots \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}$$

und es ergibt sich in Fortsetzung des Beispiels:

$$\frac{d^2m}{dl^2} = 5,91 \dots \cdot 10^{-21} \frac{kg}{m^2}$$

sowie

$$\frac{d^2m}{dl^2} \cdot v_0 = 1,99 \dots \cdot 10^{-19} \frac{kg}{m \cdot s}.$$

Durch Integration ergibt sich aus (7.161) mit (7.157) und (7.158):

$$\frac{dm}{dl} = I \cdot Q_e \cdot \sqrt{\frac{n_e}{q \cdot \lambda_C}} \cdot \frac{\rho}{c^2} \cdot (l_0 + l), \quad (7.163)$$

$$\frac{dm}{dl}(l=0) = \frac{I^2}{v_0^2} = \frac{q \cdot n_e}{\lambda_C} \cdot Q_e^2 = I \cdot Q_e \cdot \sqrt{\frac{n_e}{q \cdot \lambda_C}} \cdot \frac{\rho}{c^2} \cdot l_0;$$

$$l_0 = \frac{Q_e}{I} \cdot \sqrt{\frac{n_e \cdot q^3}{\lambda_C}} \cdot \frac{c^2}{\rho}. \quad (7.164)$$

Für l_0 errechnet sich mit den Werten des Beispiels $l_0 = 188, \dots \cdot 10^9 \text{ m}$.
Damit ergibt sich mit (7.164) in (7.163):

$$\frac{dm}{dl} = I \cdot Q_e \cdot \sqrt{\frac{n_e}{q \cdot \lambda_C}} \cdot \frac{\rho}{c^2} \cdot \left(\frac{Q_e}{I} \cdot \sqrt{\frac{n_e \cdot q^3}{\lambda_C}} \cdot \frac{c^2}{\rho} + l \right).$$

Zusammenfassend erhalten wir aus (7.157), (7.163) und (7.164) das Ergebnis:

$$\frac{dm}{dl} = \frac{m_0}{l_0} \cdot \left(1 + \frac{l}{l_0} \right); \tag{7.165}$$

$$v = \frac{I}{\sqrt{\frac{m_0}{l_0} \cdot \left(1 + \frac{l}{l_0} \right)}}; \tag{7.166}$$

mit

$$\frac{m_0}{l_0} = \frac{q \cdot n_e}{\lambda_C} \cdot Q_e^2, \tag{7.167}$$

$$l_0 = \frac{Q_e}{I} \cdot \sqrt{\frac{n_e \cdot q^3}{\lambda_C}} \cdot \frac{c^2}{\rho}. \tag{7.168}$$

Außerdem gilt :

$$v_0 = \frac{I}{\sqrt{\frac{m_0}{l_0}}}. \tag{7.169}$$

Wenn wir die aus dem Beispiel errechneten Parameter vor dem Hintergrund des dargestellten mechanischen Ersatzbildes bewerten, erkennen wir das gewaltige „Potential“ der „elektrischen Spiralfeder“ gegenüber der als Ersatzbild gewählten mechanischen Spiralfeder. Zwischen beiden physikalischen Phänomenen liegt das enorme Übersetzungsverhältnis von Masse und Energie, das durch EINSTEINS fundamentale Beziehung nach (6.9) zum Ausdruck kommt. In Beziehung (7.160) für die elektrische Leistung ist dieser Zusammenhang durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit als bestimmenden Faktor repräsentiert.

Das zur Veranschaulichung gewählte Beispiel der Spiralfeder lässt sich nun aber auch unmittelbar auf die Wirkungen von Induktivität und Kapazität übertragen: Dabei gleitet die Spiralfeder im Zylinder **ohne** Reibung an der Wandung. Gleichgültig, ob die Spiralfeder mit Bezug auf ihre Originallänge gedrückt oder gezogen wird, sie erfährt eine Änderung der Länge und des gespeicherten Energieinhalts.

Der Änderung des Energieinhalts entspricht aber in der „elektrischen Realität“ Speicherung beziehungsweise Entnahme von Feinmasse senkrecht zur Strombahn. Dabei macht es bei der enormen Flexibilität des Mediums Feinmasse, dessen Konzentration im Raum eine gigantische Spannweite zu überstreichen vermag, keinen Unterschied, ob die Speicherung sich weit ausgreifend in den Raum vollzieht wie bei einer Luftspule (Induktivität) oder bevorzugt auf engem Raum wie bei einem Kondensator (Kapazität). Dabei ist besonders darauf hinzuweisen, dass diese räumliche Konzentration im Kondensator ja nur ein unvollständiges Bild ergibt, weil der Bereich der neutralisierten Ladungs-Feinmasse, der weit in den Raum ausgreift, aus der Betrachtung nicht ausgeblendet werden darf.

Speziell mit Blick auf den Wechselstrom lässt sich die Hilfsvorstellung „Spiralfeder“ zu einer abschließenden Veranschaulichung elektrischer Schwingung nutzen:

Denken wir uns zwei über ein Gewicht (träge Masse) mechanisch verbundene Spiralfedern, die (ohne Vorspannung) beidseitig eingespannt sind und in der Horizontalen ohne Reibung in einem Zylinder gleiten.

Wird dieses System aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so tritt es in eine periodische Schwingung ein, wobei die beiden Federn im Gegentakt arbeiten, wie es dem Zusammenspiel von Induktivität und Kapazität entspricht. An sich können beiden Spiralfedern die Rollen von Induktivität oder Kapazität zugeordnet werden. Energetisch ist jedoch bei der Schwingung, der Mittellage (beide Federn entspannt, die träge Masse hat ihre höchste Geschwindigkeit) der Maximalwert des gespeicherten magnetischen Feldes zuzuordnen und den Extremwerten (links und rechts bei Richtungsumkehr der Schwingung) der Maximalwert des gespeicherten elektrischen Feldes.

8 Gravitation

8.1 Ladungsleitung

Betrachtet man ausgehend vom Mittelpunkt eines Ladungsträgers den von ihm ausgehenden Ladungsstrom, so ist das primäre Charakteristikum in jedem Raumelement die Verknüpfung jeder radialen Komponente mit den dazu senkrechten Komponenten, wobei letztere als Oberflächenkomponenten einer Kugelschicht von differentieller Dicke zugehören. Die Beträge von radialer wie zugehörigen Oberflächenkomponenten in der Kugelschicht sind vom Radius der betrachteten Kugelschicht abhängig, und zwar als proportionale Größe zu dessen Reziprokwert. Zwischen den verschiedenen Kugelschichten existiert ideale elektrische Kopplung, die ohne äußere Beeinflussung einem Gleichgewichtszustand oder Ruhezustand entspricht. Beim Verlassen dieses Ruhezustandes durch Interaktion mit einem anderen Ladungsträger im Abstand r , betrifft die gegenseitige Einwirkung jeweils die gesamte durch den zugehörigen Radius r definierte Schicht eines betroffenen differentiellen Ladungs-Teilstroms sowie den Anteil des Ladungsstromes, der als integrierte Größe außerhalb der Kugeloberfläche mit dem Radius r strömt.

Gedanklich kann die einen Ladungsträger umgebende Kugelgestalt, in der sein Ladungsstrom fließt, in differentiell kleine Pyramiden von quadratischem Grundriss zerlegt werden, deren Spitzen in die Mitte des Ladungsträgers fallen. Eine solche differentiell kleine Pyramide kann als elektrisches Ersatzbild für eine Leitung besonderer Art stehen, für die in Analogie zu den bekannten Leitungsgleichungen eines elektrischen Leiters der Nachrichtentechnik nach (6.30) und Abbildung 17 die entsprechenden Differentialgleichungen gebildet werden können. Der spezifische Längswiderstand \bar{R}' und die spezifische Querableitung \bar{G}' sind als Grundwerte identisch mit den von der Freiraumstrahlung her bekannten Werten. Die Effektivwerte beider Größen \bar{R}'_e und \bar{G}'_e in dieser für den Ladungsträger maßgebenden „Leitung“ besonderer Art, die sich nach außen aufspreizt, enthalten allerdings eine zusätzliche Komponente, die umgekehrt proportional ist zum Abstand r vom Mittelpunkt. Da die differentiell kleinen Pyramiden in ihrer Gesamtheit für die zum Ladungsträger gehörige komplette Kugel stehen, darf in der Differentialgleichung dieser besonderen Leitung in Form der Pyramide, im Folgenden „Ladungsleitung“ genannt, deshalb die Gesamtheit des jeweiligen Ladungsstromes in Ansatz gebracht werden.

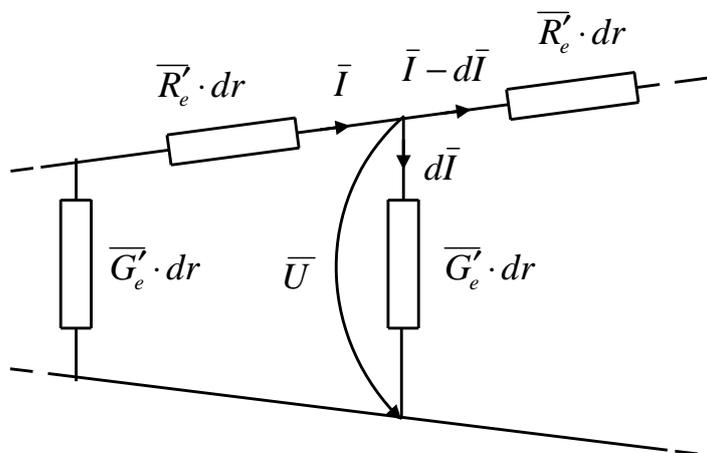


Abbildung 25: Ersatzbild der Ladungsleitung

Die elektrischen Verhältnisse auf dieser für den Ladungsstrom maßgebenden Ladungsleitung sind in Abbildung 25 dargestellt und die Ableitung der Beziehungen nachfolgend wiedergegeben. Der mit Rücksicht auf die Gravitation noch einzuführende Faktor α_g im Zusammenhang mit der Querableitung \bar{G}'_e wird später erläutert.

Die Ableitung basiert auf der bereits bekannten Gesetzmäßigkeit der Absolutwerte des Ladungs-

stromes von der Variablen r nach (7.27) mit (7.31). I steht in der Folge für die Hälfte von I_{qr}

und entspricht der abgehenden Welle bei verlustfreier Leitung, auf der sich durch Totalreflexion eine stehende Welle ausbildet. Der Übergang auf komplexe Zahlenwerte berücksichtigt jetzt außerdem die Natur des Ladungsstromes als sinusförmige Wechselgröße mit wellenförmiger Ausbreitung.

$$\bar{I} = \bar{I}_1 \cdot \frac{\lambda_C}{2\pi r} \cdot e^{-r\gamma}, \quad I_1 = \frac{1}{2}I_0, \quad I_0 = \sqrt{\frac{m_q}{\lambda_C}} \cdot c; \quad (8.1)$$

$$\overline{R_e'} = \overline{R'} \cdot \left(1 + \frac{1}{r\gamma_R}\right), \quad \overline{R'} = j\omega\mu_0 = j\omega; \quad (\mu_0 = 1) \quad (8.2)$$

$$\overline{G_e'} = \overline{G'} \cdot \left(1 + \frac{1}{r\gamma_G}\right), \quad \overline{G'} = j\omega\epsilon_0 = \frac{j\omega}{c^2}; \quad (\epsilon_0 = \frac{1}{c^2}) \quad (8.3)$$

$$\frac{1}{\gamma_R} = \frac{1+j}{\gamma_L}, \quad \frac{1}{\gamma_G} = \frac{1-j}{\gamma_L} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{r\gamma_R}\right)\left(1 + \frac{1}{r\gamma_G}\right) &= 1 + \frac{2}{r\gamma_L} + \frac{2}{r^2\gamma_L^2}; \\ \bar{I} \cdot \overline{R'G'} \cdot \left(1 + \frac{2}{r\gamma_L} + \frac{2}{r^2\gamma_L^2}\right) &= \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial r^2}; \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial r} = -\bar{I}_1 \cdot \frac{\lambda_C}{2\pi r} \cdot e^{-r\gamma} \cdot \left(\frac{1}{r} + \gamma\right), \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial r^2} = \bar{I}_1 \cdot \frac{\lambda_C}{2\pi r} \cdot e^{-r\gamma} \cdot \left(\frac{2}{r^2} + \frac{\gamma}{r} + \frac{\gamma}{r} + \gamma^2\right), \quad (8.7)$$

$$\bar{I} \cdot \overline{R'G'} \cdot \left(1 + \frac{2}{r\gamma_L} + \frac{2}{r^2\gamma_L^2}\right) = \bar{I} \cdot \left(\frac{2}{r^2} + \frac{2\gamma}{r} + \gamma^2\right).$$

$$\gamma^2 = \gamma_L^2 = \overline{R'G'} = -\frac{\omega^2}{c^2};$$

$$\gamma = \gamma_L = \sqrt{\overline{R'G'}} = \frac{j\omega}{c} = j\beta; \quad \overline{R'} = j\omega\mu_0 = j\omega; \quad (8.8)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_C}. \quad \overline{G'} = j\omega\epsilon_0 = \frac{j\omega}{c^2}; \quad (8.9)$$

Ausgehend von Abbildung 25 gilt für die Spannung:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{\partial \bar{I}}{\overline{G'} \cdot \left(1 + (1-j)\frac{1}{r\gamma}\right) \cdot \partial r} = -\frac{\bar{I} \cdot \left(\frac{1}{r} + \gamma\right)}{\overline{G'} \cdot \left(1 + (1-j)\frac{1}{r\gamma}\right)}, \\ \bar{U} &= -\frac{\bar{I} \cdot \gamma}{\overline{G'}} \cdot \frac{\frac{1}{r} + \gamma}{(1-j)\frac{1}{r} + \gamma}, \\ \bar{U} &= -\frac{\bar{I} \cdot \gamma}{\overline{G'}} \cdot \frac{\frac{1}{r} + j\frac{2\pi}{\lambda_C}}{(1-j)\frac{1}{r} + j\frac{2\pi}{\lambda_C}} \approx -\frac{\bar{I} \cdot \gamma}{\overline{G'}} \quad \text{für } r \gg \frac{\lambda_C}{2\pi}, \\ \bar{U} &\approx -\frac{\bar{I} \cdot \sqrt{\overline{R'G'}}}{\overline{G'}} = -\bar{I} \cdot \sqrt{\frac{\overline{R'}}{\overline{G'}}} = -\bar{I} \cdot c \quad \text{für } r \gg \frac{\lambda_C}{2\pi}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

\bar{U} ist der Spannungsabfall im Querschnitt.

Bei isolierter Betrachtung eines Ladungsträgers haben wir zunächst die Wellenausbreitung zu betrachten, wie wenn quasi der Ladungsträger gerade „eingeschaltet“ wird. Die elektrische Welle pflanzt sich mit Lichtgeschwindigkeit radial und ohne Endpunkt in den Raum gerichtet fort (abgehende Welle). Gleichwohl „verströmt“ sich die elektrische Energie natürlich nicht im

Raum, sondern der resultierende Ladungsstrom im eingeschwungenen Zustand ist eine wohl definierte endliche Größe. Dieser eingeschwungene Zustand bedeutet in elektrischer Interpretation, dass an jeder Stelle die Ladungsleitung wie „unterbrochen“ wirkt, also wie Leerlauf der Leitung. Damit wird die abgehende Welle an jeder Stelle in der Weise ideal reflektiert, dass keine weitere Energie in den Raum abfließt. Vielmehr erzeugt die abgehende Welle zusammen mit der reflektierten Welle eine stehende Welle, in der sich die im Raum „geparkte“ elektrische Energie manifestiert. Abgehende und reflektierte Welle haben den gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Drehsinn, und der Gesamtwert des Ladungsstromes beziehungsweise seiner differentiellen Teilströme setzen sich also stets aus 2 gleich großen Hälften zusammen. Der Maximalwert dieser stehenden Welle fällt analog $I_S = 2I_1 \cdot \frac{\lambda_C}{2\pi r} = I_0 \cdot \frac{\lambda_C}{2\pi r}$ nach der Hyperbelfunktion gegen Unendlich ab. (Mit dem Begriff „Maximalwert“ ist hier gleichwohl der Effektivwert des Stromes gemeint, der aber natürlich zu dem Maximalwert der sinusförmigen Schwingung in der bekannten festen Beziehung steht: $\dot{I}_S = \sqrt{2} \cdot I_S$) Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass für die abgehende Welle wie für die reflektierte Welle die gleiche Differentialgleichung gilt. Ohne Interaktion mit einem anderen Ladungsträger erzeugt die Reflektion des Ladungsstromes an jeder Stelle der Ladungsleitung eine gleich große Kraft für abgehende wie reflektierte Welle und damit Gleichgewicht. Trotzdem existiert in Form der stehenden Welle eine Wirkung im Raum. Zur Veranschaulichung kann die Erdatmosphäre herangezogen werden. Um aber den prinzipiell anderen Eigenschaften dieser besonderen „Atmosphäre“ um einen Ladungsträger Rechnung zu tragen, soll sie als Fluidum bezeichnet werden. Für dieses Fluidum des Ladungsträgers gelten allerdings konkret die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der strömenden Ladungs-Feinmasse mit den Alternativen rechtsdrehender und linksdrehender Wirbelbildung entsprechend positiver beziehungsweise negativer Ladung. Damit korrespondieren die spezifischen Eigenschaften der gegenseitigen Durchdringung der Fluida von Ladungsträgern mit den daraus resultierenden Wechselwirkungen. Für diese Wirbelbildung ist natürlich nicht allein das Geschehen auf einer einzelnen Ladungsleitung einer differentiell kleinen Pyramide zu betrachten, sondern das Zusammenspiel aller dieser Ladungsleitungen mit entsprechender Phasenfolge in radialer Richtung und senkrecht dazu.

Zu der Interaktion zweier Ladungsträger A und B ist zunächst festzustellen, dass die Ladungsleitung von A prinzipiell auch B zugänglich ist und umgekehrt. Es existiert also Superposition. Für die Interaktion eines Ladungsträgers A ist ausschließlich der Anteil seines Ladungsstromes relevant, der den Partner B umschlingt. Diese Umschlingung oder Verkettung gilt natürlich wechselseitig. Deshalb kommt **den** beiden Kugeloberflächen besondere Bedeutung zu, deren Mittelpunkt jeweils einem der Ladungsträger zugehört und deren Radius r dem gegenseitigen Abstand der Ladungsträger entspricht. Nur die Kugelschichten außerhalb dieser beiden begrenzenden Kugeloberflächen sind dadurch ausgezeichnet, dass der Drehsinn der abgehenden Welle gegenüber dem Drehsinn einer kompletten eingeschlossenen Kugelschicht des Partners an keiner Stelle einen Wechsel der Richtungszuordnung erfährt. Der Anteil des Ladungsstromes beider Ladungsträger, der auf den Raum zwischen den beiden Ladungsträger trifft und der dem Durchdringungsbereich beider begrenzender Kugeloberflächen entspricht, ist an der wechselseitigen Einflussnahme mit der daraus resultierenden Anziehung beziehungsweise Abstoßung **nicht** beteiligt. Jenseits der durch den Abstand der beiden Ladungsträger definierten Grenze ist dagegen jeweils bezogen auf den einen oder den anderen Partner eine Verkettung der Ladungsströme gegeben und dabei gleichzeitig nach 2 Alternativen dieser Verkettung zu unterscheiden, nämlich mit gleichem Drehsinn der beiden Partner oder entgegengesetztem Drehsinn.

Sollen die gefundenen Gesetzmäßigkeiten für die Wellenausbreitung in der Ladungsleitung von dem Modell der differentiell kleinen Pyramide schließlich auf das Kollektiv aller dieser Pyramiden, also auf die Kugelform übertragen werden, sind folgende Merkmale des kollektiven Geschehens im Umfeld eines Ladungsträgers festzuhalten: Mit jeder radial gerich-

teten Komponente der Strömung der Ladungs-Feinmasse sind die dazu senkrechten Oberflächenkomponenten verbunden, die ihrerseits aufeinander senkrecht stehen. Daraus ergibt sich zwingend, dass zwar für alle differentiellen Pyramiden die gleiche Differentialgleichung und deren Lösung gilt, aber keinesfalls monotone Gleichphasigkeit der Schwingungen. Vielmehr realisiert eine definierte Abfolge der Phasenverschiebung zwischen allen aus der gedanklichen Aufspaltung in Pyramiden sich ergebenden Richtungen erst die für eine Wellenausbreitung typische Wirbelbildung und, dass diese Wirbel im Umfeld eines Ladungsträgers alle Richtungen gleichberechtigt überstreichen. Mit der Interaktion der Ladungsträger unterliegt das Wechselspiel der Phasenfolgen von Wellenmaxima und -minima für alle Richtungen der gegenseitigen Einflussnahme. Aber allein die gegenseitigen Abstände und der damit verbundene Grad der Verkettung bestimmt die wirksam werdenden Kräfte zwischen den Ladungsträgern.

Bei einer Interaktion gegenpoliger Ladungsträger besteht abhängig vom Grad der Verkettung, also vom gegenseitigen Abstand r , partielle gegenseitige Auslöschung der elektrischen Wirkungen mit einer Tendenz zur Aufschaukelung dieses Prozesses durch gegenseitige Anziehung der Ladungsträger im Sinne einer Rückkopplung. Die abgehenden Wellen sind die primären Akteure des Geschehens, die reflektierten Wellen passen sich der jeweiligen Situation an. Die abgehenden Wellen gegenpoliger Ladungsträger schwächen sich gegenseitig, die treibende Kraft für die Ausdehnung der Ladungs-Feinmasse als elektrisches Feld wird geschwächt. Die gegenpoligen Fluida realisieren in jedem Raumpunkt der gegenseitigen Durchdringung Kräfte, die sich in integrierter Form als gegenseitige Anziehungskräfte der Ladungsträger manifestieren.

Da aber nach der Zwillingsnatur des Elektroimpulses mit einer gegenseitigen Annäherung gegenpoliger Ladungsträger immer auch eine Bewegung und damit ein Strom senkrecht dazu verbunden ist, der der anziehenden Kraft entgegenwirkt, strebt der elektrische Prozess insgesamt einem Gleichgewichtszustand zu, wobei die Elektronenbahn um ein Proton das typische Beispiel darstellt. Bei der Interaktion gleichpoliger Ladungsträger ist umgekehrt nach Maßgabe der Verkettung, Verstärkung statt Auslöschung der elektrischen Wirkungen festzustellen mit der Tendenz zum Abklingen dieses Prozesses durch gegenseitige Abstoßung der Ladungsträger im Sinne einer Gegenkopplung. Auch hier führt die Zwillingsnatur des Elektroimpulses zu einem dynamischen Vorgang mit angestrebtem Gleichgewichtszustand. Die gleichpoligen Fluida realisieren in jedem Raumpunkt der gegenseitigen Durchdringung Kräfte, die sich in integrierter Form als gegenseitige Abstoßungskräfte der Ladungsträger manifestieren.

Ladungs-Feinmassen gegenpoliger Ladungsträger sind aber nicht nur das Medium gegenseitiger Anziehung, sondern als Folge der gegenseitigen Durchdringung liegt in dem Umfange, in dem sich ihre elektrischen Wirkungen aufheben, neutralisierte Feinmasse vor. Es ist aber an dieser Stelle zu betonen, dass neutralisierte Ladungs-Feinmasse stets latente elektrische Energie bleibt, die sofort wieder in Erscheinung tritt, wenn die räumliche Zuordnung der Ladungsträger, die als Partner die Neutralisierung bewirken, eine Änderung erfährt. Das Fluidum eines Ladungsträgers ist also unverlierbar. Im Nahfeld gegenpoliger Ladungsträger ist diese Neutralisierung nur partiell gegeben, im Fernfeld je nach Abstand nahezu ideal. In dieser neutralisierten Feinmasse ist die mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit verbundene elektrische Energie im Wesentlichen neutralisiert, also nicht mehr wirksam. Aber die Existenz der neutralisierten Feinmasse im Raum bleibt eine Realität und damit ist zwingend eine physikalische Wirkung verbunden: Die stehende Welle in der Ladungsleitung wird nämlich von der Feinmasse anderer Materiebausteine nach Maßgabe von deren Masse und dem Faktor der Verkettung beeinflusst. Dieser Effekt ist identisch mit der Wirkung der Gravitation. Dabei ist einsichtig, dass der kapazitive Leitwert eines Raumelementes davon abhängt, welches Quantum an neutralisierter Feinmasse dieses Raumelement erfüllt. Deshalb ist die Wirkung der Gravitation nichts anderes als der Teil der abgehenden und reflektierten Welle in der Ladungs-

leitung, der von der Querableitung $\alpha_g^2 \cdot \overline{G'}$ abhängt. Zum Grundwert der Querableitung $\overline{G'}$ kommt also ein additiver Anteil $\alpha_g^2 \cdot \overline{G'}$ hinzu, der allein von dem Maß an neutralisierter Feinmasse an dieser Stelle abhängt. Da neutralisierte Feinmasse ja das Ergebnis der geschilderten elektrischen Prozesse zwischen Ladungsträgern ist, gilt natürlich auch für die neutralisierte Feinmasse das Prinzip der Verkettung einerseits und der Superposition andererseits. Neutralisierte Feinmasse hat keinen bevorzugten Drehsinn und kann weder anziehende noch abstoßende Wirkung bestimmen. Maßgebend ist jeweils das „Eigenleben“ jedes Ladungsträgers, der ausschließlich anziehend für seine Ladungs-Feinmasse wirkt. Zusätzliche neutralisierte Ladungs-Feinmasse, die mit seiner Ladungs-Feinmasse verkettet ist, verstärkt diese anziehende Kraft. Diese durch Verkettung mit neutralisierter Ladungs-Feinmasse anderer Materiebausteine ausgelöste anziehende Kraft ist also ein Überlagerungseffekt, der sich über die Ladungsleitung dem betrachteten Ladungsträger mitteilt. Aus Sicht des „anderen“ Materiebausteins ergibt sich der spiegelbildlich gleiche Effekt der Anziehung und insgesamt das Gleichgewicht der Kräfte. Abstoßende Kraft bei der Verkettung mit neutralisierter Ladungs-Feinmasse und der durch sie verursachten Gravitation kann es deshalb nicht geben. Die für den Einfluss der Gravitation maßgebende Spannung U_g ist identisch mit U nach Abbildung 25, wobei zur Berechnung von Absolutwerten ausgegangen werden kann:

$$U_g = U = I \cdot c. \quad (8.11)$$

Und der für die Gravitation maßgebende Strom beträgt:

$$I_g = I \cdot \alpha_g = U \cdot \sqrt{\frac{\alpha_g^2 \cdot \overline{G'}}{R'}}. \quad (I_g \ll I) \quad (8.12)$$

Dabei ist:

$$\alpha_g = \sqrt{\frac{m_T}{m_{q(T)}}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot v_g}{c}. \quad (8.13)$$

v_g ist die Wurzel aus dem Gravitationspotential und auf der Basis von m_T als der Masse des betrachteten Materiebausteins definiert. Natürlich könnte auch ein analoger Wert v_g' definiert werden, der die Ladungs-Feinmasse $m_{q(T)}$ dieses Materiebausteins zur Basis hat:

$$v_g' = \sqrt{\frac{m_T}{m_{q(T)}}} \cdot v_g. \quad (8.14)$$

v_g' ist der maßgebende Vergleichswert, um die Gravitationswirkung in der richtigen Proportion zu der ebenfalls auf dieser Basis von $m_{q(T)}$ definierten COULOMB-Wechselwirkungskraft darzustellen.

Licht (oder allgemein: Freiraumstrahlung) erfährt im Gravitationsfeld eine Kontraktion der Wellenlänge und die korrespondierende Verdichtung der strömenden Feinmasse. Dieser Effekt gilt in gleicher Weise für die Wellenausbreitung in der Ladungsleitung. Dieser rückkoppelnde Effekt kommt u.a. in dem von der Gravitation abhängigen Kontraktionsfaktor

$$f(v_g) = \sqrt{1 - \frac{v_g^2}{c^2}} \quad (8.15)$$

zum Ausdruck. Dessen ungeachtet ergibt sich:

$$v_g^2 = \frac{M_0 \cdot G}{r_0} \quad \text{für} \quad v_g \ll c. \quad (8.16)$$

Weiterhin ist:

$$M_0 = m_T, \quad r_0 = \frac{\lambda_{C(T)}}{2\pi}. \quad (8.17)$$

Für v_g^2 ergibt sich nach Einsetzen für $v_g \ll c$:

$$v_g^2 = \frac{2\pi \cdot m_T \cdot G}{\lambda_{C(T)}}. \quad (8.18)$$

Für α_g^2 errechnet sich:

$$\alpha_g^2 = \frac{m_T}{m_{q(T)}} \cdot \frac{2v_g^2}{c^2} = \frac{m_T}{m_{q(T)}} \cdot \frac{4\pi \cdot m_T \cdot G}{\lambda_{C(T)} \cdot c^2}. \quad (8.19)$$

Die Kraft der Gravitation auf Basis der Masse m_T ergibt sich in Anlehnung an die COULOMB-Wechselwirkungskraft

$$F_C = I^2 \cdot \pi$$

nach (7.90) zu:

$$\begin{aligned} F_g &= I_g^2 \cdot \pi = I^2 \cdot \pi \cdot \alpha_g^2 = F_C \cdot \frac{m_T}{m_{q(T)}} \cdot \frac{4\pi \cdot m_T \cdot G}{\lambda_{C(T)} \cdot c^2}, \\ F_g &= F_C \cdot \frac{4\pi \cdot m_T^2 \cdot G}{Q_e^2 \cdot c^2}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Für jeden Materiegrundbaustein wie Proton und Elektron ergibt sich derselbe Wert der Elementarladung Q_e und die gleiche COULOMB-Wechselwirkungskraft. Für die Paarung von Proton und Elektron ergibt sich der maßgebende Grundwert für m_T als Summe aus der Masse m_P des Protons und der Masse m_e :

$$m_T = m_P + m_e.$$

Damit ist das maßgebende Verhältnis der Gravitationskraft F_g zur COULOMB-Wechselwirkungskraft F_C innerhalb einer Paarung von Proton und Elektron:

$$p_g = \frac{F_g}{F_C} = \frac{4\pi \cdot (m_P + m_e)^2 \cdot G}{Q_e^2 \cdot c^2} = 8,1 \cdot 10^{-37}. \quad (8.21)$$

Während die COULOMB-Wechselwirkungskraft tendenziell lokal begrenzt wirkt und sich in der Interaktion mit dem lokalen Partner weitgehend erschöpft, ist die Gravitation typisch kumulativ, ausgreifend verfügbar und ohne jede Tendenz zur Erschöpfung. Wegen dieses prinzipiellen Unterschiedes lässt sich ein sinnvoller zahlenmäßiger Vergleich in Form des Quotienten $\frac{F_g}{F_C}$ auch nur für den einfachsten Grundfall einer Paarung von Proton und Elektron angeben. Die Abhängigkeit des Quotienten $\frac{F_g}{F_C}$ vom Quadrat der Masse $m_T = m_P + m_e$ hat folgenden Hintergrund: Einer der beiden Faktoren m_T ist zusammen mit der zugehörigen Ladungsfeinmasse $m_{q(T)}$ zu interpretieren, die in $Q_e^2 = m_{q(T)} \cdot \lambda_{C(T)}$ steckt, und er mündet in das für Proton wie Elektron identische Verhältnis $\frac{m_T}{m_{q(T)}}$ ein, das für den Faktor $\alpha_g^2 = \frac{m_T}{m_{q(T)}} \cdot \frac{2v_g^2}{c^2}$ maßgebend ist. Nur der zweite Faktor m_T resultiert aus der verketteten neutralisierten Feinmasse für die Paarung von Proton und Elektron. Diese verkettete neutralisierte Feinmasse ist also das „Eigenprodukt“ der Paarung von Proton und Elektron. Bei der interpretativen Inanspruchnahme von $m_{q(T)} = \frac{Q_e^2}{\lambda_{C(T)}}$ für das feste Verhältnis $\frac{m_T}{m_{q(T)}}$ darf natürlich nicht übersehen werden, dass damit der Faktor $\lambda_{C(T)}$ im Nenner von $\frac{F_g}{F_C}$ abgespalten wird und für Proton und Elektron **nicht** übereinstimmt, sondern die deutlich unterschiedliche Gewichtsverteilung in dieser Paarung von Proton und Elektron zum Ausdruck bringt.

Das Neutron ist der spezielle Materie-Baustein, bei dem die der COULOMB-Wechselwirkungskraft entsprechenden elektromagnetische Wirkungen auf den Kern des Bausteins beschränkt sind, also nach außen nicht in Erscheinung treten. Diese Begrenzung auf den Innenbereich geht aber im Außenbereich mit einer Verteilung neutralisierter Ladungs-Feinmasse einher, die voll den Verhältnissen im Außenbereich einer Paarung aus Proton und Elektron entspricht und identische Wirkungen der Gravitation zur Folge hat. Diese identische Wirkung der Gravitation ist aber indirekt der Beweis, dass im Inneren des Neutrons die Gesetzmäßigkeiten des Elektromagnetismus nicht „abgeschaltet“ sind, sondern im Mikrokosmos auf Konstellationen basieren, für die es im Makrokosmos keine Entsprechungen gibt. Bei dieser zunächst etwas unscharf erscheinenden Begriffsbildung „Konstellationen“ wird man natürlich sofort an das Standardmodell der Elementarphysik erinnert. Dass diesen Materie-Teilchen der Elementarphysik in der Regel eine elektrische Ladung zukommt, die mit der Elementarladung Q_e übereinstimmt oder $1/3$ beziehungsweise $2/3$ dieser Elementarladung ausmachen, kann sicher nicht als Zufall angesprochen werden, sondern unterstreicht die Stichhaltigkeit der aufgezeigten Schlussfolgerung über die Natur des Neutrons.

Mit der Definition der Ladungsleitung erhalten wir aber nicht nur einen Einblick in das Kräftespiel zwischen Ladungsträgern und die Wirkung der Gravitation. Natürlich kommt der Ladungsleitung auch entscheidende Bedeutung zu, wenn das Absorbieren von Energiequanten durch Materiebausteine beziehungsweise deren Emission näher betrachtet werden soll.

8.2 Zusammenhang von mechanischer Kraft, Elektroimpuls und Gravitation

Die Gesetzmäßigkeiten der Mechanik und des Elektromagnetismus basieren auf ein und demselben physikalischen Phänomen. Deswegen ist es nicht nur - wie bisher geschehen - möglich, elektrotechnische Beziehungen unter ausschließlicher Verwendung von Größen darzustellen, die - wie in der Mechanik - neben Zeit und Weg nur auf der Masse basieren. Vielmehr können in Gleichberechtigung umgekehrt mechanische Gesetzmäßigkeiten als elektrische Phänomene interpretiert und dargestellt werden. So entspricht insbesondere die Kraft F dem Quadrat des Stromes I :

$$F = I^2 = \frac{m \cdot v^2}{r}, \quad (8.22)$$

wenn eine Masse m auf kreisförmiger Bahn mit Radius r und Geschwindigkeit v sich bewegt. Nach Beziehung (6.108) für die gegenseitige Kraft zwischen stromdurchflossenen Leitern erscheint dies inzwischen nicht mehr ungewöhnlich, wenn wir das Merkmal des einen Materiebaustein kennzeichnenden geschlossenen Systems mit $l = 2\pi r$ berücksichtigen und nach (6.120) $\mu_0 \rightarrow \mu_c = 1$ setzen.

Nach (8.22) ist die Zentrifugalkraft identisch mit dem Quadrat des korrespondierenden Stromes. Wenn ein Gegenstand der Masse m an einem Seil um eine Achse zirkuliert, erkennen wir weder leitfähiges Material noch einen geschlossenen Stromkreis. Trotzdem ist hier wie bei jedem anderen physikalischen Effekt auch, immer strömende Feinmasse im Spiel. Für den Strom I_a , dem die Kraft F_a entspricht, die die Beschleunigung a der Masse m bewirkt, gilt deshalb in Erweiterung von NEWTONS Gesetzmäßigkeit:

$$I_a = \sqrt{F_a} = \sqrt{m \cdot a}. \quad (8.23)$$

Durch Erweiterung ergibt sich mit der Geschwindigkeit v die Form:

$$I_a = \sqrt{m \cdot a} = \sqrt{m \cdot \frac{m \cdot a}{m \cdot v^2}} \cdot v. \quad (8.24)$$

Mit der Kraft $F_a = m \cdot a$ und der Energie $E = m \cdot v^2$ in Analogie zu (6.9), gilt für den zugehörigen Weg l

$$\begin{aligned} F_a \cdot l &= E, \\ l &= \frac{E}{F_a} = \frac{m \cdot v^2}{m \cdot a}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Somit erhalten wir, eingesetzt in (8.24):

$$I_a = \sqrt{\frac{m}{l}} \cdot v.$$

Das ist die mit (6.17) übereinstimmende Form des Elektroimpulses.

Für die bereits angesprochene Zentrifugalkraft formulieren wir analog: Die auf der kreisförmigen Bahn mit Radius r und Geschwindigkeit v rotierende Masse m hat eine Zentrifugalkraft F_Z und einen korrespondierenden Strom:

$$I_Z = \sqrt{F_Z} = \sqrt{\frac{m}{r}} \cdot v. \quad (8.26)$$

Mit dieser Einstimmung auf das Thema sind wir gerüstet, den Vergleich folgender Kräfte darzustellen:

- Die Kraft im Lichtstrahl,
- Die COULOMB-Wechselwirkungskraft zwischen Proton und Elektron bei dessen Umlauf innerhalb des Atoms,
- Die Gravitationskraft zwischen 2 Massen m_1 und m_n , gerechnet für den Fall hinreichend kleiner Proportion $\frac{m_n}{m_1} \rightarrow 0$ und kreisförmiger Umlaufbahn von m_n um m_1 .

In einem Lichtstrahl gilt nach (6.132) und (6.130)

$$\begin{aligned} m \cdot \lambda &= \frac{h}{c}; \\ F &= I^2 = \frac{m}{\lambda} \cdot c^2. \end{aligned}$$

Dabei ist I der wirksame Strom und F die wirksame Kraft in Ausbreitungsrichtung. Für den Spezialfall des Elektrons mit der Masse m_e und der COMPTON-Wellenlänge $\lambda_C = 2\pi r_C$ errechnet sich

$$c^2 = \frac{h \cdot c}{m_e \cdot 2\pi r_C} \quad (8.27)$$

und

$$r_C = \frac{h}{2\pi c \cdot m_e}. \quad (8.28)$$

Für die Elektronenumlaufbahn gilt nach (7.105)

$$\frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Somit ist:

$$v^2 r = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi m_e}.$$

Mit (8.28) errechnet sich:

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{c^2} &= \frac{Q_e^2}{4\pi m_e} \cdot \frac{2\pi c \cdot m_e}{h} \cdot \frac{r_C}{r}, \\ \frac{v^2}{c^2} &= \frac{Q_e^2 \cdot c}{2h} \cdot \frac{r_C}{r}.\end{aligned}\quad (8.29)$$

Mit (7.43) ergibt sich daraus die gleichwertige Form

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_q}{m_e} \cdot \frac{r_C}{r}.\quad (8.30)$$

Bewegt sich die Masse m_e auf kreisförmiger Umlaufbahn mit Radius r mit der Geschwindigkeit v um Masse m_1 , gilt für $\frac{m_n}{m_1} \rightarrow 0$ die Beziehung zwischen Gravitationskraft und Zentrifugalkraft

$$\frac{m_1 \cdot m_n \cdot G}{r^2} = \frac{m_n \cdot v_n^2}{r}.$$

Somit ist $v_n = v$ unabhängig von m_n . Es gilt:

$$v^2 = \frac{m_1 \cdot G}{r},$$

und mit (8.28)

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{2\pi \cdot G \cdot m_1 \cdot m_e}{hc} \cdot \frac{r_C}{r}.\quad (8.31)$$

Die Elementarladung ist nach (7.40) eine proportionale Größe zum zugehörigen Elektroimpuls. Die Gravitationskraft ist eine proportionale Größe zum Quadrat des Elektroimpulses und damit zum Quadrat der Elementarladung. Deshalb kann Gravitationskraft und COULOMB-Wechselwirkungskraft dadurch in Beziehung gebracht werden, dass der Gravitationswirkung eine Teilmenge ΔQ_g der Elementarladung Q_e zugeordnet wird. Für dieses physikalische Ersatzbild gilt das feste Verhältnis:

$$f_q = \frac{\Delta Q_g}{Q_e}.\quad (8.32)$$

Die Teilmenge ΔQ_g der Gravitation korrespondiert mit dem maßgebenden Strom nach (8.12), dessen Kraftwirkung sich des gleichen Übertragungsweges wie die COULOMB-Wechselwirkungskraft bedient. Nach (7.38) und (7.43) gilt für die Elementarladung:

$$Q_e = \sqrt{\frac{m_q \cdot h}{m_e \cdot c}} = \sqrt{m_q \cdot \lambda_C}.$$

n Elektronen entsprechen dabei \sqrt{n} Elementarladungen! Der Paarung von 2 gleich großen Ladungen entspricht die Form:

$$Q_e^2 = \frac{m_q \cdot h}{m_e \cdot c} = m_q \cdot \lambda_C. \quad (\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n = 1)$$

Die Zahl n entspricht für den Fall der Gegenpoligkeit n Paarungen aus positiver und negativer Ladung.

Wir gehen von dem Modellfall einer Masse m_1 aus, die entsprechend dem Wasserstoff nur aus Paarungen je eines Protons und eines Elektrons besteht. Die Zahl solcher Paarungen aus je einer positiven mit einer negativen Ladung beträgt

$$Z = \frac{m_1}{m_P + m_e}\quad (8.33)$$

mit m_P als Masse des Protons. Dabei bleiben die Abweichungen, die sich aus der Besonderheit der Neutronen im Vergleich zu einem Paar aus Proton und Elektron ergeben, unberücksichtigt.

Die Wirkung der Teilmenge ΔQ_g der Elementarladung Q_e soll bildhaft verantwortlich für die Gravitation sein.

In Anlehnung an (8.29) kann deshalb für die Gravitation mit (8.33) gesetzt werden:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{m_1}{m_P+m_e} \cdot (f_q \cdot Q_e)^2 \cdot c}{2h} \cdot \frac{r_C}{r}. \quad (8.34)$$

In Verbindung mit (8.31) ergibt sich daraus:

$$f_q = \frac{2\sqrt{\pi G}}{cQ_e} \cdot m_e \cdot \sqrt{\frac{m_P}{m_e} + 1} \approx 2 \cdot 10^{-20}. \quad (8.35)$$

Mit (8.21) erkennen wir außerdem die Relation:

$$p_g = f_q^2 \cdot \left(\frac{m_P}{m_e} + 1 \right). \quad (8.36)$$

Innerhalb eines Lichtstrahls ist die innewohnende Energie durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit c^2 bestimmt. Die durch den Quotienten $\frac{v^2}{c^2}$ gekennzeichnete Untermenge an Energie, die in einer Umlaufbahn eines Masseteilchens beziehungsweise eines Körpers „nach außen“ in Erscheinung tritt, ist in Beziehung (8.30) für die Umlaufbahn des Elektrons unter dem Einfluss der COULOMB-Wechselwirkungskraft sowie in (8.31) für die Umlaufbahn eines Körpers unter dem Einfluss der Gravitation dargestellt. Dabei ist neben einem Faktor, der die Wechselwirkung der Massen im engeren Sinne kennzeichnet, der Quotient $\frac{r_C}{r}$ maßgebend, der die Natur eines Verhältnisses von innerem zu äußerem Hebelarm besitzt.

9 Raum und Zeit

9.1 Strukturloser Raum und Gesamtimpuls

Leerer Raum ist ohne jede Struktur.

Längenmessung ist das Messen von Abständen zwischen körperlich fixierten Punkten. Wir sind dabei darauf angewiesen, Messergebnisse als Vielfaches oder Teile der Länge von definierten Bezugsgegenständen anzugeben (Typisches Beispiel: Das Urmeter).

Die Zeit ist eine mit Hilfe einer Bezugsgeschwindigkeit von der Länge abgeleitete Größe. Letzte Referenz jeder denkbaren (sinnvollen) Bezugsgeschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum als Naturkonstante, die deshalb zweckmäßig selbst als Bezugsgeschwindigkeit gewählt wird.

Licht ist schwingende Feinmasse-Strömung. Licht im Raum ist Feinmasse im Raum, deren Struktur durch Wellenlänge und Frequenz bestimmt ist. Aufgrund der Fortpflanzung des Lichts mit einer Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Standort eines Beobachters, vermag dieser Wellenlänge und Frequenz des Lichts zu messen. Das Messergebnis ist also von der Relativgeschwindigkeit zur strömenden Feinmasse abhängig und muss stets Bezug auf den Standort dessen nehmen, der beobachtet und misst. Zwei Beobachter A und B , die sich relativ zueinander bewegen, messen für ein und denselben Lichtstrahl unterschiedliche Wertepaare von Wellenlänge und Frequenz.

Die Gesamtheit aller Masse im Universum, die Materiebausteine und „frei“ strömende Feinmasse einschließt, hat einen resultierenden mechanischen Impuls. Gegenüber dem strukturlosen Kosmos ist keine Relativgeschwindigkeit möglich; deshalb gilt, dass die Gesamtmasse M im Universum ruht und den resultierenden mechanischen Impuls

$$M \cdot v = 0 \quad (9.1)$$

aufweist. Damit ergibt sich aber indirekt im an sich strukturlosen Raum ein ruhender Bezugspunkt beziehungsweise ein ruhendes Bezugssystem. Unabhängig von der Dynamik der in eine beliebige Zahl von Teilmengen mit gegenseitigen Relativgeschwindigkeiten aufgelösten Gesamtmasse sind der ruhende Bezugspunkt beziehungsweise das ruhende Bezugssystem sowie der zugehörige Gesamtimpuls

$$M \cdot v = 0$$

invariabel. Das ruhende Bezugssystem entspricht einem Inertialsystem, in das wir uns ein Koordinatensystem der 3 Dimensionen des Raumes eingepägt vorstellen können. Der Schwerpunkt der Gesamtmasse M des Universums soll in den Ursprung des Koordinatensystems fallen und stellt im engeren Sinne den ruhenden Bezugspunkt dar. Wenn in der Folge vom einer konstanten Relativgeschwindigkeit die Rede ist, so ist dies jedoch die Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen, nicht aber die, in der Regel variable Geschwindigkeit zwischen Körperpunkten oder anderen konkreten Punkten innerhalb eines Inertialsystems. Das gilt auch für den ruhenden Bezugspunkt. Eine Relativgeschwindigkeit hat eine definierte Richtung mit Bezug auf das zu einem Inertialsystem gehörige Koordinatensystem. Es ist uns freigestellt, aus Zweckmäßigkeitsgründen die x -Achse des Koordinatensystems auf die Richtung der Relativgeschwindigkeit auszurichten.

Alle Bezüge zwischen bewegten Körpern sind energetischer Natur, entsprechen dem Quadrat der Geschwindigkeit und müssen in Verwandtschaft und Analogie zum Gravitationspotential gesehen werden.

Naturgemäß steht die vorstehende Aussage in diametralem Gegensatz zu EINSTEINS Theorie und Weltbild. Es führt aber kein Weg daran vorbei, gleich zu Anfang „Farbe zu bekennen“, damit die Konsequenzen dieser Aussage in der Folge stets in Bedacht genommen werden.

9.2 Massenzuwachs, Längenkontraktion und Konstanz des Drehimpulses

Ein Materie-Baustein ist Feinmasse, die auf einer in sich geschlossenen Bahn strömt. Gedanklich stellen wir an beliebiger Stelle dieser Bahn einen Querschnitt, der von der Feinmasse durchströmt wird.

Wird im Fall *A* der Querschnitt, der keine Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem aufweist, von der Feinmasse mit Lichtgeschwindigkeit c durchströmt, so ist die mit der Masse m korrespondierende Energie nach Beziehung (6.9)

$$E = m \cdot c^2.$$

Bewegt sich im Fall *B* dieser Querschnitt mit der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, so erscheint in erster Annäherung an die Problemlösung eine Reduzierung der Strömungsgeschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit c auf die (fiktive) Geschwindigkeit c' die Konsequenz. Denn nur so kann die Energiebilanz für die Masse m stimmen, die ja auch beim Aufspalten in die Teilgrößen mc'^2 und mv^2 stets in Summe der unveränderlichen Energie

$$E = mc^2 = konst. = mc'^2 + mv^2$$

entsprechen muss.

Die mit c und c' korrespondierenden Energien E und E' sowie deren Differenz sind nach (6.9) beziehungsweise analog (6.9) direkt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Deshalb muss für die mit c' korrespondierende Relativgeschwindigkeit v des betrachteten Querschnitts gelten:

$$c^2 - c'^2 = v^2.$$

Daraus ergibt sich

$$c' = \sqrt{c^2 - v^2}. \quad (9.2)$$

Damit würde sich aber unsere Grundbeziehung (6.132) beziehungsweise (6.142)

$$m \cdot \lambda = \frac{h}{c}$$

wie folgt verändern:

$$m' \cdot \lambda = \frac{h}{c'}.$$

Wird also unter den Bedingungen des bewegten Materiebausteins die rechte Gleichungsseite zur von der Relativgeschwindigkeit v abhängigen Variablen? - Nein! Tatsächlich bleiben alle uns bekannten Eigenschaften der Grundbeziehung erhalten: Variabel ist das Wertepaar von Masse m und Wellenlänge λ , konstant bleibt dagegen auch im relativ gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bewegten Materiebaustein die Lichtgeschwindigkeit c , mit der die Feinmasse um das Zentrum des Materiebausteins zirkuliert. D. h., die aus der Energiebilanz abgeleitete fiktive Geschwindigkeit c' bildet sich in einer von λ auf

$$\lambda' = \lambda \cdot \frac{c'}{c} \quad (9.3)$$

reduzierten Wellenlänge ab und wir bewahren die Grundbeziehung (6.142) in der Form

$$m \cdot \lambda = m' \cdot \lambda' = \frac{h}{c} \quad (9.4)$$

mit

$$f(v) = \frac{m}{m'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{c'}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.5)$$

$f(v)$ ist der Kontraktionsfaktor der Länge; er ist in (9.5) für die Wellenlänge λ dargestellt. Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich jedoch unmittelbar auf die Länge l eines Körpers übertragen, die in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit des Körpers gegenüber dem ruhenden Bezugssystem auf das Maß l' schrumpft, wobei gilt:

$$l' = l \cdot f(v) = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.6)$$

Das Produkt $m \cdot \lambda$ beziehungsweise $m' \cdot \lambda'$ ist unter der Annahme einer kreisförmigen Bahn eine konstante Größe, bezogen auf den Mittelpunkt des Materiebausteins.

Deshalb soll mit $\lambda = 2\pi r$ und $\lambda' = 2\pi r'$ die Größe

$$m \cdot r = m' \cdot r' = \frac{h}{2\pi c} \quad (9.7)$$

als das unter allen Bedingungen konstante Moment der Masse im Materie-Baustein bezeichnet werden.

Daraus errechnen sich die Bahnradien

$$r = \frac{h}{2\pi c \cdot m} \quad (9.8)$$

und

$$r' = \frac{h \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{2\pi c \cdot m}. \quad (9.9)$$

Die direkte Verwandtschaft von (9.8) zu Beziehung (7.103) und von (9.9) zu Beziehung (7.142) ist evident, wenn jeweils m für $\frac{m_0}{2}$ und $n = 1$ gesetzt wird.

Unter Übergang zu den Trägheitsmomenten

$$J = m \cdot r^2$$

und

$$J' = m' \cdot r'^2$$

sowie den Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega = \frac{c}{r}$$

und

$$\omega' = \frac{c}{r'}$$

erkennen wir weiterhin in diesem konstanten Moment der Masse die gleichwertige Gesetzmäßigkeit von der Konstanz des Drehimpulses **im** Materiebaustein, der nachfolgend als **innerer** Drehimpuls L_i bezeichnet wird. Dazu schreiben wir:

$$\begin{aligned} m \cdot r \cdot c &= m' \cdot r' \cdot c = \frac{h}{2\pi}, \\ m \cdot r^2 \cdot \frac{c}{r} &= m' \cdot r'^2 \cdot \frac{c}{r'}, \\ L_i = J \cdot \omega &= J' \cdot \omega' = \frac{h}{2\pi}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Bevor wir in die Interpretation eintreten, sei folgende Erklärung zur Ermittlung des Trägheitsmomentes angeführt: Wir sind gewohnt, Trägheitsmomente von Körpern durch Integration zu ermitteln und dabei jeden differentiellen Teil der Masse mit seinem individuellen Radius zu berücksichtigen. Diese Methodik darf aber nicht einfach auf Feinmasse übertragen

werden. Vielmehr wird hier analog zu den Überlegungen, die zur Ableitung der COULOMB-Wechselwirkungskraft geführt haben, die gesamte Masse des Materiebausteins auf einen Radius bezogen, der sich aus der COMPTON-Wellenlänge ergibt.

Für Trägheitsmoment, inneren Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit im Materiebaustein gibt es außerdem weitere grundsätzliche Unterschiede zu den entsprechenden Größen der Makrophysik und deren Gesetzmäßigkeiten. So lässt sich insbesondere der Energieinhalt im Materiebaustein nicht nach den Gesetzmäßigkeiten der Makrophysik aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit berechnen. Im Materiebaustein ist nämlich insbesondere der Elektroimpulssatz zu beachten, nach dem die Betrachtung nicht allein auf eine Oberflächenkomponente der Bewegung eingeschränkt werden kann, sondern immer auch die dazu senkrechte Richtung berücksichtigt werden muss. Dies gilt auch für energetische Überlegungen.

Deshalb ist der Energieinhalt des Materiebausteins

$$mc^2 = J \cdot \omega^2$$

auch doppelt so groß, wie er sich nach der Gesetzmäßigkeit der Makrophysik ergeben würde. Dies ist natürlich kein Zufall, sondern die Konsequenz aus den Gesetzmäßigkeiten der strömenden Feinmasse einerseits und der bewegten Materiebausteine andererseits, die gleichermaßen durch enge Verwandtschaft, aber auch einen typischen Unterschied gekennzeichnet sind. Einzelheiten sind in Unterabschnitt 9.8.3 dargelegt. Ein typisches Beispiel ist dabei die Gesetzmäßigkeit für den Elektronenspin nach Unterabschnitt 9.8.4.

In diesem Zusammenhang wird außerdem darauf hingewiesen, dass der innere Drehimpuls nach (9.10) mit dem Bahndrehimpuls des Elektrons nach (7.109) für die kleinste Umlaufbahn des Elektrons ($n = 1$) um den Atomkern übereinstimmt.

Wie können wir nun das Ergebnis nach (9.10) interpretieren?

Vergleichen wir einen Materiebaustein ohne Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, so zirkuliert seine Feinmasse m mit Lichtgeschwindigkeit c und er repräsentiert die Energie

$$E = m \cdot c^2$$

Mit der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bleibt für das „Originalquantum“ an Feinmasse m alles beim alten. Lediglich der Bahnradius seiner kreisförmig gedachten Bahn ist entsprechend reduziert. Damit aber bei diesem reduzierten Bahnradius die Grundbeziehung (6.142) erfüllt wird - beziehungsweise in gleichwertiger Interpretation: die Konstanz des inneren Drehimpulses gewahrt bleibt -, muss zusätzliche Feinmasse aufgenommen werden, womit dann auf indirektem Wege kinetische Energie gewonnen wird.

Der eingangs gewählte Weg über die Berechnung einer fiktiven Geschwindigkeit c' basierte gedanklich noch auf einer unveränderten Menge m an Feinmasse. Diese fiktive Geschwindigkeit war also nur ein gedanklicher Zwischenschritt, um zu dem zwingenden Ergebnis des Massenzuwachses entsprechend:

$$\frac{m'}{m} = \frac{1}{f(v)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (9.11)$$

zu führen, also ein Ergebnis in formaler Übereinstimmung mit EINSTEINS spezieller Relativitätstheorie. Dabei ist Zuwachs wohlgerneht nicht etwa als autonome Vermehrung, sondern als Aufnahme vorhandener Masse aus dem Umfeld zu verstehen.

Alle Wirkungen der Natur sind letztlich auf diesen Transfer von Feinmasse und der dazu proportionalen Energie zurückzuführen. In der Feinstruktur der Masse bildet sich die gesamte Dynamik in der Variation der zusammengehörigen Wertepaare von Masse m und Wellenlänge λ ab. Dabei akzeptieren wir für alle Wirkungen in dem von uns erfahrbaren Bereich die

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und des *Plankschen* Wirkungsquantums gemäß der immer wieder zitierten Grundbeziehung

$$m \cdot \lambda = \frac{h}{c}.$$

Nach diesen Überlegungen grundsätzlicher Natur soll noch der Massen- und Energiezuwachs aufgrund der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem berechnet werden. Die mit dem Massenzuwachs korrespondierende Energie entspricht der kinetischen Energie

$$\begin{aligned} E_k &= m' \cdot c^2 - m \cdot c^2, \\ E_k &= m \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{f(v)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Für kleine Werte v gilt als gute Näherung:

$$E_k(v \ll c) = \frac{m}{2} \cdot v^2. \quad (9.13)$$

9.3 Licht und Gravitation - Erhaltung von Masse und Energie

Gegenüber dem strukturlosen Raum lässt sich weder für einen Lichtstrahl noch für einen Materiebaustein eine Geschwindigkeit definieren. Eine Geschwindigkeit lässt sich nur gegenüber einem Materiebaustein beziehungsweise einem Kollektiv von Materiebausteinen definieren, das in einem Inertialsystem ruht. Dabei ist Quelle und Bezugspunkt des Lichts dieses Kollektiv von Materiebausteinen. Es gibt also im strengen Wortsinne keine echte Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Denn nur der von Masse und der damit verbundenen Gravitation durchdrungene Raum setzt die Maßstäbe für die Ausbreitung des Lichts.

Die Gravitation im Umfeld eines Kollektivs von Materiebausteinen resultiert - wie früher dargestellt - aus neutralisierter Ladungs-Feinmasse in feinsten Auflösung. Dieses aus Feinmasse gebildete Fluidum wirkt zwar nicht als Medium für die Schwingungen des Lichtes. Dennoch wird über dieses Fluidum unverzichtbar der Bezug zur Quelle des Lichts und die Orientierung für die sich einstellende Lichtgeschwindigkeit geschaffen. Das Fluidum aus Feinmasse darf keinesfalls mit dem in der Vergangenheit viel diskutierten Äther verwechselt werden. Es gibt keinen Äther und das Licht bedarf keines Äthers. Das schwingende „Material“ ist vielmehr Bestandteil des Lichtstrahls, der sich deshalb autonom im Raum fortpflanzt.

Die Masse m eines Materiebausteins ohne Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, also mit $v = 0$, erfährt bei der Beschleunigung auf die Geschwindigkeit $v \neq 0$ nach (9.11) einen Massenzuwachs

$$\Delta m = m' - m = m \cdot \left[\frac{1}{f(v)} - 1 \right]. \quad (9.14)$$

Der Massenzuwachs nach (9.14) fällt bei Annäherung von v an c immer stärker ins Gewicht und setzt eine praktische und theoretische Grenze für die erreichbare Relativgeschwindigkeit v entsprechend der Bedingung: $v < c$.

In den gleichwertigen Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m' - m, \\ \Delta m \cdot c &= m' \cdot c - m \cdot c, \\ \Delta m \cdot c^2 &= m' \cdot c^2 - m \cdot c^2. \end{aligned}$$

kommen die Gesetze von der Erhaltung von Masse und Energie sowie der Konstanz des mechanischen Impulses zum Ausdruck. Die vorstehenden Gesetze gelten für Zunahme und Abnahme der Relativgeschwindigkeit v in gleicher Weise.

Massenzuwachs aufgrund einer Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bedeutet für die strömende Feinmasse stets die Überlagerung von Lichtgeschwindigkeit c und Relativgeschwindigkeit v . Dabei gilt die herausragende Besonderheit bei einer Addition der Lichtgeschwindigkeit c mit einer anderen Geschwindigkeit v beliebiger Größe und Richtung, dass das Resultat stets identisch ist mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c . Die Relativgeschwindigkeit v ist damit nicht etwa physikalisch irrelevant; vielmehr sind Weg und Zeit um das gleiche, von v abhängige Maß geschrumpft, aber der Quotient in Form der Lichtgeschwindigkeit c bleibt konstant.

Diese Überlagerung der unveränderlichen Lichtgeschwindigkeit c , mit der die Feinmasse um den Mittelpunkt des Materiebausteins zirkuliert, und dessen Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem korrespondiert mit einer entsprechenden Verdichtung der Feinmasse:

$$\begin{aligned}\frac{m'}{\lambda'} &= \frac{m}{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{f(v)} \right]^2 = \frac{m}{\lambda} \cdot \frac{c^2}{c^2 - v^2}, \\ \frac{m'}{\lambda'} &= \frac{m}{\lambda} \cdot \frac{c^2}{c'^2}.\end{aligned}\tag{9.15}$$

Die Relativgeschwindigkeit eines Materiebausteins gegenüber dem ruhenden Bezugssystem gilt für alle Teilmengen seiner Masse. D. h., auch die Ladungs-Feinmasse, gleichgültig ob elektrisch wirksam oder im neutralisierten Bereich, hat zusätzlich zur Lichtgeschwindigkeit die überlagerte Komponente v . Die effektive gravitative Wirkung an einem Punkt im Raum ergibt sich aus der Summe der Wirkungen aller Materiebausteine im Umfeld. Aufgrund der Relativgeschwindigkeit der an den gravitativen Wirkungen beteiligten Materiebausteine gegenüber dem ruhenden Bezugssystem ergibt sich für jeden Punkt eine Überlagerung der Wirkung der Gravitation einerseits und der Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem andererseits, die sich zur effektiven Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem vereinigen. Als Beispiel kann die Erde mit ihrem Gravitationsfeld gelten, wenn zur Vereinfachung Gravitationswirkungen von außerhalb (wichtigster Fall: von der Sonne) zunächst ausgeklammert werden.

Emittiert ein Materiebaustein Licht, so ist die individuelle Geschwindigkeit des Licht emittierenden Materiebausteins nur in dem Umfange relevant, als sie sich in einer (in der Regel verschwindend kleinen) Winkelabweichung (Einzelheiten hierzu in Unterabschnitt 9.10.6) niederschlägt. Ansonsten ist das vom Licht durchheilte Gravitationsfeld maßgebendes Bezugssystem. Gegenüber dem ruhenden Bezugssystem existiert dagegen - wie gesagt - die Überlagerung von Lichtgeschwindigkeit c und Relativgeschwindigkeit v .

Daraus folgert, dass Ladungs- und Lichtwellen, deren Ursprung in ein und demselben Gravitationsfeld liegt, sich im Vakuum synchron ausbreiten. Sobald Ladungs- und Lichtwellen in den Bereich von Ladungs-Feinmasse eindringen, die aus einer anderen Quelle mit anderer Relativgeschwindigkeit gespeist wird, kann sich für den Durchdringungsbereich der Feinmasse nur ein einheitlicher Bezugspunkt für die Lichtgeschwindigkeit durchsetzen. Es treten deshalb wechselseitige Kräfte und daraus resultierende Änderungen in der Energieverdichtung und der korrespondierenden Relativgeschwindigkeit auf. Für jeden Punkt im Raum sind deshalb folgende Werte maßgebend:

- die effektive Gravitation
- die Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem

- die effektive Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem mit der korrespondierenden Energieverdichtung.

Die Ausbreitung des Lichts wird also vom Gravitationsfeld beeinflusst.

9.4 Kontraktion der Länge und Zeitdilatation

Mit den vorstehend erarbeiteten Erkenntnissen wollen wir uns erneut dem Problem der Längenmessung und, davon abgeleitet, der Zeit- und Geschwindigkeitsmessung sowie der Anwendung auf den Impulssatz zuwenden. Eine konstante Gravitation wird vorausgesetzt! Zunächst ist auf den bisher nicht näher betrachteten Effekt hinzuweisen, dass die Kontraktion der Längen aufgrund der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem nicht auf eine Dimension, nämlich in Richtung des Vektors von v beschränkt ist. Vielmehr sind alle 3 Dimensionen des Raumes gleichermaßen betroffen!

Für die weiteren Überlegungen greifen wir auf die vorher betrachteten, von Feinmasse durchströmten Querschnitte in den alternativen Fällen A und B zurück. Diese Querschnitte haben die Qualität von Inertialsystemen, die in analoger Weise mit A und B bezeichnet werden sollen und denen die Relativgeschwindigkeiten v_A beziehungsweise v_B gegenüber dem ruhenden Bezugssystem eigen sein sollen. Die nachfolgend für Inertialsystem A dargestellte Beziehung gilt analog für B und jedes andere alternative Inertialsystem.

Ein Stab, der bezogen auf das ruhenden Bezugssystem keine Relativgeschwindigkeit aufweist, hat die Länge l_0 . Er erfährt in dem Inertialsystem A eine von v_A abhängige Kontraktion nach (9.6):

$$l_A(v_A) = l_0 \cdot f(v_A).$$

Trotzdem wird relativ zur geeichten Messbasis ein „richtiges“ Ergebnis gemessen, weil auch die Messbasis in gleicher Weise verzerrt (kontrahiert) ist. Der (absolute) Messfehler wird nicht erkannt und für eine (gedanklich mögliche) Fehlerkorrektur besteht kein Bedürfnis. Zwischen dem Eichmaß der Länge L und der davon abgeleiteten Größe der Zeit T_L besteht nach Maßgabe der Lichtgeschwindigkeit die Beziehung

$$T_L = \frac{L}{c},$$

also Proportionalität zwischen Entfernung im Raum und zugehöriger Zeit. Diese Beziehung kann aber nur für ein Inertialsystem ohne Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, also für $v = 0$ Anwendung finden. Ist diese Relativgeschwindigkeit $v \neq 0$, kommt es „automatisch“ zur Kontraktion der Länge L entsprechend dem Wert

$$L' = L \cdot f(v).$$

Die Definition der Zeit geht dann aber ebenso „automatisch“ in die allgemeine Form

$$T_L' = \frac{L'}{c}$$

über, weil ja die Relativgeschwindigkeit v und der Kontraktionsfaktor $f(v)$ keine explizite Berücksichtigung finden. T_L' hat also die Natur einer relativen Größe, die auf das Inertialsystem mit der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bezogen ist. Die zu diesem relativen Eichmaß gehörige absolute Größe der Zeit ist

$$T_L = \frac{T_L'}{f(v)}.$$

In der allgemeinen Definition der absoluten Zeit t und der relativen Zeit t' gilt also:

$$t = \frac{t'}{f(v)}.$$

Außerdem gilt:

$$T_L' = T_L \cdot f(v) = \frac{L'}{c} = \frac{L \cdot f(v)}{c},$$

$$T_L = \frac{L}{c}.$$

Aufgrund des Charakters der Zeit als abhängige Größe der Länge und ihrer Definition über die tatsächliche (also die kontrahierte) Länge im Inertialsystem, ergeben sich also analoge Verhältnisse für Länge und Zeit:

$$\frac{l'}{l} = \frac{t'}{t} = f(v). \quad (9.16)$$

Die absolute Zeit t erfährt also gegenüber der relativen Zeit t' eine Dehnung oder Dilatation entsprechend

$$t = \frac{t'}{f(v)}.$$

Sollen also mit relativer Zeit ermittelte Geschwindigkeitswerte

$$v = \frac{s'}{t'}$$

in absolute Geschwindigkeitswerte

$$v' = \frac{s'}{t}$$

umgerechnet werden, gilt:

$$\frac{v'}{v} = \frac{t'}{t} = f(v_r), \quad (9.17)$$

$$v' = v \cdot f(v_r). \quad (9.18)$$

In der Funktion des Kontraktionsfaktors

$$f(v_r) = f(v) = \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

wird der Index r für die **Relativ**geschwindigkeit v_r des Inertialsystems gegenüber dem ruhenden Bezugssystem immer dann gesetzt, wenn dies angezeigt ist zur Unterscheidung von einer Geschwindigkeit v **innerhalb** des Inertialsystems.

Für das Verständnis der nachfolgenden Ableitungen ist eine wichtige Bemerkung voranzustellen:

- Im Rahmen dieser Ausarbeitung führt kein Weg daran vorbei, den seit EINSTEINS Relativitätstheorie verpönten Begriff der absoluten universellen Zeit zu „reaktivieren“.
- Wenn wir in der Folge von absoluten Größen der Länge l , des Weges s und der Zeit t sprechen, dann ist zu bedenken, dass uns diese Größen in unserem Inertialsystem (also z. B. im physikalischen Experiment) in der kontrahierten Form l' , s' und t' gegenüber treten. „Absolut“ ist also im Sinne von „größtem möglichen Wert“ bei Relativgeschwindigkeit 0 gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, zu verstehen.

- Die für Weg und Zeit gewählte Zuordnung des Strichs im Symbol wird aber aus grundsätzlichen Erwägungen **nicht** für die Geschwindigkeit v (analog für die Beschleunigung a) übernommen. Es muss also hingenommen und beachtet werden, dass v' die Bedeutung einer **absoluten** Geschwindigkeit hat, während bei l' , s' und t' **relative Größen** vorliegen. Damit wird vermieden, die bis hierher verwendeten Symbole für Geschwindigkeiten umbezeichnen zu müssen. Außerdem ist die Geschwindigkeit - wie wir noch sehen werden - in einem wichtigen Spezialfall dadurch ausgezeichnet, dass relativer und absoluter Wert identisch sind. Schließlich befinden wir uns mit der gewählten Art der Bezeichnung in Übereinstimmung mit der in der Literatur üblichen Darstellung für die LORENTZ-Transformation (siehe Unterabschnitt 9.10.1).

Das auf den ersten Blick widersprüchliche Ergebnis, dass eine absolute Zeit gedehnt wird, hat seine Ursache darin, dass wir uns „gezwungen“ sehen, in unserem bewegten und damit kontrahiertem Inertialsystem die darin definierte relative Zeit für „absolut“ zu setzen, quasi als Behelf. Die Konsequenz dieses nicht vermeidbaren Behelfs ist aber, dass die Rollen von absoluter und relativer Zeit vertauscht werden. Sieht man dagegen über den „Tellerrand“ unseres Inertialsystems hinaus, so muss man sich in die Situation eines neutralen Beobachters versetzen, der von außen und mit Relativgeschwindigkeit $v = 0$ gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, unsere Zeitdefinition beurteilt. Er erkennt, dass die absolute Zeit keiner irgendwie gearteten Änderung unterliegt, dagegen innerhalb des Inertialsystems aufgrund der geschwindigkeitsabhängigen Kontraktion (Faktor $f(v)$) eine individuelle relative Zeit existiert, und zwar durch Definition der Zeit auf der Basis der kontrahierten Länge.

In dieser neutralen Sicht unterliegen also die absolute (= größte mögliche) Länge l eines Gegenstands und die absolute Zeit t einer für das jeweilige Inertialsystem spezifischen Kontraktion um den Faktor $f(v)$ auf die kontrahierten Werte l' und t' , wie es Gleichung (9.16) mathematisch wiedergibt. EINSTEIN hat für die Definition der Zeitdilatation den „neutralen“ Beobachter gewählt, der von **seinem** Inertialsystem aus die Zeitverhältnisse in einem relativ zu ihm bewegten Inertialsystem beurteilt. Damit ist die Position dieses Beobachters nicht außen, sondern innen im Inertialsystem gewählt. Er erkennt eine Zeitdilatation. Die Qualität seiner Neutralität wird im übrigen später noch zu betrachten sein. Aus der Sicht eines „außen postierten“ neutralen Beobachters erfahren also - wie ausgeführt - Inertialsysteme, die sich mit Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bewegen, eine Kontraktion ihres Eichmaßes für Länge und Zeit entsprechend dem Faktor der Kontraktion

$$f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq 1.$$

Die prozentuale Verzerrung von Länge und Zeit ist aber identisch, so dass Quotienten, also Werte von Geschwindigkeiten unabhängig von der Relativgeschwindigkeit des Inertialsystems richtig gemessen werden. Beschränken sich Messungen von Länge und Zeit auf ein und dasselbe Inertialsystem, ist dessen Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem irrelevant.

Die Zeit erfährt also bezogen auf das jeweilige Inertialsystem und nur indirekt wegen ihrer Definition abhängig von der Länge, nach Beziehung (9.6) eine Verkürzung oder Kontraktion. EINSTEIN hat - wie ausgeführt - statt einer zeitlichen Verkürzung eine Zeitdehnung oder Dilatation postuliert. Dabei handelt es sich bei näherer Betrachtung nicht um einen echten Widerspruch, sondern um eine eigenartige Inkonsequenz in der Betrachtungsweise EINSTEINS, die nachfolgend kurz beleuchtet wird:

Ein „ruhender“ Beobachter erkennt und bezeichnet zutreffend eine Länge in einem relativ zu ihm bewegten Inertialsystem als kontrahiert, wobei dies stets nur relativ zu seinem „ruhenden“ Eichmaß begriffen werden kann.

Derselbe „ruhende“ Beobachter erkennt und bezeichnet seine **eigene** Zeit als gedehnt, wenn er zeitliche Vorgänge in einem relativ zu ihm bewegten Inertialsystem zu messen und zu beurteilen hat. Es wird also quasi das eigene „ruhende“ Eichmaß der Zeit „vergewaltigt“ und damit das Prinzip der Relativität auf die Spitze getrieben. Dass diese Umkehrung des Standpunktes in der praktischen Anwendung gleichwohl keine Bedeutung hat, lässt sich in der wissenschaftlichen Literatur z. B. an der Argumentation zum sogenannten Zwillingparadoxon ablesen. Dort wird zutreffend stets davon gesprochen, dass der reisende (bewegte) Zwilling jünger (Zeitkontraktion!) bleibt und nicht etwa der zurückgebliebene („ruhende“) Zwilling die Erfahrung einer Dilatation oder künstlichen Alterung macht, allein weil sein Zwillingbruder auf Reisen gegangen ist.

In der Folge wird deshalb in diesem Aufsatz in Analogie zur Längenkontraktion in der Regel von der Zeitkontraktion gesprochen werden, hinter der sich aber - wie gesagt - nichts anderes verbirgt als der Effekt, der in der Definition EINSTEINS Zeitdilatation genannt wird. Die von der Relativgeschwindigkeit abhängige Kontraktion der Länge ist also echt, die Kontraktion der Zeit ist dagegen nur ein abhängiger Effekt aufgrund der längenabhängigen Definition.

Im Gegensatz zur echten Kontraktion der Länge kann also - krass formuliert - von einer unechten Zeitkontraktion gesprochen werden. Die Kontraktion der Länge betrifft Querschnitte mit dem Quadrat der Länge und Volumina mit der 3. Potenz. Bei diesen Gegebenheiten kann nicht von vornherein davon ausgegangen werden, dass der Zeitbedarf von physikalischen Prozessen aller Art sich stets in strenger Proportionalität zur Längenkontraktion ändert. In sich geschlossene Feinmasse-Strömung, wie sie der Natur eines Materiebausteins entspricht, erfährt durch eine Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem (im Gegensatz zur EINSTEINSchen Relativitätstheorie) **keine** einseitige geometrische Verformung. Unabhängig von der räumlichen Orientierung der geschlossenen Strömungsbahn zum Geschwindigkeitsvektor von v , gilt für alle Materiebausteine die Grundbeziehung

$$m \cdot \lambda = m' \cdot \lambda' = \frac{h}{c}$$

und eine mit m' korrespondierende Wellenlänge

$$\lambda' = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

abhängig von der Relativgeschwindigkeit. Die Längenkontraktion betrifft also alle 3 Dimensionen des Raumes in gleicher Weise. Damit erfahren die Volumina analog

$$V_{\lambda'} = \lambda'^3 = \lambda^3 \cdot [f(v)]^3$$

eine Komprimierung entsprechend der 3. Potenz von $f(v)$.

Die Masse m wächst dagegen entsprechend $\frac{1}{f(v)}$.

Dieser scheinbare Widerspruch ist aber lediglich eine Konsequenz der bereits bei der Ableitung der Grundbeziehung (6.142) festgestellten Gesetzmäßigkeit in der Natur: „Je kleiner das Gefäß, desto größer der Inhalt an Masse.“

Materie darf eben nicht als homogenes Material aufgefasst werden, das unter dem Einfluss der Relativgeschwindigkeit gleichmäßig komprimiert wird. Vielmehr muss die Feinstruktur der Materiebausteine berücksichtigt werden und die alles dominierende Grundbeziehung:

$$m \cdot \lambda = m' \cdot \lambda' = \frac{h}{c}.$$

9.5 Relative und absolute Geschwindigkeit

Wenn wir, wie vorstehend geschehen, von einer unechten Zeitkontraktion sprechen, impliziert dies, dass die Zeit in Tatsache keiner irgendwie gearteten Kontraktion unterworfen ist. Rechnet man mit dem absoluten Zeitbegriff, ergibt sich die zugehörige absolute Geschwindigkeit (innerhalb des Inertialsystems) zu

$$v' = v \cdot f(v_r) < v,$$

und mit (9.5) für den Spezialfall der Lichtgeschwindigkeit

$$c' = c \cdot f(v_r) = \sqrt{c^2 - v_r^2}. \quad (9.19)$$

(Wir setzen hier Index r zur Unterscheidung von v und Relativgeschwindigkeit v_r zum ruhenden Bezugssystem.)

Das heißt, die fiktive Geschwindigkeit nach Beziehung (9.2) ist identisch mit der am absoluten Zeitmaßstab orientierten Lichtgeschwindigkeit.

In dieser Sicht der Zusammenhänge muss dann allerdings (zunächst) auch akzeptiert werden, dass die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit nicht eine absolute Naturkonstante ist, sondern „nur“ mit Bezug auf ein Inertialsystem konstant ist, und zwar mit der Maßgabe, dass die Zeit als abhängige Größe der Länge definiert wird. (Dass sich die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit schließlich auch orientiert am absoluten Zeitmaßstab als Naturkonstante herausstellen wird, ist später dargelegt.)

Der mit der üblichen Definition und Messung der Zeit verbundene „Fehler“

- tritt also nur in der Orientierung am absoluten Zeitmaßstab in Erscheinung und
- ist innerhalb eines Inertialsystems ohne Relevanz.

Dieser „Fehler“ der Zeit- und damit der Geschwindigkeitsmessung wirkt sich aber auch nicht auf die Bestimmung der Kontraktion der Länge aufgrund der Relativgeschwindigkeit zum ruhenden Bezugssystem aus. Denn in der für die Kontraktion maßgebenden Beziehung nach (9.6)

$$\frac{l'}{l} = f(v_r) = \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}$$

ist die prozentuale Verzerrung aufgrund des „Fehlers“ von v und c identisch und der Quotient $\frac{v}{c}$ deshalb unabhängig vom Fehlereinfluss. Bezeichnen wir die am absoluten Zeitmaßstab orientierten Geschwindigkeiten mit v' und c' , gilt also

$$\frac{v}{c} = \frac{v'}{c'}. \quad (9.20)$$

In dieser Form sind die beiden Definitionen einer Geschwindigkeit in eine Beziehung gebracht.

- Das ist zum einen die uns vertraute Form der Geschwindigkeit von v und c , die implizit in Zähler (Weg) und Nenner (Zeit) den Kontraktionsfaktor $f(v_r)$ unseres Inertialsystems „Erde“ enthält. Die echte Längenkontraktion wird also durch die definitorische „Zeitkontraktion“ im „Gleichgewicht“ gehalten. Diese Geschwindigkeit ist also vom Typ

$$\frac{f(v_r)}{f(v_r)}.$$

Da v und c auf unser Inertialsystem bezogene Geschwindigkeitswerte sind, werden sie in der Folge **relative** Geschwindigkeitswerte genannt.

- Die am absoluten Zeitmaßstab orientierten Geschwindigkeitswerte ergeben sich entsprechend

$$\begin{aligned}v' &= v \cdot f(v_r) < v, \\c' &= c \cdot f(v_r) \leq c.\end{aligned}$$

Sie sind also vom Typ

$$\frac{f(v_r)}{1}$$

und werden in der Folge absolute Geschwindigkeitswerte genannt.

Mit Beziehung (9.19) lässt sich die für den Faktor der Kontraktion maßgebende Beziehung (9.6) in die erweiterte Form überführen:

$$f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c'^2}}} \quad (9.21)$$

mit

$$c'^2 = c^2 - v^2 \quad \text{und} \quad v = v_r.$$

Aus (9.5) ergibt sich

$$m \cdot c = m' \cdot c',$$

und mit (9.20) in analoger Weise

$$m \cdot v = m' \cdot v'.$$

Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit

$$m' \cdot c' = \frac{m}{f(v_r)} \cdot c \cdot f(v_r) = m \cdot c$$

beziehungsweise

$$m' \cdot v' = \frac{m}{f(v_r)} \cdot v \cdot f(v_r) = m \cdot v$$

ist also unabhängig von der Relativgeschwindigkeit v_r (hier Index r zur Unterscheidung von v und v_r). Wir müssen uns dabei bewusst machen, dass auch in dem Ausgangsprodukt $m \cdot v$ bereits in verdeckter Form der Kontraktionsfaktor $f(v_I)$ steckt, der durch die Relativgeschwindigkeit v_I unseres Inertialsystems „Erde“ gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bestimmt ist. Denn notwendigerweise fließt in unsere Definitionen von Länge und Masse die effektive Kontraktion unseres Inertialsystems ein. Die echte Ruhemasse und Ruhelänge könnten lediglich im Wege der Rückrechnung ermittelt werden, wenn uns die Relativgeschwindigkeit v_I bekannt wäre.

Aus vorstehenden Überlegungen erkennen wir aber auch, dass die allgemeingültige Form des Impulserhaltungssatzes

$$\sum m' \cdot v' = \text{konst.}$$

lauten muss. In dieser Form ist zum Ausdruck gebracht, dass der Impulserhaltungssatz auf einem von der Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem unabhängigen, absoluten Zeitmaß basiert und **nicht** mit der von EINSTEIN angegebenen Form übereinstimmt. Vorstehende Überlegungen führen aber noch zu weiteren wesentlichen Konsequenzen für die Abhängigkeit zwischen Inertialsystemen.

Die am absoluten Zeitmaßstab orientierte, aber auf das Inertialsystem mit der Relativgeschwindigkeit v bezogene Lichtgeschwindigkeit beträgt

$$c' = c \cdot f(v) = \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Wird von diesem Inertialsystem mit Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, auf das ruhende Bezugssystem selbst umgerechnet, so ergibt sich folgende, am absoluten Zeitmaßstab orientierte und auf das ruhende Bezugssystem bezogene Lichtgeschwindigkeit

$$c_a = \sqrt{c'^2 + v^2} = c. \quad (9.22)$$

Diese Identität von relativer Geschwindigkeit c des Lichts, bezogen auf ein Inertialsystem und absoluter Geschwindigkeit c_a , bezogen auf das ruhende Bezugssystem, ist die Begründung dafür, dass EINSTEINS berühmte Beziehung nach (6.9)

$$E = mc^2$$

ohne Einschränkung für die in diesem Aufsatz dargelegte Modellvorstellung übernommen werden kann.

Es ergeben sich als Zwischenbilanz folgende grundlegende Konsequenzen:

- Bezogen auf das ruhende Bezugssystem ergibt sich, orientiert am absoluten Zeitmaßstab, eine einheitliche Lichtgeschwindigkeit.
- Jedes Inertialsystem misst die Geschwindigkeiten nach seiner „Art“ (sprich: wegen Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem) „falsch“. Es misst nur relative Geschwindigkeiten! Das hat aber zur Konsequenz, dass jedes Inertialsystem mit seinem Gravitationsfeld sich als Bezugspunkt des Lichtstrahls auffassen kann.
- Da aber auch die Lichtgeschwindigkeit abhängig von der Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem „falsch“ gemessen wird, ist sie nur bedingt eine Naturkonstante und gleiches gilt für das PLANCKSche Wirkungsquantum. Diese grundlegenden Naturkonstanten, die wir in unserem Inertialsystem „Erde“ ermittelt haben, sind notwendigerweise von dessen Relativgeschwindigkeit zum ruhenden Bezugssystem „eingefärbt“, ohne dass dies zu Widersprüchen innerhalb unseres Inertialsystems sowie im Vergleich zu anderen Inertialsystemen führt.
- Zwei Inertialsysteme mit unterschiedlichen Relativgeschwindigkeiten gegenüber dem ruhenden Bezugssystem haben demgemäß intern individuelle, also unterschiedliche Lichtgeschwindigkeiten, kommen aber aufgrund der definitorischen Zeitkontraktion trotzdem zum gleichen Messergebnis. Dieses einheitliche Ergebnis auf der Grundlage definitorischer Zeitkontraktion ist darüber hinaus identisch mit der Lichtgeschwindigkeit, die sich bezogen auf das ruhende Bezugssystem und orientiert am absoluten Zeitmaßstab ergibt!
- Ein Inertialsystem mit Relativgeschwindigkeit $v = 0$ gegenüber dem ruhenden Bezugssystem hat keine Kontraktion und die Identität von relativer und absoluter Lichtgeschwindigkeit ist unmittelbar einsichtig. Der zweite Sonderfall mit einer der Lichtgeschwindigkeit angenäherten Relativgeschwindigkeit $v \rightarrow c$ zeigt in besonders anschaulicher Weise, dass die in dieser extrem kontrahierten „Punktwelt“ gemessene Lichtgeschwindigkeit für deren Bewohner keinerlei von unseren Erfahrungen abweichende Auffälligkeiten zeigt, obwohl die am absoluten Zeitmaßstab orientierte Lichtgeschwindigkeit in dieser Punktwelt nach Null tendiert: $c' \rightarrow 0$.

Im Lichte vorstehender Interpretation wird das EINSTEINSche Postulat von der Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme (begrenzt) nachvollziehbar. Dies aber wohlgernekt nur streng im Sinne der dargelegten Zusammenhänge, also im Gegensatz zu der von EINSTEIN unterstellten „echten“ Zeitdilatation, wobei in diesem Falle seine Begriffsdefinition übernommen wird. Für das Verständnis von Beziehung (9.22) muss aber noch eine vertiefende Erklärung nachgereicht werden:

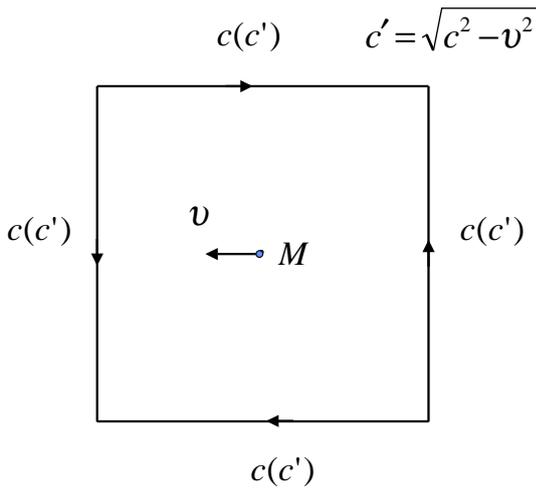


Abbildung 26: Ersatzbild Materiebaustein

In Abbildung 26 ist die geschlossene Umlaufbahn der zirkulierenden Feinmasse im Materiebaustein in schematischer Form wiedergegeben. Dieser Materiebaustein hat den Mittelpunkt M und ruht in einem Inertialsystem, das ebenfalls die Bezeichnung M tragen soll. Orientiert an der Richtung der Relativgeschwindigkeit v des Materiebausteins gegenüber dem ruhenden Bezugssystem sind die Richtungen

- parallel
- antiparallel und
- senkrecht

zu v dargestellt. Wir erkennen, dass für jeden dieser 3 prinzipiellen Fälle die einheitliche Lichtgeschwindigkeit c des maßgebenden Inertialsystems M gilt, der bei Umrechnung auf den absoluten Zeitmaßstab die Geschwindigkeit

$$c' = \sqrt{c^2 - v^2} \tag{9.23}$$

entspricht. Jeder der 3 Fälle hat eine individuelle Relativgeschwindigkeit der strömenden Feinmasse gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, aber gesamtheitlich ist allein die energetische Betrachtungsweise maßgebend.

Die Umrechnung von c' auf das ruhende Bezugssystem führt wieder zu der Analogie mit Beziehung (6.9). D.h., maßgebend für die Umrechnung ist die Energie und deren Analogwert, das Quadrat der Geschwindigkeit. Deshalb gilt in Übereinstimmung mit (9.22):

$$c_a^2 = c'^2 + v^2 \tag{9.24}$$

oder mit (9.23) $c_a = c.$

v wird in (9.24) wie eine am absoluten Zeitmaßstab orientierte Größe behandelt. Dies ist deshalb richtig, weil im vorliegenden Fall eine Länge maßgebend ist, die **keiner** Kontraktion unterliegt, denn es handelt sich **nicht** um eine Länge **im** Inertialsystem M , sondern **zwischen** Inertialsystem M und dem ruhenden Bezugssystem. Wenn aber weder die Länge einer Kontraktion noch die Zeit einer davon abhängigen (definitorischen) Kontraktion unterliegt, ergibt sich als Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem genau der Wert des Quotienten aus Länge und Zeit, wie er auch **innerhalb** des Inertialsystems definiert ist.

Diese Überlegungen implizieren aber auch den entscheidenden Unterschied zu EINSTEINS Theorie, nach der der Raum kontrahiert und gekrümmt sein kann. Nach dem in vorliegender Ausarbeitung dargelegten Denkansatz kann zum strukturlosen Raum weder eine Relativgeschwindigkeit definiert werden, noch können diesem Raum eine irgendwie geartete Struktur

sowie Strukturänderungen wie Kontraktion und Krümmung zugewiesen werden. Die Kontraktion der Längen ist nicht eine Eigenschaft des Raumes sondern der Materie! Außerdem erkennen wir aufgrund vorstehender Überlegungen, dass auch bezüglich resultierender Geschwindigkeiten entscheidende Unterschiede zwischen den Gesetzmäßigkeiten für Massenpunkte und den Gesetzmäßigkeiten für strömende Feinmasse bestehen. Vektorielle Zusammenfassung zur Ermittlung einer resultierenden Geschwindigkeit wie bei Massenpunkten, verbietet sich also für Feinmasse-Strömung.

In Verallgemeinerung kommen wir zu der Erkenntnis, dass die Ermittlung resultierender Geschwindigkeiten streng genommen immer nur auf der Basis energetischer Betrachtung und Berechnung erfolgen kann. Jede auf vektorieller Basis oder durch schlichte Addition oder Subtraktion ermittelte resultierende Geschwindigkeit in Relation zu einem Bezugssystem, ist nur eine Näherung.

Als Beispiel sei das Bezugssystem Erde genannt, gegenüber dem sich mit Geschwindigkeit v ein Eisenbahnwagen bewegt, in dem ein Reisender mit Geschwindigkeit u (relativ zum Wagen) läuft.

Dass dieser uns vertraute Umgang mit Geschwindigkeiten im allgemeinen dennoch keine spürbaren Fehler zur Folge hat, ist lediglich dadurch begründet, dass die Näherung dem exakten Ergebnis sehr nahe kommt, weil die betrachteten Geschwindigkeiten um mehrere Zehnerpotenzen unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegen. Oder anders ausgedrückt: Bezogen auf die in der Natur alles dominierende Lichtgeschwindigkeit operieren wir also zumeist gerade im „untypischen“ Bereich nahe der Geschwindigkeit 0.

Die Interpretation der maßgebenden Geschwindigkeiten der strömenden Feinmasse in einem Materiebaustein mit Bezug

- auf das ruhende Bezugssystem und
- auf sein Inertialsystem, das sich mit Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem bewegt,

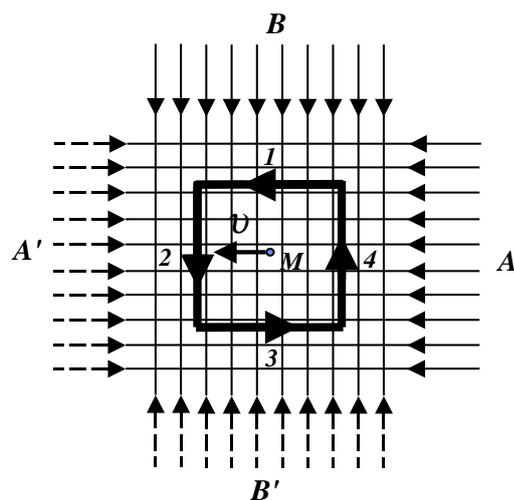


Abbildung 27: Strömungsbahnen Materiebaustein

sei an Hand von Abbildung 27 erläutert. Wir stellen uns ein ebenes Geflecht zweier gleichförmiger Feinmasse-Strömungen vor, deren Bänder A und B senkrecht zueinander verlaufen und Lichtgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem haben. Ein gleichartiges Geflecht mit entgegengesetzten Strömungsrichtungen (Bänder A' und B') sei in identischer geometrischer Lage überlagert.

Die schematisch dargestellten Strömungsbahnen eines Materiebausteins sollen sich wie ein quadratischer Rahmen vor dem Hintergrund des geschilderten Doppelgeflechts, mit Relativgeschwindigkeit v bewegen. Der Materiebaustein soll dem Inertialsystem M entsprechen. Aus Sicht des Inertialsystems M mit Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem, korrespondiert das Strömungsband A mit einer Strömungsgeschwindigkeit von $c - v$ in Seite 1, und das Strömungsband A' mit einer Strömungsgeschwindigkeit von $c + v$ in Seite 1.

Das geometrische Mittel beider Geschwindigkeiten

$$c' = \sqrt{(c - v)(c + v)} = \sqrt{c^2 - v^2}$$

deckt sich also mit dem Ergebnis der fiktiven Geschwindigkeit nach Beziehung (9.2). Die Betrachtung für Seite 1 gilt analog für Seite 3 und weiterhin auch für Seite 2 und 4 mit Rücksicht auf die Kontinuität der Strömung. Wir haben im Zusammenhang mit Beziehung (9.3) bereits erkannt, dass diese fiktive Geschwindigkeit c' nur als gedanklicher Zwischenschritt anzusehen ist, der sich schließlich in einer reduzierten Wellenlänge nach (9.3) abbildet. In analoger Weise bildet sich deshalb auch das Verhältnis

$$\frac{c'}{c} = f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l'}{l}$$

in einer Kontraktion der Längen ab. D.h., die (relative!) Lichtgeschwindigkeit c im Materiebaustein wird unverändert beibehalten. Stattdessen schrumpfen nach Maßgabe des Kontraktionsfaktors gleichmäßig alle 4 Seiten des Rahmens (Kontraktion der Länge l) und umgekehrt proportional, also entsprechend

$$\frac{1}{f(v)} = \frac{m'}{m}$$

wächst die Feinmasse m des Materiebausteins, indem das Quantum an Feinmasse des Umfelds, das die Beschleunigung auf die Relativgeschwindigkeit v bewirkt, in den Materiebaustein integriert wird, und zwar unter Wahrung der Konstanz des resultierenden Drehimpulses der Feinmasse im Materiebaustein. Diese die Beschleunigung bewirkende Feinmasse ist also, bevor sie vom Materiebaustein geschluckt wird, Bestandteil des geschilderten Doppelgeflechts, hat also in Relation zum ruhenden Bezugssystem quasi eine standardisierte Geschwindigkeit. Und mit eben dieser Geschwindigkeit als Resultat des umgekehrten Vorgangs, nämlich der Emission von Licht beziehungsweise Strahlung aus einem Materiebaustein, strömt die emittierte Feinmasse-Strömung, und zwar unabhängig von der Relativgeschwindigkeit v des Materiebausteins. Dabei wird der Einfluss einer **veränderlichen** Gravitation **zunächst** ausgeblendet, wie zu Beginn von Unterabschnitt 9.4 bereits erwähnt.

9.6 Relative und absolute Zeit

Mit dem Begriff der relativen Geschwindigkeit v korrespondiert der Begriff der relativen Zeit t' , bis zu EINSTEINS Erkenntnissen unangefochtene Basis aller formulierten physikalischen Gesetzmäßigkeiten. Diese relativen Größen sind bekanntlich auch heute noch bestimmende Basis im unteren Geschwindigkeitsbereich, also weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit, ohne dass die damit in Kauf genommenen Fehlertoleranzen technisch von Bedeutung wären.

Nach dem in diesem Aufsatz vorgestellten Denkansatz stehen den relativen Werten der Geschwindigkeit v und der Zeit t' die absoluten Werte v' und t gegenüber, wobei gilt

$$\frac{v'}{v} = \frac{t'}{t} = f(v_r) = \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} = f(v_r') = \sqrt{1 - \frac{v_r'^2}{c'^2}}. \quad (9.25)$$

D.h., dieser Denkansatz basiert auf dem unveränderbaren absoluten Zeitbegriff, und die relative Zeit ergibt sich als abhängiger Wert der absoluten Zeit und steht zu dieser in einer festen Beziehung. Durch diese rechnerische Beziehung nach (9.25) stehen absolute und relative Zeit wie Alternativen nebeneinander, wobei der ersteren aber klar die Priorität zukommt.

Im Gegensatz zu diesem hier vorgestellten Denkansatz steht EINSTEINS These, die dem Begriff der relativen Zeit physikalische Absolutheit zuweist. EINSTEINS These ist der Versuch, den absoluten Zeitbegriff auszumerzen - oder besser: zu unterdrücken. Und scheinbar gelingt dies auch. Der Grund ist einfach darin zu suchen, dass ja entsprechend Beziehung (9.25) die absolute Zeit stets auch durch ihr relatives Pendant substituiert werden kann. Diese konsequente Unterdrückung des absoluten Zeitbegriffs kann aber nicht darüber hinweg täuschen, dass er

implizit nach (9.25) in jeder relativen Zeit enthalten ist. Deswegen kann es nicht verwundern, dass wir unabhängig davon, ob wir unmittelbar explizit mit dem absoluten Zeitbegriff operieren oder implizit in Gestalt von dessen Stellvertreter, dem relativen Zeitbegriff, zu gleichen Ergebnissen gelangen.

Projizieren wir vorstehende Erkenntnisse auf unsere Grundbeziehung (6.142), so ergibt sich deren erweiterte allgemeine Form dergestalt:

$$m'\lambda' = \frac{h'}{c'}$$

mit

$$\frac{m}{m'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{c'}{c} = \frac{h'}{h} = f(v_r) = f(v_r'). \quad (9.26)$$

Wie bereits an anderer Stelle erwähnt, sind also auch Lichtgeschwindigkeit c und PLANCKSches Wirkungsquantum h von unserem Inertialsystem „Erde“ eingefärbte relative Werte, die in die absoluten Werte c' und h' überführt werden könnten, wenn uns die Relativgeschwindigkeit v_r (absolut: v_r') unseres Inertialsystems zum ruhenden Bezugssystem bekannt wäre.

Ein weiteres fundamentales Naturgesetz ist der Impulssatz für den Kraftstoß in der Form

$$m \cdot dv = F \cdot dt,$$

der die Kraft F mit Masse, Geschwindigkeit und Zeit in Beziehung setzt.

Auch diese Beziehung wird in die allgemeine Form

$$m' \cdot dv' = F \cdot dt \quad (9.27)$$

überführt, die zu dem absoluten Wert der Beschleunigung führt:

$$a' = \frac{dv'}{dt} = \frac{F}{m'}. \quad (9.28)$$

Mit

$$\frac{m}{m'} = \frac{v'}{v} = \frac{t'}{t} = f(v_r)$$

ergibt sich für relative und absolute Beschleunigung

$$a = \frac{dv}{dt'} = \frac{dv'}{dt} \cdot \frac{1}{[f(v_r)]^2} = a' \cdot \frac{1}{[f(v_r)]^2}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m'} \cdot \frac{1}{[f(v_r)]^2} = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{f(v_r)}, \\ a &= \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Für diese Beziehung besteht analog dem Impulserhaltungssatz nach (9.27) **keine** Übereinstimmung mit der von EINSTEIN angegebenen Form.

Die relative Beschleunigung wächst also mit der Relativgeschwindigkeit v_r . In einer entsprechend $v_r \rightarrow c$ extrem kontrahierten „Punktwelt“ würde also eine gegen Unendlich tendierende Beschleunigung gemessen. Dies ist allerdings lediglich eine Konsequenz der definatorischen Zeitkontraktion. Von echter Aussagekraft ist jedoch allein die am absoluten Zeitmaßstab orientierte Beziehung (9.28).

9.7 Addition der Geschwindigkeiten

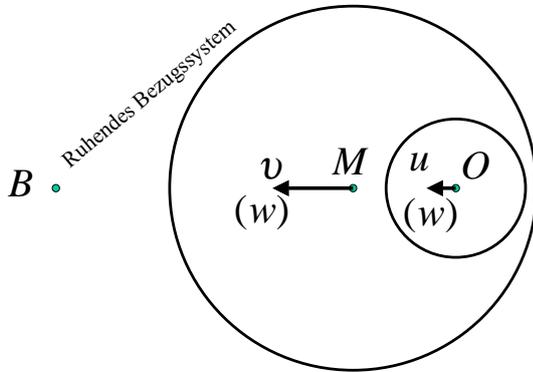


Abbildung 28: Addition der Geschwindigkeiten

Das Inertialsystem M soll gegenüber dem ruhenden Bezugssystem die Relativgeschwindigkeit v aufweisen (siehe Abbildung 28). Das Inertialsystem O soll bezogen auf M die Geschwindigkeit u besitzen.

Wären u und v beide auf den absoluten Zeitmaßstab bezogen, könnte durch Addition unmittelbar die resultierende Geschwindigkeit von O gegenüber dem ruhenden Bezugssystem ermittelt werden.

Nun haben wir, wie anschließend dargelegt, die Möglichkeit, entweder v oder auch u als absolute Geschwindigkeit gegen den ruhenden Bezugssystem zu interpretieren. Aber der jeweils andere Geschwindigkeitswert ist dann zwingend relativer Natur. Nur für die beiden Sonderfälle $v = 0$ oder $u = 0$ führen absoluter und relativer Zeitmaßstab

zum gleichen Ergebnis. Für die gegenseitige Anpassung von $u \neq 0$ und $v \neq 0$ gibt es zwei, bezogen auf das Endergebnis gleichberechtigte Alternativen:

- a) Wir können O und damit u auf Inertialsystem M beziehen, denn Inertialsystem O bewegt sich mit Relativgeschwindigkeit u gegenüber M und beide Inertialsysteme gemeinsam haben die Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem.
- b) Aber auch der umgekehrte Weg führt zum Ziel: Wir können M und damit v auf Inertialsystem O beziehen und uns auf den Standpunkt stellen, dass sich Inertialsystem M mit Relativgeschwindigkeit v gegenüber O bewegt und beide Inertialsysteme gemeinsam haben Relativgeschwindigkeit u gegenüber dem ruhenden Bezugssystem.

Diese Gleichwertigkeit der beiden Alternativen ermuntert uns weiter zu der Feststellung, dass darüber hinaus die Kombination von u und v offensichtlich auch durch andere Wertepaare von Geschwindigkeiten der Inertialsysteme M und O substituiert werden kann, die zusammengefasst zum gleichen Ergebnis führen. Von diesen unendlich vielen Wertepaaren nehmen wir den Spezialfall, bei dem v und u durch die gleiche Geschwindigkeit - in der Folge mit w bezeichnet - substituiert werden. Dies ist offenbar ein Wert zwischen u und v und es bedarf immer zweier gleicher Schritte um

- a) von u über w auf v umzurechnen oder umgekehrt
- b) von v über w auf u .

Die Gesetzmäßigkeit zur wechselseitigen, zweistufigen Überführung des einen Inertialsystems in das jeweils andere entspricht bildlich einem zweischaligen Modell.

Welche Gleichheit bei diesen zwei Schritten gemeint ist, stellt sich mathematisch durch die Gleichheit der Proportionen dar entsprechend

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}. \quad (9.30)$$

Für jeden der beiden Schritte gilt der gleiche Kontraktionsfaktor

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{u'v'}}{\sqrt{uv}} = \frac{w'}{w} = f(w') \quad (9.31)$$

mit

$$w = \sqrt{uv} \quad \text{und} \quad w' = \sqrt{u'v'}.$$

Wir berechnen weiterhin:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{uv}} &= \frac{u}{w} = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ \frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{\frac{u}{v}}} &= \frac{w}{\sqrt{\frac{u}{v}}} = v. \end{aligned}$$

Das Verhältnis

$$\frac{u}{w} = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

ist also der Faktor, durch den u geteilt werden muss, um im ersten Schritt zur Geschwindigkeit w zu gelangen. Wird im zweiten Schritt w seinerseits durch den gleichen Faktor geteilt, kommen wir zu v .

Diese Umrechnung von u auf v in zwei gleichen Schritten ergibt sich für die umgekehrte Richtung, also von v nach u , in analoger Weise. Jeder der beiden Teilschritte ist jeweils mit dem Kontraktionsfaktor $f(w')$ verbunden.

Die Längenkontraktion, die uns zu den Geschwindigkeitswerten u' und v' führt, ist aber nur auf das jeweilige Inertialsystem O beziehungsweise M bezogen, die, wie gesagt, als ein zweischaliges Modell anzusehen sind. Zur Berechnung der resultierenden Geschwindigkeit von O gegenüber dem ruhenden Bezugssystem müssen beide Schalen des Modells einbezogen werden. u und v werden von den beiden Teilschritten der Kontraktion sowie auch von der resultierenden Kontraktion in gleicher Weise betroffen und es führt offensichtlich zum gleichen Ergebnis, wenn u und v die Rolle vertauschen.

In der Umformung entsprechend

$$\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$$

erkennen wir die direkte Verwandtschaft zu Beziehung (9.20), wobei u , v den Charakter relativer Geschwindigkeiten haben und u' , v' den Charakter absoluter Geschwindigkeiten.

Wenn hier nur vom „Charakter“ einer absoluten Geschwindigkeit gesprochen wird, hat dies seine Begründung darin, dass u' , v' sowie w' als Ersatzwert der Relativgeschwindigkeit, sich ja nur auf **einen** Teilschritt des zweischaligen Modells beziehen.

Dies muss sich auch bei der Anwendung von Beziehung (9.5) in dem Geschwindigkeitswert niederschlagen, der mit der Lichtgeschwindigkeit c ins Verhältnis gesetzt wird. Dies kann nicht w , sondern muss der durch die Kontraktion des 1. Teilschritts bereits „vorbelastete“ Wert w' sein.

Es gilt deshalb

$$f(w') = \sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}} \quad (9.32)$$

mit

$$w' = w \cdot f(w') \quad \text{nach (9.31).}$$

w' eingesetzt in Beziehung (9.32) ergibt nach Auflösung:

$$f(w') = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{w'^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{uv}{c^2}}}. \quad (9.33)$$

Aus (9.31) ergibt sich die Form

$$u' + v' = (u + v) \cdot f(w'). \quad (9.34)$$

u' und v' haben zwar den Charakter „absoluter“ Geschwindigkeitswerte. Wir dürfen dabei aber - wie gesagt - nicht vergessen, dass sich, wie Abbildung 28 verdeutlicht, die Geschwindigkeit w' und damit der Kontraktionsfaktor $f(w')$ nur auf die Geschwindigkeit von Inertialsystem O gegenüber Inertialsystem M beziehungsweise auf die Geschwindigkeit von Inertialsystem M gegenüber dem ruhenden Bezugssystem beziehen.

Dagegen verlangt die Berechnung der Geschwindigkeit von Inertialsystem O relativ zum ruhenden Bezugssystem die zweimalige Berücksichtigung von Relativgeschwindigkeit w' und zugehörigem Kontraktionsfaktor $f(w')$.

Die Inertialsysteme sind also wie ineinander verschachtelt aufzufassen und die resultierende absolute Geschwindigkeit errechnet sich zu

$$u'' + v'' = (u' + v') \cdot f(w') = (u + v) \cdot [f(w')]^2;$$

$$u'' + v'' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}. \quad (9.35)$$

Auch für dieses Ergebnis ergibt sich (formale) Übereinstimmung mit EINSTEINS Relativitätstheorie. Dass für den Sonderfall der (resultierenden) Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem absolute und relative Geschwindigkeit übereinstimmen, sei nochmals in Erinnerung gebracht.

Zum besseren Verständnis wird noch folgende Erklärung angefügt:

Nach den in Unterabschnitt 9.5 zu (9.24) gemachten Ausführungen gilt, dass für die Geschwindigkeit v an sich Gleichheit von absolutem und relativem Wert gegeben ist. In unserem zweischaligen Modell haben wir jedoch zur Erzielung eines für beide Teilschritte gleichen Kontraktionsfaktors $f(w')$ beide Geschwindigkeitswerte u und v durch das geometrische Mittel $w = \sqrt{u \cdot v}$ substituiert. Der davon abgeleitete Wert w' hat in der inneren Schale des zweischaligen Modells, also bezogen auf das Inertialsystem M , den Charakter einer absoluten Geschwindigkeit.

Es muss jedoch auch unabhängig von dem gewählten zweischaligen Modell ein absoluter Geschwindigkeitswert u_a existieren, der direkt mit v addiert werden kann:

$$\begin{aligned} v + u_a &= \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}; \\ u_a &= \frac{u + v - v - u \cdot \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{uv}{c^2}} = \frac{u \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{uv}{c^2}}; \\ u_a &= u \cdot [f(v) \cdot f(w')]^2. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Für die Voraussetzung $u \ll v \ll c$ kann also gesetzt werden:

$$u_a = u \cdot [f(v)]^2.$$

Der Faktor $[f(v)]^2$ ist dabei im Sinne einer zeitlichen Umrechnung analog der später angegebenen Beziehung (9.62) aufzufassen, weil im Inertialsystem M aufgrund der Relativgeschwindigkeit v die „Uhren anders gehen“.

Die Zweischaligkeit unseres Rechenmodells ist keine Willkür, sondern kommt in dem Produkt $f(v) \cdot f(w')$ direkt zum Ausdruck. Es gilt sowohl in Bezug auf Inertialsystem M (innere Schale) und in multiplikativer Weise ein weiteres Mal mit Bezug auf das ruhende Bezugssystem (äußere Schale) entsprechend der Form $[f(v) \cdot f(w')]^2$. Dabei soll nicht unterdrückt werden, dass rein mathematisch auch u zur absoluten Geschwindigkeit „erklärt“ werden kann, und dann ein zugehöriger Wert

$$v_a = v \cdot [f(u) \cdot f(w')]^2$$

berechnet werden kann, sodass gilt

$$v + u_a = v_a + u.$$

Diese rechnerischen Alternativen dürfen freilich nicht mit der physikalischen Realität verwechselt werden.

Beschränken wir die Betrachtungsweise des Gesamtmodells zweier quasi ineinander verschachtelter Inertialsysteme auf den Aspekt der wechselseitigen Bezogenheit der beiden Inertialsysteme M und O , so dürfen O und M sich quasi als gleichberechtigt auffassen, wie es EINSTEINS Postulat entspricht.

Diese auf Inertialsystem O beziehungsweise M bezogene subjektive Sicht ändert jedoch nichts an dem objektiven Tatbestand, dass, wie in dem in Abbildung 28 dargestellten Beispiel, die individuellen Relativgeschwindigkeiten beider Inertialsysteme gegenüber dem ruhenden Bezugssystem und damit die individuellen Längenkontraktionen **nicht** übereinstimmen.

9.8 Die Wirkung der Gravitation

9.8.1 Licht senkrecht zu den Flächen gleicher Gravitation

Die bis Unterabschnitt 9.5 vorangetriebenen Modellvorstellungen enden noch an der Nahtstelle von Materiebaustein und umgebendem Gravitationsfeld. Wir müssen jetzt aber - gedanklich aufbauend - noch die Wirkung der zu einem Materiebaustein und insbesondere zu einem Kollektiv solcher Materiebausteine gehörende Ladungs-Feinmasse einbeziehen, und zwar sowohl die elektrisch wirksame als auch insbesondere die das Wesen der Gravitation ausmachende neutralisierte Ladungs-Feinmasse. Diese weit in den Raum ausgreifenden Gravitationsfelder bewirken in einem entsprechend weiten Bereich, dass dieses Kollektiv von Materiebausteinen oder Inertialsystem zum Bezugssystem der sich einstellenden Lichtgeschwindigkeit wird.

Dort, wo sich die Gravitationsfelder verschiedener Inertialsysteme von in der Regel unterschiedlicher Relativgeschwindigkeit zum ruhenden Bezugssystem überlagern, stellen sich für jeden Punkt eine resultierende Gravitation und eine resultierende Relativgeschwindigkeit zum ruhenden Bezugssystem ein.

Welche Wirkungen übt nun aber die Gravitation auf einen Lichtstrahl aus? Vorauszuschicken ist, dass die weiteren Betrachtungen überwiegend auf relativer Zeit und Geschwindigkeit fußen, also auf dem uns vertrauten Zeitbegriff. Spätestens bei der Interpretation der Ergebnisse müssen die Konsequenzen aber auch vor dem Hintergrund des unverrückbar absoluten Zeitbegriffs beurteilt werden.

Wie stark die Interpretation physikalischer Effekte abhängig von relativem und absolutem Zeitbegriff variieren können, erkennen wir bereits bei den folgenden Grundannahmen über die Wirkung der Gravitation auf das Licht. Diese Grundannahmen werden deshalb in zwei Versionen vorangestellt:

a) Betrachtung unter dem Aspekt des relativen Zeitbegriffs

Zu- und Abnahme von kinetischer Energie ist bei Materiebausteinen das Ergebnis einer Beschleunigung beziehungsweise Verzögerung. Die Feinmasse des Lichts hat aber bereits Lichtgeschwindigkeit und behält diese im Gravitationsfeld unverändert bei; Es kommt also zu keiner Beschleunigung oder Verzögerung. Gleichwohl ändert sich die innewohnende kinetische Energie E_k des Lichts.

b) Betrachtung unter dem Aspekt des absoluten Zeitbegriffs

Auch die Feinmasse des Lichts wird im variablen Gravitationsfeld beschleunigt und verzögert und die Lichtgeschwindigkeit variiert entsprechend. Damit ändert sich die innewohnende kinetische Energie des Lichts. Entgegen „Gefühl und Erfahrung“ bedeutet dabei aber Annäherung an das Gravitationszentrum nicht etwa Beschleunigung sondern Verzögerung der **absoluten** Lichtgeschwindigkeit, wobei dies durch Eindringen in das progressiv dichter werdende Gravitationsfeld bewirkt wird. Wenn wir dagegen zum Vergleich einen Stein im freien Fall beobachten, nehmen wir ja nicht etwa die Geschwindigkeitsänderung der im Materiebaustein zirkulierenden Feinmasse wahr, sondern ein Abbild der sich steigernden Relativgeschwindigkeit v_e , die nachfolgend definiert wird und deren Quadrat für das Gravitationspotential steht. Die Gesetzmäßigkeit der Beschleunigung (Verzögerung) der Feinmasse des Lichts hat Verwandtschaft zu der Gesetzmäßigkeit für die Beschleunigung (Verzögerung) von Materiebausteinen. Es existiert aber keine Identität dieser Gesetzmäßigkeiten.

Mit Vorstehendem ist der Einstieg in die folgenden Ableitungen gefunden. Ausgehend von der Grundbeziehung nach (9.4)

$$m \cdot \lambda = m' \cdot \lambda' = \frac{h}{c}$$

errechnet sich für die als Differenz zum Grundwert dargestellte kinetische Energie des Lichts

$$\Delta E_k = (m' - m) \cdot c^2 = m \cdot c^2 \left[\frac{1}{f(v_e)} - 1 \right] \quad (9.37)$$

mit

$$f(v_e) = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}} = \frac{m}{m'} = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

ΔE_k ist allerdings nur ein Zwischenergebnis und v_e bedarf noch der Interpretation. Physikalisch maßgebend ist die von der Gravitation abhängige Energieverdichtung $\Delta E_k'$, die in direktem Zusammenhang mit dem Wertepaar m', λ' steht:

$$\Delta E_k' = \left(\frac{m'}{\lambda'} - \frac{m}{\lambda} \right) \cdot c^2 = \frac{m}{\lambda} \cdot c^2 \cdot \left\{ \frac{1}{[f(v_e)]^2} - 1 \right\} \quad (9.38)$$

$\Delta E_k'$ ist also eine relative Größe und wird als Differenz zum Grundwert ohne Gravitationseinfluss dargestellt.

Die Geschwindigkeit v_e ist hierbei der Äquivalenzwert oder Ersatzwert für die Relativgeschwindigkeit zum ruhenden Bezugssystem. Wir dürfen v_e in energetischer Hinsicht wie eine „echte“ Relativgeschwindigkeit nehmen, wobei lediglich an die Stelle des ruhenden Bezugssystems das Gravitationszentrum tritt.

Für

- Gravitation (Geschwindigkeitswert v_e) einerseits und
- Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem andererseits

existieren nach Maßgabe von v beziehungsweise v_e identische physikalische Gesetzmäßigkeiten für die Definition von

- Energiepotential (Gravitationspotential, kinetische Energie),
- Längenkontraktion sowie
- relativer Zeit.

Im Sinne eines Federpendels repräsentiert v_e^2 die gespeicherte elastische Energie des Pendels, und zwar in Form der Differenz zum Maximalwert. v^2 steht dagegen für die kinetische Energie. Die Überlagerung beider Energieformen ist der Normalfall in der Natur, wobei in der Regel zusätzlich eine Überlagerung einer Vielzahl von Einzelschwingungen wirksam ist.

Bei diesem Vergleich mit dem Federpendel entspricht $v_e \rightarrow 0$ der maximal gespannten Feder an einem Ortspunkt $r \rightarrow \infty$ außerhalb des Gravitationszentrums. Damit reicht der Federweg für die Entspannung vom Unendlichen bis ins Gravitationszentrum.

Bei der Betrachtung des einfachen Federpendels drängt sich jedoch auch ein Vergleich mit dem Kosmos als Ganzes auf: Es ist weder wahrscheinlich, dass das „kosmische Pendel“ jemals aus den Fugen geraten ist (Urknall) noch, dass es sich in Zukunft in den Weiten des Raumes verliert oder „wieder“ kollabiert.

Nach dieser eingestreuten kurzen Betrachtung kehren wir zurück zur Geschwindigkeit v_e , die noch näher ausgedeutet werden soll. Die Relativgeschwindigkeit v_e korrespondiert mit dem maßgebenden Wert des Gravitationspotentials und ihr Grenzwert hat die Natur einer Fluchtgeschwindigkeit, wobei noch zu untersuchen sein wird, unter welchen Bedingungen diese Flucht gelingen kann. Im Vorgriff sei darauf hingewiesen, dass sich nach der üblichen Definition des Gravitationspotentials dessen Identität mit dem Quadrat von v_e herausstellen wird, wenn von dem nullpunktbedingten negativen Vorzeichen einmal abgesehen wird.

Im Gravitationsfeld ändert sich also nicht die Geschwindigkeit des Lichts, sondern die Energieverdichtung seiner strömenden Feinmasse:

$$\frac{m'}{\lambda'} = \frac{m}{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{f(v_e)} \right]^2 = \frac{m}{\lambda} \cdot \frac{c^2}{c^2 - v_e^2}. \quad (9.39)$$

Diese Energieverdichtung ist aber gleichzeitig nichts anderes als eine Kontraktion der Längen entsprechend Faktor $f(v_e)$.

Diese Energieverdichtung und Kontraktion der Längen betrifft nicht nur die strömende Feinmasse im Licht sondern auch die strömende Feinmasse in Materiebausteinen. D.h., auch jeder Körper im Gravitationsfeld wird entsprechend kontrahiert.

Unter dem Einfluss der Gravitation werden Körper nach einem schalenförmigen Modell kontrahiert. Jede Schale mit gleichem Gravitationspotential v_e^2 erfährt eine Kontraktion ihres Abstandes r zum Gravitationszentrum auf das Maß

$$r' = r \cdot f(v_e). \quad (9.40)$$

Dabei ist r das theoretische Grenzmaß ohne Kontraktion.

Zusammenfassend ist also festzustellen:

Es gibt zwei Arten der Längenkontraktion, nämlich

- abhängig von der Relativgeschwindigkeit zum ruhenden Bezugssystem und
- abhängig von der Gravitation.

Diese beiden Formen kommen in der Natur immer in Überlagerung vor und ihre enge Verwandtschaft kommt allein schon in der identischen Struktur der Beziehung für die Berechnung des Kontraktionsfaktors zum Ausdruck.

Für das Beispiel unserer Erde (Radius r_E , Erdbeschleunigung $g_E = g$) ergibt sich für das Durchlaufen des Gravitationspotentials von der Erdoberfläche bis ins Unendliche, die vom Radius r (= Abstand zum Erdmittelpunkt) abhängige Erdbeschleunigung

$$a(r) = g \cdot \frac{r_E^2}{r^2}. \quad (9.41)$$

Unter der Bedingung $v_e \ll c$ kann der Einfluss des Kontraktionsfaktors $f(v_e)$ auf den Radius r unberücksichtigt bleiben und die Energieverdichtung für das Durchlaufen des Gravitationspotentials vom Punkt mit dem Radius r bis ins Unendliche errechnet sich zu

$$E_g'(r) = \frac{m'}{\lambda'} \cdot \int_r^\infty a(r) \cdot dr = \frac{m'}{\lambda'} \cdot r_E \cdot g \cdot \int_r^\infty \frac{r_E}{r^2} = \frac{m'}{\lambda'} \cdot r_E \cdot g \cdot \left[-\frac{r_E}{r} \right]_r^\infty. \quad (9.42)$$

Daraus ergibt sich für

$$\begin{aligned} r &= r_E \quad \text{und} \\ E_g'(r) &= E_g'(r_E) = E_g' : \\ E_g' &= \frac{m'}{\lambda'} \cdot r_E \cdot g \quad (v_e \ll c). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Die Energieverdichtung E_g' für das Durchlaufen des Gravitationspotentials und der aus der kinetischen Energie des Lichts errechnete Wert der Energieverdichtung $\Delta E_k'$ nach (9.38) sind gleichzusetzen:

$$\Delta E_k' = E_g'. \quad (9.44)$$

Bildet man das Verhältnis von $\Delta E_k'$ nach (9.38) zum Gesamtwert der Energieverdichtung:

$$E' = \frac{m'}{\lambda'} \cdot c^2,$$

so ergibt sich mit (9.39):

$$\frac{\Delta E_k'}{E'} = \frac{\frac{m'c^2}{\lambda'} - \frac{mc^2}{\lambda}}{\frac{m'c^2}{\lambda'}} = 1 - \frac{c^2 - v_e^2}{c^2} = \frac{v_e^2}{c^2}. \quad (9.45)$$

In dieser Form entspricht $\frac{m}{\lambda}$ der unverdichteten Form der strömenden Feinmasse im Unendlichen, also außerhalb des Gravitationsfeldes und $\frac{m'}{\lambda'}$ dem betrachteten Punkt im Gravitationsfeld mit Radius r und Relativgeschwindigkeit $v_e(r)$.

Weiterhin ergibt sich aus (9.43)

$$\frac{E_g'}{E'} = \frac{m' \cdot r_E \cdot g}{m'c^2} = \frac{r_E \cdot g}{c^2}. \quad (9.46)$$

Trotz der Annahme $v_e \ll c$ und $f(v_e) \approx 1$ haben wir in (9.42), (9.43) und (9.45) mit

$$m' = \frac{m}{f(v_e)}$$

statt mit m operiert. Dies war deswegen angezeigt, weil nach (9.45) als Bezugsgröße des extrem kleinen Differenzwertes der Energieverdichtung $\Delta E_k'$

$$E' = \frac{m'}{\lambda'} \cdot c^2$$

gewählt werden musste und diese Bezugsgröße einheitlich in Ansatz zu bringen war, womit sie dann nach Kürzen in den erzielten Ergebnissen nach (9.45) und (9.46) nicht mehr in Erscheinung tritt.

Aus (9.45) und (9.46) ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_e^2 &= r_E \cdot g \\ \text{und mit} \\ v_e(r = r_E) &= v_g : \\ v_g^2 &= r_E \cdot g ; \\ v_g &= \sqrt{r_E \cdot g} \quad (v_g \ll c). \end{aligned} \tag{9.47}$$

In Verallgemeinerung gilt:

$$v_e^2 = r \cdot g(r).$$

Mit m_E als Erdmasse ergibt sich nach dem Gravitationsgesetz

$$g(r) = \frac{m_E \cdot G}{r^2}$$

und

$$v_e^2 = \frac{m_E \cdot G}{r}.$$

Wird die Masse m_E der Erde in Verallgemeinerung durch die Masse M_0 ersetzt, so ergibt sich:

$$v_e^2 = \frac{M_0 \cdot G}{r}. \tag{9.48}$$

Sieht man von dem (definitionsbedingten) Vorzeichen ab, entspricht diese Form auf der rechten Gleichungsseite der Definition des Gravitationspotentials.

v_g hat den Charakter einer Fluchtgeschwindigkeit und hat für das Beispiel Erde den Wert $v_g \approx 7\,900 \frac{m}{s}$.

v_g liegt mit $\frac{v_g}{c} \approx 264 \cdot 10^{-5}$ weit unter der Lichtgeschwindigkeit.

Obwohl die Ableitungen in diesem Unterabschnitt allein auf die Energieverdichtung des Lichtes abhängig vom Gravitationspotential abgestellt sind, weisen die Ergebnisse natürlich direkte Verwandtschaft zu den bekannten Beziehungen für die Fluchtgeschwindigkeit von Flugkörpern auf. Verwandtschaft ist aber nicht gleichbedeutend mit Identität. Zwischen dem Quadrat von v_g für Licht nach (9.47) und dem Quadrat der Fluchtgeschwindigkeit von Flugkörpern besteht das charakteristische Zahlenverhältnis von 1 : 2.

Für starke Gravitationsfelder mit Werten der Relativgeschwindigkeit, die sich der Lichtgeschwindigkeit annähern, muss Beziehung (9.42) in Verbindung mit (9.40) aufgrund des variablen Kontraktionsfaktors für Radius r und zunehmend auf den Gesamtwert der Energieverdichtung $E'(r)$ wie folgt modifiziert werden:

$$\frac{E_g'(r)}{E'(r)} = \frac{r_0^2 \cdot g_0}{c^2} \cdot \int_r^\infty \frac{c^2}{c^2 - v_e^2} \cdot \frac{dr}{r^2}. \tag{9.49}$$

Hierbei ist in Verallgemeinerung des Beispiels Erde r_0 für r_E und g_0 für g gesetzt.

Das Integral hat dabei die Form

$$\int_r^{\infty} \frac{dr}{r'^2}$$

mit

$$r' = r \cdot f(v_e) = r \cdot \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}.$$

D.h., vor dem Hintergrund des unkontrahierten Raumes (Differentielle Größe dr , Integrationsgrenzen) wird nach Maßgabe der kontrahierten Körperdimensionen r' integriert. Damit kommt mathematisch zum Ausdruck, dass nicht der Raum, wohl aber Feinmasse und Materie im Raum einer Längenkontraktion unterliegen.

Mit

$$E'(r) = \frac{m'}{\lambda'} \cdot c^2$$

sowie

$$\Delta E_k'(r) = \Delta E_k'(v_e) = \Delta E_k'$$

nach Beziehung (9.45) und

$$\frac{\Delta E_k'(r)}{E'(r)} = \frac{E_g'(r)}{E'(r)}$$

ergibt sich eingesetzt in (9.49):

$$\frac{v_e^2}{c^2} = \frac{r_0^2 \cdot g_0}{c^2} \cdot \int_r^{\infty} \frac{c^2}{c^2 - v_e^2} \cdot \frac{dr}{r^2}.$$

Bei Berücksichtigung der Abhängigkeit $v_e = v_e(r)$ ergibt sich durch Differenzieren und Lösen der entstehenden Differentialgleichung folgende Ableitung:

$$\begin{aligned} 2v_e \cdot \frac{dv_e}{dr} &= -r_0^2 \cdot g_0 \cdot \frac{c^2}{c^2 - v_e^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \\ 2v_e \cdot \frac{dv_e}{dr} \cdot c^2 - 2v_e^3 \cdot \frac{dv_e}{dr} &= -r_0^2 \cdot g_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{r^2}, \\ v_e^2 \cdot c^2 - \frac{1}{2} \cdot v_e^4 &= r_0^2 \cdot g_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{r} + konst. \end{aligned}$$

Für $v_e = 0$ und $r \rightarrow \infty$ ergibt sich: $konst. = 0$.

Deshalb ist:

$$\begin{aligned} (v_e^2)^2 - 2v_e^2 \cdot c^2 &= -2r_0^2 \cdot g_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{r}, \\ (c^2 - v_e^2)^2 &= c^4 - 2r_0^2 \cdot g_0 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{r}, \\ \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^2 &= 1 - \frac{2r_0^2 \cdot g_0}{c^2} \cdot \frac{1}{r}, \\ f(v_e) = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}} &= \sqrt[4]{1 - \frac{2r_0^2 \cdot g_0}{c^2 \cdot r}}, \\ \frac{v_e^2}{c^2} &= 1 - \sqrt{1 - \frac{2r_0 \cdot g_0}{c^2} \cdot \frac{r_0}{r}}. \end{aligned} \tag{9.50}$$

Für $v_e(r = r_0) = v_g$ ergibt sich

$$v_g = c \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{2r_0 \cdot g_0}{c^2}}}. \tag{9.51}$$

Wir erkennen, dass für $r_0 = r_E$ und $g_0 = g$ sowie $v_g \ll c$ Beziehung (9.47) und (9.51) übereinstimmen.

Unter der Bedingung von (9.51) ergibt sich ausgehend von dem mit (8.15) übereinstimmenden Ausgangswert

$$f(v_g) = \sqrt{1 - \frac{v_g^2}{c^2}} \quad (9.52)$$

durch Umformung die Beziehung

$$\frac{2r_0 \cdot g_0}{c^2} = \frac{v_g^2}{c^2} \cdot \left(2 - \frac{v_g^2}{c^2}\right) = [F(v_g)]^2$$

und der abgeleitete Faktor

$$F(v_g) = \frac{v_g}{c} \cdot \sqrt{2 - \frac{v_g^2}{c^2}}. \quad (9.53)$$

$F(v_g)$ ist nicht mit dem Kontraktionsfaktor $f(v_g)$ zu verwechseln, sondern veranschaulicht vor allem den aus der Kontraktion sich ergebenden Sprung zwischen den Grenzwerten $\frac{v_g}{c} \rightarrow 0$ und $\frac{v_g}{c} \rightarrow 1$ in der Funktionalität von g_0 beziehungsweise $\frac{M_0}{r_0}$. Das belegen die beiden abgeleiteten Funktionen:

$$g_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{r_0} \cdot [F(v_g)]^2, \quad (9.54)$$

$$\frac{M_0}{r_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{G} \cdot [F(v_g)]^2. \quad (9.55)$$

Der Maximalwert der von der wirksamen Gravitation abhängigen Relativgeschwindigkeit beträgt

$$v_{g(max)} = c.$$

Mit der damit gesetzten Grenze ergibt sich aus (9.51), übereinstimmend mit (9.53) und (9.54):

$$2 \cdot r_0 \cdot g_0 = c^2 \quad \text{für} \quad v_{g(max)} = c. \quad (9.56)$$

Wir erkennen aus (9.56), dass das maßgebende Produkt aus Beschleunigung g_0 im Gravitationsfeld und Radius r_0 einen proportionalen Wert der Energie darstellt.

Unter der Annahme, dass das Gravitationsgesetz seine Gültigkeit auch im Bereich extrem hoher Gravitationskräfte beibehält, lässt sich die Beschleunigung g_0 , die ein kugelförmiger Körper der Masse M_0 vom Radius r_0 an seiner Oberfläche durch Gravitation bewirkt, wie folgt berechnen:

$$g_0 = \frac{M_0 \cdot G}{r_0^2}. \quad (9.57)$$

Mit der Grenzbedingung nach (9.56) ergibt sich mit (9.55)

$$\frac{M_0}{r_0} [v_{g(max)}] = \frac{c^2}{2G} \approx 7 \cdot 10^{26} \frac{kg}{m} \quad \text{für} \quad v_{g(max)} = c. \quad (9.58)$$

Wenn also das Verhältnis von Masse und Radius eines (kugelförmig gedachten) Körpers den Wert der Beziehung (9.58) überschreitet, ist eine Emission von Licht aus diesem Körper gegen die Gravitationskräfte nicht mehr möglich.

Die Annahme, dass das Gravitationsgesetz nach (9.57) auch für die Bedingung nach (9.58) gilt, ist jedoch nicht schlüssig. Denn, dass die Größen M_0 und r_0 eine dem Grenzfall entsprechende totale Kontraktion

$$f[v_{g(max)}] = f(c) = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = 0$$

erzeugen und selbst davon unberührt bleiben, ist wohl unreal.

Zur Richtigstellung bleiben 2 Alternativen

- M_0 und r_0 werden als unkontrahierte Werte von Masse und Radius verstanden, was unserem stillschweigend praktizierten Verfahren in Technik und physikalischem Experiment entspricht.
- M_0 und r_0 werden, die Kontraktion berücksichtigend in (9.57) und (9.58) durch $\frac{M_0}{f(v_e)}$ und $r_0 \cdot f(v_e)$ ersetzt.

Zusammenfassend ist somit die Gravitationskonstante G zu substituieren durch die Größe: $G' = G \cdot [f(v_e)]^2$.

In jedem Fall liegt unter der Grenzbedingung nach (9.58) eine Singularität vor, bei der das Gravitationsgesetz keinen Ansatzpunkt bietet, Aussagen über die realen Verhältnisse von Massenkontraktion und geometrischen Dimensionen zu gewinnen.

Gegen eine Gravitationswirkung unterhalb der mit den Beziehungen (9.56) und (9.58) definierten Grenze kann Licht emittiert werden. Dabei wird freilich seine Wellenlänge nach Maßgabe der Stärke des Gravitationsfeldes fortschreitend länger, was einer entsprechend reduzierten Energieverdichtung des Lichtstrahls nach Durchlaufen des Gravitationsfeldes entspricht. Der Lichtstrahl unterliegt bei seiner Flucht einer Auszehrung nach Maßgabe der wirksamen Kräfte der Gravitation.

Die Feinmasse, die ein Lichtstrahl bei seiner Flucht verliert, gibt er an den emittierenden Körper ab (oder besser: zurück). Die Radialkomponente der neutralisierten Ladungs-Feinmasse stellt nämlich den durch das „eingedrungene“ Licht gestörten Gleichgewichtszustand durch entsprechenden Transport von Feinmasse wieder her. Die Radialkomponente wird also zum Transportweg für die Feinmasse, wie dies prinzipiell auch für dynamische Prozesse von Materiebausteinen gilt, wenn sie sich unter dem Einfluss der Gravitation relativ zueinander bewegen.

Der umgekehrte Prozess, nämlich Absorption statt Emission von Licht, bedarf in Bezug auf die Wirkung der Gravitation keiner separaten Ableitung. Trotzdem ist das Schicksal eines Lichtstrahls bei der Absorption von besonderem Interesse und unter Orientierung am absoluten Zeitbegriff kommen wir zu folgender Interpretation:

Bezogen auf das Gravitationszentrum nimmt die absolute Lichtgeschwindigkeit beim Durchlaufen des Gravitationsfeldes ab, bezogen auf das ruhende Bezugssystem bleibt sie in energetischer Betrachtungsweise aber konstant. Dies gilt auch für den Fall so starker Gravitationskräfte, dass die Grenzbeziehung (9.56) am Punkt r_0 erfüllt ist. Wir müssen dabei aber in Bedacht nehmen, dass mit dem Eintreffen des Lichts am Punkt r_0 die Aussagekraft aller bis hierher abgeleiteten Beziehungen erlischt und über das weitere Schicksal der „eingedrunge-“ Feinmasse an dieser Stelle nur vage spekuliert werden kann. Immerhin darf auf die ins Auge springende Analogie zum Materiebaustein hingewiesen werden. An dessen Rotationsachse liegt offensichtlich eine vergleichbare Singularität physikalisch-mathematischer Natur vor.

Wichtig erscheint es noch, abrundend darauf hinzuweisen, dass die Gravitation des maßgebenden Inertialsystems mit ihrer Relativgeschwindigkeit v_e und die Relativgeschwindigkeit v des Inertialsystems zum ruhenden Bezugssystem in Überlagerung die resultierende effektive Relativgeschwindigkeit und Längenkontraktion bestimmen.

Diese resultierende effektive Relativgeschwindigkeit, die v_{eff} genannt werden soll, kann natürlich ebenfalls nur in energetischer Betrachtungsweise als Ersatzwert verstanden werden.

Es gelten die für die Addition der Geschwindigkeiten nach Unterabschnitt 9.7 abgeleiteten Beziehungen in analoger Weise. Entsprechend (9.35) ergibt sich deshalb

$$v_{eff} = \frac{v_e + v}{1 + \frac{v_e \cdot v}{c^2}}, \quad (9.59)$$

und nach (9.36) für die die Wirkung der Gravitation einschließende absolute Geschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Bezugssystem

$$v_a = v \cdot [f(v_e) \cdot f(w')]^2$$

mit

$$f(w') = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v_e \cdot v}{c^2}}}.$$

Außerdem ist für die Bedingung

$$\begin{aligned} v &\ll v_e \ll c : \\ v_a &= v \cdot [f(v_e)]^2. \end{aligned}$$

9.8.2 Gravitationspotential und relative Zeit

Es gibt keine Möglichkeit, die Kontraktion einer Länge L direkt zu messen. Denn versucht man das Metermaß an den zu messenden Körper bestimmter Länge anzulegen, so ist dieses Eichmaß in gleicher Weise kontrahiert und eine durch Kontraktion begründete Differenz kann unter keinen Umständen festgestellt werden. Diese Überlegung gilt prinzipiell auch für die Länge einer Lichtwelle, also die Wellenlänge λ .

Aus Beziehung (9.16) kennen wir die Definition der relativen Zeit als abhängige Größe der Länge und ihrer Kontraktion. Mit der Wellenlänge λ korrespondiert die Periodendauer T und die Frequenz ν . Kann mit Hilfe des Mediums Zeit als abhängiger Größe der Länge, das geleistet werden, was durch die Längenmessung nicht gelingt, nämlich die Bestimmung der Kontraktion der Länge abhängig vom Gravitationspotential?

Wir schreiben die uns vertraute Beziehung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts

$$\lambda \cdot \nu = c \tag{9.60}$$

oder

$$\frac{\lambda}{T} = c.$$

Das bei konstanter Lichtgeschwindigkeit c sich aufdrängende Gleichgewicht von Weg und Zeit im zugehörigen Quotienten $\frac{\lambda}{T}$ lässt zunächst keinen Zugang zur Problemlösung erwarten. - Und dennoch eröffnet sich eine Möglichkeit, wenn wir uns bewusst machen, dass wir die Beziehung (9.60) aus langer Gewohnheit als richtig anerkennen, dass sie aber für eine Allgemeingültigkeit einer Interpretation bedarf.

Zur Beurteilung der dynamischen Vorgänge im Gravitationsfeld, kann dieses nicht als Inertialsystem mit einheitlichem Gravitationspotential samt äquivalenter Relativgeschwindigkeit betrachtet werden, weil der maßgebende Ersatzwert dieser Relativgeschwindigkeit, nämlich v_e , eine Variable ist. Deshalb muss vom ruhenden Bezugssystem ausgegangen werden, gegenüber dem beim Durchlaufen des Gravitationsfeldes in energetischer Hinsicht die konstante Lichtgeschwindigkeit c als absoluter Wert herrscht. Damit errechnet sich die Periodendauer einer Schwingung als **absoluter** Zeitwert zu:

$$T(v_e) = T = \frac{\lambda'}{c} = \frac{\lambda}{c} \cdot f(v_e) = T(v_e = 0) \cdot f(v_e) = T_0 \cdot f(v_e). \tag{9.61}$$

In dieser Form erkennen wir einen wesentlichen Unterschied zwischen Weg (Wellenlänge) und Zeit. Während bei der Wellenlänge lediglich nach unkontrahiertem Wert $\lambda = \lambda_0$ bei $v_e = 0$, $f(v_e) = 1$ und dem entsprechend Faktor $f(v_e) < 1$ kontrahiertem Wert λ' unterschieden wird, gibt es für die Periodendauer 3 verschiedene Werte.

Für $v_e = 0$, $f(v_e) = 1$ gilt die Periodendauer T_0 , ohne dass für diesen Wert nach absoluter oder relativer Zeit zu unterscheiden wäre. Für $v_e > 0$, $f(v_e) < 1$ gibt es dagegen als korrespondierende Werte zur kontrahierten Wellenlänge λ' zwei Werte der Periodendauer, nämlich den absoluten Wert

$$T = T_0 \cdot f(v_e)$$

und den relativen Wert

$$T' = T \cdot f(v_e) = T_0 \cdot [f(v_e)]^2.$$

Dies ist der markante Unterschied zwischen dem Weg und der als abhängige Größe definierten Zeit. Hier ergibt sich also ein Ansatzpunkt für das physikalische Experiment.

Die am absoluten Zeitmaßstab orientierte Periodendauer T und die zugehörige Frequenz

$$\nu(v_e) = \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 \cdot f(v_e)} = \frac{\nu_0}{f(v_e)}$$

sind also abhängig vom Gravitationspotential und der korrespondierenden Längenkontraktion. Da wir aber Periodendauer und Frequenz auf der Basis der relativen Zeit t' bestimmen, muss für die zugehörige relative Periodendauer T' sowie die entsprechende Frequenz ν' gelten:

$$T'(v_e) = T' = T \cdot f(v_e) = T_0 \cdot [f(v_e)]^2, \quad (9.62)$$

$$\nu'(v_e) = \nu' = \nu \div f(v_e) = \nu_0 \div [f(v_e)]^2. \quad (9.63)$$

D. h., die relative Zeit ist ein geeignetes Mittel zur Bestimmung der Längenkontraktion aufgrund des Gravitationspotentials. Wir erkennen außerdem, dass Uhren für die Messung relativer Zeit abhängig vom Gravitationspotential unterschiedlich schnell laufen. Bei der Abhängigkeit der Periodendauer T (absoluter Zeitwert) vom gravitationsbedingten Kontraktionsfaktor handelt es sich also um einen physikalischen Effekt im engeren Sinne.

Die nochmalige Abhängigkeit vom Kontraktionsfaktor entsprechend (9.62) ist dagegen vor allem definitorischer Natur, die nur deshalb gilt, weil unsere Uhren keine absolute sondern relative Zeit messen.

Damit ergibt sich folgende Ableitung ausgehend von Beziehung (9.50):

$$1 - \frac{v_e^2}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{2r_0^2 g_0}{c^2 r}}.$$

Der auf die Gravitation zurückzuführende Kontraktionsfaktor beträgt:

$$f(v_e) = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}.$$

Mit (9.57) ergibt sich deshalb

$$[f(v_e)]^2 = \sqrt{1 - \frac{2M_0 G}{c^2 r}}.$$

Für die Bedingung

$$\frac{2M_0 G}{c^2 r} \ll 1$$

gilt mit entsprechend hoher Genauigkeit:

$$[f(v_e)]^2 = 1 - \frac{M_0 G}{c^2 r}.$$

Für den Einfluss der Gravitation auf Wellenlänge λ und Frequenz ν von Lichtstrahlen gilt deshalb

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 &= \frac{\nu_0}{\nu'} = [f(v_e)]^2 = 1 - \frac{M_0 G}{c^2 r}; \\ \frac{\nu'}{\nu_0} &= 1 + \frac{M_0 G}{c^2 r} \quad \left(\frac{2M_0 G}{c^2 r} \ll 1!\right); \\ \frac{\nu_1' - \nu_2'}{\nu_1'} &= 1 - \frac{\nu_2'}{\nu_0} = 1 - \frac{1 + \frac{M_0 G}{c^2 r_2}}{1 + \frac{M_0 G}{c^2 r_1}}. \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich für

$$\frac{2M_0 G}{c^2 r_1} \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{2M_0 G}{c^2 r_2} \ll 1$$

mit entsprechend hoher Genauigkeit:

$$\frac{\nu_1' - \nu_2'}{\nu_1'} = \frac{M_0 G}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (9.64)$$

Daraus ergibt sich mit (9.48) die gleichwertige Beziehung:

$$\frac{\nu_1' - \nu_2'}{\nu_1'} = \frac{v_{e1}^2}{c^2} - \frac{v_{e2}^2}{c^2} = [f(v_{e1})]^2 - [f(v_{e2})]^2. \quad (9.65)$$

Die Beziehung (9.64) ist identisch mit der von EINSTEIN im Rahmen seiner allgemeinen Relativitätstheorie angegebenen Form. Dabei sei nochmals darauf hingewiesen, dass der Strich im Symbol von ν lediglich verdeutlicht, dass diese Werte auf der üblichen relativen Zeit basieren.

Am Schluss dieses Kapitels muss jedoch noch eine Erklärung und Interpretation der Ableitungen nachgereicht werden:

In Gestalt der Periodendauer T haben wir unmittelbar den absoluten Zeitbegriff vor uns. Demgegenüber seien in Rückblende auf Unterabschnitt 9.4 und die der Beziehung (9.16) vorausgegangenen Ableitungen, die dort dargestellten Beziehungen für Längen- und Zeitmessung nochmals wie folgt zusammengefasst:

$$\frac{L}{T_L} = \frac{L'}{T_L'} = c.$$

Diese Form scheint auf den ersten Blick unvereinbar mit der Beziehung (9.61) entsprechenden Form

$$\frac{\lambda'}{T} = c = c_a.$$

Dabei sei daran erinnert, dass nach (9.22) die **absolute** Lichtgeschwindigkeit c_a gegenüber dem ruhenden Bezugssystem mit der **relativen** Geschwindigkeit c eines beliebigen Inertialsystems übereinstimmt.

Die Erklärung dieses scheinbaren Widerspruches ist darin zu suchen, dass Beziehung (9.16) auf der in Unterabschnitt 9.4 angegebenen Voraussetzung beruht, dass im betrachteten Bereich eine einheitliche Gravitation herrscht, also kein Gravitationsgefälle besteht. Im Gegensatz dazu beleuchtet Beziehung (9.61) die Verhältnisse abhängig vom Gravitationsfeld, also für einen Lichtstrahl senkrecht zu den Flächen gleicher Gravitation.

Ein Körper folgt für die alternativen Fälle

- Bewegung entlang der Erdoberfläche mit gleichbleibender Geschwindigkeit und
- freier Fall (senkrecht zur Erdoberfläche)

unterschiedlichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten. Dieses Beispiel erscheint uns als eine bare Selbstverständlichkeit. Wir können dieses Beispiel aber auch sinngemäß auf den Lichtstrahl übertragen und erkennen, dass der scheinbare Widerspruch der beiden betrachteten Beziehungen stattdessen eine zwingende physikalische Notwendigkeit darstellt.

Mit dieser Problematik in engem Zusammenhang steht die Genauigkeit, mit der die Lichtgeschwindigkeit ermittelt worden ist.

In Tabellen physikalischer Naturkonstanten ist $c = 299.792.458 \frac{m}{s}$ angegeben; das entspricht also einem Anspruch an die Messgenauigkeit in der Größenordnung von 10^{-9} . Reduzieren wir zur Vereinfachung das Problem der Messgenauigkeit allein auf die Messung der Zeit (Frequenzmessung nach (9.64) entspricht Zeitmessung!), so ist dieser „bescheidene“ Anspruch an die Genauigkeit der Zeitmessung unter praktischen Messbedingungen weit unterhalb der Schwelle, die den Einfluss des Gravitationsgefälles messbar machen würde.

Wenn jedoch Beziehung (9.64) experimentell untermauert werden soll, wie dies im Turm der Harvard-University bei einem Abstand der Messpunkte von 26,6 m unternommen wurde, bedarf es einer um mehrere Zehnerpotenzen gesteigerten Messgenauigkeit für die Zeit. Diese Genauigkeit wurde bekanntlich mit Hilfe des MÖSSBAUER-Effektes erzielt.

In diesem Zusammenhang ist interessant, dass mit dem erwähnten Experiment nicht nur der Nachweis für die Richtigkeit der von EINSTEIN angegebenen Beziehung (9.64) erbracht wurde, sondern implizit auch der Beweis, dass die **absolute** Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsgefälle variiert, wenn sie **nicht** auf das ruhende Bezugssystem sondern auf das Inertialsystem mit seinem Gravitationszentrum bezogen wird.

Würde man also eine hochpräzise Methode zur Messung der Lichtgeschwindigkeit ersinnen, wobei die Lichtbahn im Gravitationsgefälle, also senkrecht zur Erdoberfläche verläuft, ergäben sich variable Werte der Lichtgeschwindigkeit abhängig von Lichtweg und durchlaufenem Gravitationsgefälle. Dabei ist unterstellt, dass bei diesem Experiment das Zeit-Normal für die Messung naturgemäß **einem** diskreten Punkt im Gravitationsfeld zugehört.

9.8.3 Lichtbahn mit variablem Winkel gegen die Flächen gleicher Gravitation

Absorption und Emission haben bis zu dieser Stelle gemeinsam, dass die Richtung der Gravitationswirkung beziehungsweise die Gegenrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung des Lichts übereinstimmt.

Geht man von einem kugelförmig gedachten Körper aus, liegt dessen Mittelpunkt auf der entsprechend verlängerten Bahn des Lichts. Die schalenförmigen geometrischen Orte gleicher Gravitationsbeschleunigung um diesen Mittelpunkt werden vom Licht senkrecht durchdrungen.

Werden diese geometrischen Orte dagegen unter einem von 90° abweichenden Winkel von einem Lichtstrahl durchdrungen, ergeben sich abweichende Wirkungen der Gravitation. Der Lichtstrahl muss hierbei an jedem Punkt in eine Radialkomponente mit Bezug auf den Mittelpunkt und eine Oberflächenkomponente senkrecht dazu zerlegt werden. Prinzipiell betrifft die Energieverdichtung beziehungsweise -verdünnung beim Durchlaufen des Gravitationsfeldes die Feinmasse des Lichts als Ganzes. Betrachten wir aber eine differentiell kleine Wegstrecke, so muss nach Radial- und Oberflächenkomponente unterschieden werden, wobei sich die Proportion beider Komponenten in dem Sinne verschiebt, dass jeweils nur die Radialkomponente von der Verdichtung oder Verdünnung betroffen ist. Damit unterliegt die Resultierende fortschreitend einer Änderung und der Lichtstrahl folgt einer gekrümmten Bahn. Die Verhältnisse

sind prinzipiell vergleichbar dem Verlauf eines Lichtstrahls durch ein Medium, allerdings für den Spezialfall, dass das Medium nur aus einem Atom besteht. Trotz dieses Unterschiedes gelten auch für diesen Spezialfall die prinzipiellen Möglichkeiten von

- Brechung
- Reflexion und
- Absorption

des Lichtstrahls abhängig von den maßgebenden Parametern.

Dass das Licht im Vergleich mit Materiebausteinen durch die Gravitation in analoger (wenn auch nicht identischer) Weise beeinflusst wird, sei an dieser Stelle bereits vorausgenommen. In scheinbarem Widerspruch hierzu wissen wir aus Erfahrung, dass ein Lichtstrahl niemals der gekrümmten Bahn folgt, die z. B. die Sonne unserer Erde aufzwingt. Die Begründung ist allein in der hohen und konstanten Geschwindigkeit des Lichts zu suchen. Dieser markante Unterschied lässt nur für theoretische Grenzfälle einen echten Vergleich zwischen Licht und Materiebausteinen im Gravitationsfeld zu.

Bei der Fortpflanzung des Lichtstrahls im veränderlichen Gravitationsfeld unterliegt der Faktor der Längenkontraktion

$$f(v_e) = \sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2}$$

einer fortlaufenden Änderung abhängig vom Abstand zum Mittelpunkt des Gravitationsfeldes.

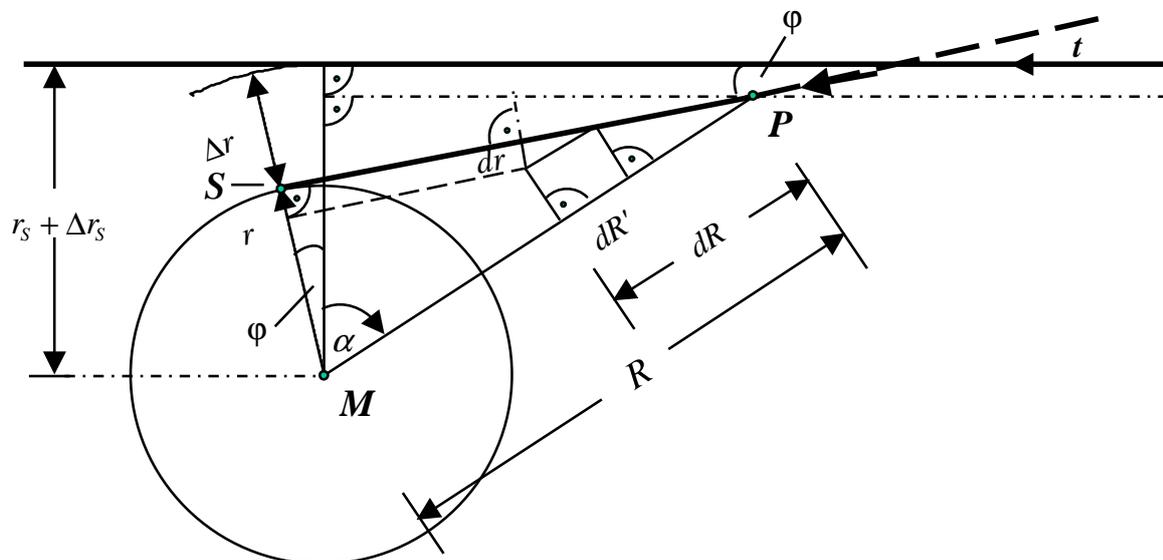


Abbildung 29: Lichtbahn, geometrische Verhältnisse

In Abbildung 29 sind die geometrischen Verhältnisse dargestellt. Maßgebend für die Betrachtung ist die kontinuierliche Abfolge der Raumpunkte P , die die Bahn des Lichtstrahls bestimmen. Ausgangspunkt des Lichtstrahls (Ursprung) ist ein auf der Tangente t liegender Punkt mit (theoretisch) unendlich großer Entfernung zum Zentrum M des Gravitationsfeldes mit zugehörigem Inertialsystem, das die gleiche Bezeichnung M tragen soll.

Der kürzeste Abstand zwischen M und t (Lot von M auf t) entspricht der Summe aus r_s und Δr_s , deren Erklärung später folgt. Der Abstand zwischen P und M ist die Variable R . Die aktuelle Richtung des Lichtstrahls im Punkt P ist durch den Winkel φ gegen die Tangente t bestimmt. Aus den Koordinaten von P ergibt sich in Kombination mit Winkel φ die Tangente an

den Kreis um M mit Radius r , der den aktuellen lotrechten Abstand der (von P aus geradlinig verlängerten) Lichtbahn zum Mittelpunkt M entspricht. Dieser Abstand entspricht der Strecke zwischen M und S . Winkel φ entspricht der aktuellen Winkelablenkung im Punkt P und Δr der aktuellen seitlichen Ablenkung in Verlängerung von r und bezogen auf den Ausgangswert von $r_S + \Delta r_S$. Schließlich ist der Winkel α durch die vorstehend beschriebenen Parameter bestimmt.

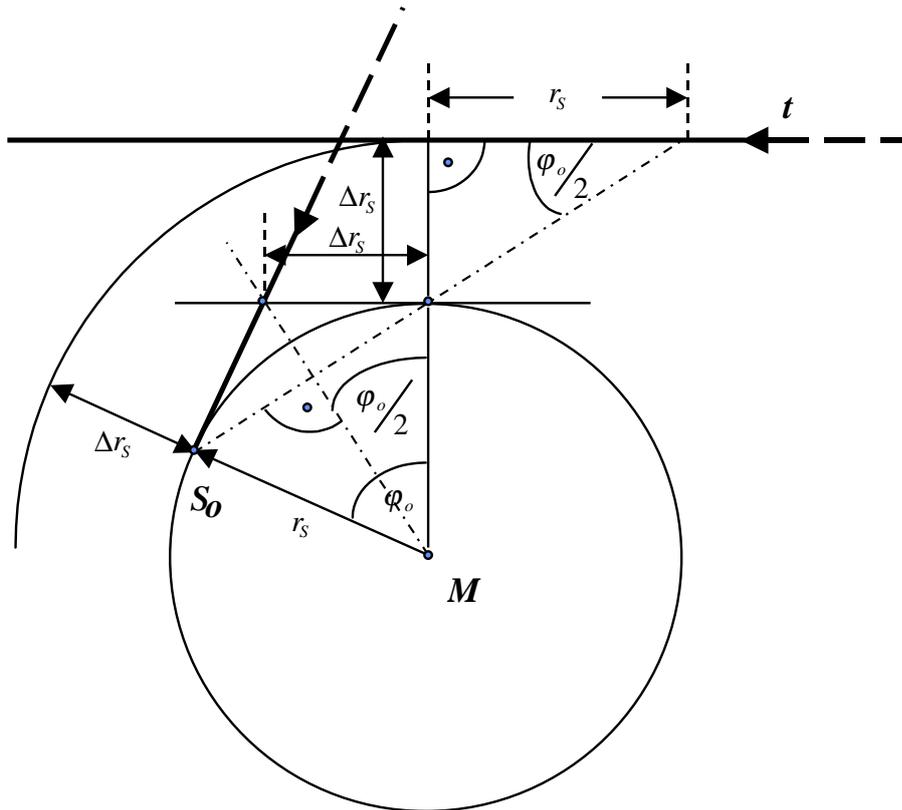


Abbildung 30: Lichtbahn, kürzester Abstand zu M

Die Parameter r_S , Δr_S und φ_0 kennzeichnen den Punkt S_0 , an dem das Licht den kürzesten Abstand zum Mittelpunkt M erreicht hat (siehe Abbildung 30). Der tangentielle Berührungspunkt S_0 ist durch die Beziehung: $R(r = r_S) = r_S$ definiert. Ein Lichtstrahl im Punkt P erfährt bei seiner Annäherung an M eine Änderung seiner Energieverdichtung, die mit einer auf R bezogenen Änderung der Kontraktion der Länge entsprechend

$$R \cdot \frac{d}{dr} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2} \right]$$

korrespondiert.

Dieser Änderung der Kontraktion entspricht die Verkürzung der differentiellen Strecke dR um das Maß

$$dR' = dR \cdot R \cdot \frac{d}{dR} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2} \right]. \tag{9.66}$$

Ersetzt man in Beziehung (9.50) die Variable r durch die Variable R nach Abbildung 29, so ergibt sich nach Umformung mit

$$r_q = 2 \cdot \frac{r_0^2 g_0}{c^2} \tag{9.67}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v_e}{c}\right)^2} = \sqrt[4]{1 - \frac{r_q}{R}}.$$

Eingesetzt in (9.66) führt dies zu der Form:

$$\frac{dR'}{R} = \left[\frac{d}{dR} \left(\sqrt[4]{1 - \frac{r_q}{R}} \right) \right] \cdot dR. \tag{9.68}$$

Mit $s = \frac{R}{r_q}$ und $dR = ds \cdot r_q$ kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{dR'}{R} &= \left[\frac{1}{r_q} \cdot \frac{d}{ds} \left(\sqrt[4]{1 - \frac{1}{s}} \right) \right] \cdot ds \cdot r_q = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{s} \right)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{s^2} \right) \cdot ds, \\ \frac{dR'}{R} &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(s-1)^3 \cdot s^5}} \cdot ds. \end{aligned} \quad (9.69)$$

In Abbildung 29 erkennen wir die Proportion

$$\frac{dr}{dR'} = \frac{r}{R} = \cos(\alpha + \varphi), \quad (9.70)$$

beziehungsweise umgeformt:

$$\frac{d\left(\frac{r}{r_S}\right)}{\frac{r}{r_S}} = \frac{dR'}{R}. \quad (9.71)$$

dr ist hierbei die differentielle seitliche Ablenkung, die durch die Tatsache verursacht wird, dass die Längenkontraktion um dR' sich allein auf die Komponente des Lichtstrahls in Richtung von R beschränkt. Die Richtung von R ist durch die Verbindung des aktuellen Punktes P mit dem Gravitationszentrum M bestimmt.

Aus (9.69) und (9.71) ergibt sich durch Integration die Beziehung:

$$\ln\left(\frac{r}{r_S}\right) = - \int_{\frac{r_S}{r_q}}^s \left[\frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{(s-1)^3 \cdot s^5}} \right] \cdot ds = g(s) + konst.; \quad (9.72)$$

$$r = r_S \cdot e^{g(s)+konst.}. \quad (9.73)$$

Für $s \rightarrow \infty$ gilt:

$$g(s) = 0$$

und

$$\ln\left(\frac{r_S + \Delta r_S}{r_S}\right) = 0 + konst.$$

Somit ist:

$$konst. = \ln\left(1 + \frac{\Delta r_S}{r_S}\right). \quad (9.74)$$

Gemäß Abbildung 30 ist Δr_S der maßgebende Wert der seitlichen Ablenkung für den Ausgangspunkt des Lichtstrahls, also für $s \rightarrow \infty$. Aus der gleichen Abbildung kann die geometrische Konstruktion abgelesen werden, die zur Beziehung

$$\frac{\Delta r_S}{r_S} = \tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \quad (9.75)$$

führt.

Unter dieser geometrischen Bedingung zwischen Δr_S , r_S und φ_0 ist $r_S + \Delta r_S$ der lotrechte Abstand von Punkt M gegenüber der Tangente t , wobei $\Delta r = \Delta r_S$ der größten seitlichen Ablenkung am Ausgangspunkt des Lichtstrahls entspricht. Diese seitliche Ablenkung Δr des jeweils geradlinig verlängerten Lichtstrahls ist am Punkt S_0 auf 0 zusammengeschrumpft. S_0 ist der Punkt des geringsten Abstandes des Lichtstrahls zum Mittelpunkt M . Dieser geringste Abstand, nämlich der zwischen Punkt S_0 und M , entspricht der Strecke r_S .

Analog Beziehung (9.75) kann ein variabler Winkel $\varphi' = \varphi'(r)$ errechnet werden, der für den hypothetischen Fall gilt, dass die rückwärts verlängerte Verbindung von S und P in Abbildung 29 dem Ausgangspunkt des Lichtstrahls entspräche.

Tatsächlich liegt - wie beschrieben - der Ausgangspunkt ja auf der Tangente t . Wenn dieser variable Winkel $\varphi'(r)$ insofern auch ein theoretisches Kunstprodukt darstellt und größer ist als der tatsächliche Winkel $\varphi = \varphi(r)$ des Lichtstrahls im Punkt P , kann er gleichwohl als geeignetes Hilfsmittel zur näherungsweise Berechnung von $\varphi(r)$ dienen, denn dessen exakte Berechnung folgt einem theoretischen Zusammenhang mit verschachtelten Integralen, die keine explizite Lösung erlauben.

In diesem Sinne ergibt sich für den beschriebenen hypothetischen Fall:

$$\frac{\Delta r}{r} = \tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right). \quad (9.76)$$

Dabei ist:

$$\Delta r = r_S + \Delta r_S - r.$$

Somit gilt für den echten Spezialfall:

$$\varphi_0 = 2 \cdot \arctan\left(\frac{\Delta r_S}{r_S}\right), \quad (9.77)$$

und für den hypothetischen, allgemeinen Fall:

$$\varphi'(r) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{r_S + \Delta r_S}{r} - 1\right). \quad (9.78)$$

Die empirisch gewonnene Näherung lautet schließlich:

$$\varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \left[\frac{\varphi'(r)}{\varphi_0}\right]^{1,5}. \quad (9.79)$$

Für die Konstante nach (9.74) ergibt sich mit (9.75):

$$\text{konst.} = \ln\left[1 + \tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right]. \quad (9.80)$$

Für den Punkt S_0 , der in Gegenüberstellung zum Ausgangspunkt (im Unendlichen) als Endpunkt (der theoretischen Betrachtung) angesprochen werden kann, gilt dann mit

$$s = s_0 = \frac{r_S}{r_q}, \quad r = r_S, \quad R = r_S,$$

entsprechend (9.72) und (9.80):

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{r_S}{r_S}\right) &= 0 = g(s_0) + \ln\left[1 + \tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right], \\ \varphi_0 &= 2 \cdot \arctan\left[e^{-g(s_0)} - 1\right]. \end{aligned} \quad (9.81)$$

Für große Werte von s mit $s \gg 1$ gilt mit hoher Genauigkeit:

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{1}{4} \int \sqrt[4]{\frac{1}{s^{3+5}}} \cdot ds = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{ds}{s^2}, \\ g(s) &= -\frac{1}{4s}. \end{aligned} \quad (9.82)$$

Weiterhin ist für $s_0 \gg 1$ nach der Reihenentwicklung:

$$e^{-g(s_0)} - 1 = e^{\frac{1}{4s_0}} - 1 \approx \frac{1}{4s_0}.$$

Außerdem gilt unter gleicher Voraussetzung:

$$\arctan\left(\frac{1}{4s_0}\right) \approx \frac{1}{4s_0}.$$

Mit diesen Näherungen, eingesetzt in (9.81), gilt schließlich:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2 \cdot s_0} \quad (s_0 \gg 1). \quad (9.83)$$

Mit

$$r_q = 2 \cdot \frac{r_0^2 \cdot g_0}{c^2}$$

nach (9.67) und

$$s_0 = \frac{r_S}{r_q} = \frac{r_S \cdot c^2}{2 \cdot r_0^2 \cdot g_0} \quad [R(s_0) = r_S]$$

gilt

$$\varphi_0 = \frac{r_0^2 \cdot g_0}{r_S \cdot c^2}. \quad (9.84)$$

Mit $r_S = r_0$ ist:

$$\varphi_0 = \frac{r_0 \cdot g_0}{c^2}. \quad (9.85)$$

Mit

$$g_0 = \frac{M_0 \cdot G}{r_0^2}$$

nach (9.57) ergibt sich:

$$\varphi_0 = \frac{M_0 \cdot G}{r_0 \cdot c^2} \cdot \left[s_0 = \frac{r_S \cdot c^2}{2 \cdot r_0^2 \cdot g_0} \gg 1, \varphi_0 \ll \frac{1}{2} \right] \quad (9.86)$$

Mit $r_S = r_0$ erhalten wir schließlich:

$$\varphi_0 = \frac{M_0 \cdot G}{r_0 \cdot c^2} \cdot \left[s_0 = \frac{c^2}{2 \cdot r_0 \cdot g_0} \gg 1, \varphi_0 \ll \frac{1}{2} \right] \quad (9.87)$$

Diese Beziehung ist mit dem Ergebnis identisch, das sich nach EINSTEINS Berechnungen unter Einbeziehung der allgemeinen Relativitätstheorie ergibt, wobei aber - wie später erörtert wird - die Wege zum gleichen Ergebnis stark voneinander abweichen.

Dieser theoretische Wert des Ablenkungswinkels wurde für den Sonderfall der Sonne und für Lichtstrahlen, die unmittelbar am Sonnenrand vorbeigehen, bekanntlich mehrfach unter Nutzung einer Sonnenfinsternis überprüft. Dass hierbei der vierfache Wert des Winkels φ_0 in Ansatz zu bringen ist, sei der Vollständigkeit halber erwähnt. Die obige Berechnung von φ_0 bezieht sich ja nur auf den halben Weg des Lichtstrahls, nämlich bis zum Punkt S_0 der größten Annäherung an das Gravitationszentrum. Anschließend durchläuft der Lichtstrahl eine spiegelbildlich verlaufende Bahn, die erneut eine Ablenkung um Winkel φ_0 bewirkt. Diese Verdoppelung des Ablenkungswinkels kennzeichnet also den einzelnen Lichtstrahl. Der Winkel,

unter dem zwei Objekte am Sternenhimmel bei dem angesprochenen Experiment betrachtet werden, besteht aber aus zwei solcher jeweils um $2\varphi_0$ abgelenkter Lichtstrahlen. Damit muss sich für die resultierende Ablenkung ein Winkel von $\delta = 4\varphi_0$ ergeben.

δ ist als Winkeldifferenz aufzufassen, wobei einmal die Sonne mit ihrer Gravitationswirkung im Fall der Sonnenfinsternis in den Beobachtungswinkel eingeschlossen ist, während im Referenzfall die Sonne eine Position mit (hinsichtlich Gravitationswirkung genügend) großen Abstand zu den beiden Lichtstrahlen einnimmt, die den Beobachtungswinkel bilden. Der rechnerische Wert von Winkel δ beträgt mit den maßgebenden Parametern

$$M_0 = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$

$$r_0 = 696.000.000 \text{ m}$$

der Sonne :

$$\delta = 1,75''.$$

Die Experimente bestätigen diesen Wert mit einer Toleranz von *ca.* $0,30''$. Dass die Messergebnisse dabei tendenziell über dem theoretischen Wert liegen, kann nicht verwundern, denn am Rand der Sonne kann nicht etwa von einem Vakuum ausgegangen werden. Diese unruhige und keinesfalls materiefreie Zone trägt das ihre dazu bei, dass „normale“ Brechung additiv mit im Spiel ist.

Die zu dem Winkel $\varphi_0 = \frac{\delta}{4}$ gehörige seitliche Ablenkung errechnet sich nach (9.75) zu:

$$\Delta r_S \approx 740 \text{ m}.$$

So bescheiden die Winkelablenkung auch erscheinen mag, so ist die seitliche Ablenkung Δr_S doch bereits eine ansehnliche Größe.

Die oben angesprochene Differenz zu EINSTEINS Theorie ist vor allem darin zu sehen, dass EINSTEIN von einer Überlagerung von Massenanziehungskraft und einer sogenannten *nicht-euklidischen* Struktur des Weltraums ausgeht. Diese Vorstellung ist prinzipiell unvereinbar mit der in diesem Aufsatz aufgezeigten Modellvorstellung.

Löst man sich von den speziellen Voraussetzungen, die im Sinne einer Näherung für die Ableitung der Beziehung (9.83) unterstellt wurden, so ergeben sich folgende allgemeingültige, exakte Beziehungen:

Aus (9.67) ergibt sich mit (9.57):

$$r_q = 2 \cdot \frac{M_0 \cdot G}{c^2}.$$

Daraus erhalten wir für einen vorgegebenen Wert von r_S :

$$s_0 = \frac{r_S}{r_q}$$

und nach (9.81):

$$\varphi_0 = 2 \cdot \arctan \left(e^{-g(s_0)} - 1 \right)$$

sowie aus (9.75) die seitliche Ablenkung:

$$\Delta r_S = r_S \cdot \tan \left(\frac{\varphi_0}{2} \right).$$

$r_S + \Delta r_S$ ist schließlich der lotrechte Abstand des (geradlinig verlängerten) Lichtstrahls in der Ausgangsposition zum Gravitationszentrum (Lot von M auf t in Abbildung 29 und 30). Der Rechengang geht also abhängig vom Parameter M_0 von der vorgegebenen Größe r_S aus, die nach Abbildung 30 dem Punkt der engsten Annäherung an das Gravitationszentrum entspricht.

Für den umgekehrten Rechengang, nämlich aus einem vorgegebenen Wert von $r_S + \Delta r_S$ alle anderen Abhängigen zu errechnen, ergibt sich keine explizite Form, weil das Verhältnis $\frac{\Delta r_S}{r_S}$ bei vorgegebenem Parameter M_0 nicht frei wählbar ist. Deshalb sind wir in diesem Fall auf die Iteration angewiesen, die gleichwohl die gewünschten Ergebnisse mit beliebiger Genauigkeit zu erbringen vermag.

Für die Diskussion aller möglichen Verläufe des Lichtstrahls definieren wir die Verhältnisse $q_S = \frac{r_S}{r_q}$ und $q_0 = \frac{r_0}{r_S}$.

Für $q_0 < 1$ geht der Lichtstrahl an dem kugelförmigen Körper mit Radius r_0 vorbei und erfährt lediglich eine seitliche Ablenkung.

$q_0 = 1$ korrespondiert mit dem Grenzfall der tangentialen Berührung des Körpers im Abstand r_0 zum Gravitationszentrum.

Bei $q_0 > 1$ trifft der Lichtstrahl auf dem Körper auf. Bei $R = r_0$ ist der physikalisch relevante Endpunkt des Kurvenverlaufs nach Beziehung (9.72) erreicht.

Für den Wert von q_S gilt die Identität:

$$q_S = s_0,$$

da für s_0 gilt:

$$r = r_S = R, \quad q_S = \frac{r_S}{r_q} = \frac{R}{r_q} = s_0.$$

Die Werte von $q_S \geq 1$ können (in erster Annäherung) mit jedem Wert von q_0 kombiniert werden. Der Grenzfall mit $q_S = 1$ ist dadurch ausgezeichnet, dass die Integralfunktion $g(s)$ nach (9.72) (wobei $konst. = 0$ gesetzt wird) für den Punkt $s = s_0 = 1$ ($r = r_S$, $R = r_S$) eine Singularität mit einem endlichen(!) Grenzwert aufweist. Mit mathematischem Computerprogramm ergibt sich dieser Grenzwert zu:

$$g(s_0 = 1) = -1.$$

Der für den physikalisch relevanten Kurvenverlauf maßgebende Grenzwert von q_S liegt jedoch nicht bei $q_S = s_0 = 1$, sondern bei $q_S = s_0 \approx 1,15$. Dies hat seine Ursache darin, dass die Funktion $\frac{e^{g(s)}}{s}$ bei $s \approx 1,15$ ein Maximum aufweist. D.h. aber, dass das Verhältnis $\frac{r}{R}$ zwischen $s = 1$ und $s \approx 1,15$ steigt. Aus Abbildung 30 ist aber erkennbar, dass am Punkt S_0 , der mit dem Parameter $s_0 = q_S$ korrespondiert, das Verhältnis

$$\frac{r}{R} = 1$$

betragen muss, und für jeden Wert:

$$\begin{aligned} s &> s_0 \\ \frac{r}{R} &< 1 \end{aligned}$$

sein muss. Deshalb ergibt sich als physikalisch relevanter Grenzwert:

$$s_0 \approx 1,15.$$

Unterhalb der Schwelle von $q_S < 1,15$ existiert kein Endpunkt S_0 der Lichtbahn im Sinne von Abbildung 30, an dem ein tangenciales Berühren des Kreises mit dem Radius:

$$r = r_S = R(r = r_S)$$

möglich wäre. D. h., es gilt:

$$R(r = r_S) > r_S \quad \text{für} \quad q_S < 1,15.$$

Damit ist auch kein fester Wert von r_S definierbar und Beziehung (9.72) verliert unter dieser Bedingung ihre Gültigkeit. Für die Grenzbedingung ergibt sich nach (9.81):

$$\varphi_0(s_0 \approx 1,15) \approx 52^\circ$$

und die seitliche Ablenkung nach (9.75) zu:

$$\Delta r_S \approx 0,49 \cdot r_S.$$

Schließlich ist die Kombination

$$q_S = 1,15 \quad \text{und} \quad q_S \cdot q_0 = \frac{r_0}{r_q} < 1,15$$

dadurch gekennzeichnet, dass der physikalisch relevante Endpunkt des Kurvenverlaufs nach Beziehung (9.72) bei $r = 1,15 \cdot r_q$ erreicht ist.

Um die Diskussion der Faktoren q_S und q_0 in ein anschauliches Diagramm umsetzen zu können, betrachten wir das Gravitationszentrum M nach Abbildung 29 als Koordinatenursprung und weisen jedem Punkt der Lichtbahn $P(x, y)$ die Koordinaten x und y zu.

Aus Abbildung 29 erkennen wir, dass gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \varphi) &= \frac{r(R)}{R}, \\ \sin \alpha &= \frac{x}{R}. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin \left[\arccos \left(\frac{r(R)}{R} \right) - \varphi(r) \right], \\ y &= \sqrt{R^2 - x^2}. \end{aligned}$$

$r(R)$ bestimmt sich nach (9.72) zu:

$$r(R) = r_S \cdot e^{-\int_{\frac{r_S}{r_q}}^{\frac{R}{r_q}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{(s-1)^3 \cdot s^5}} \cdot ds}$$

und $\varphi(r)$ nach (9.79).

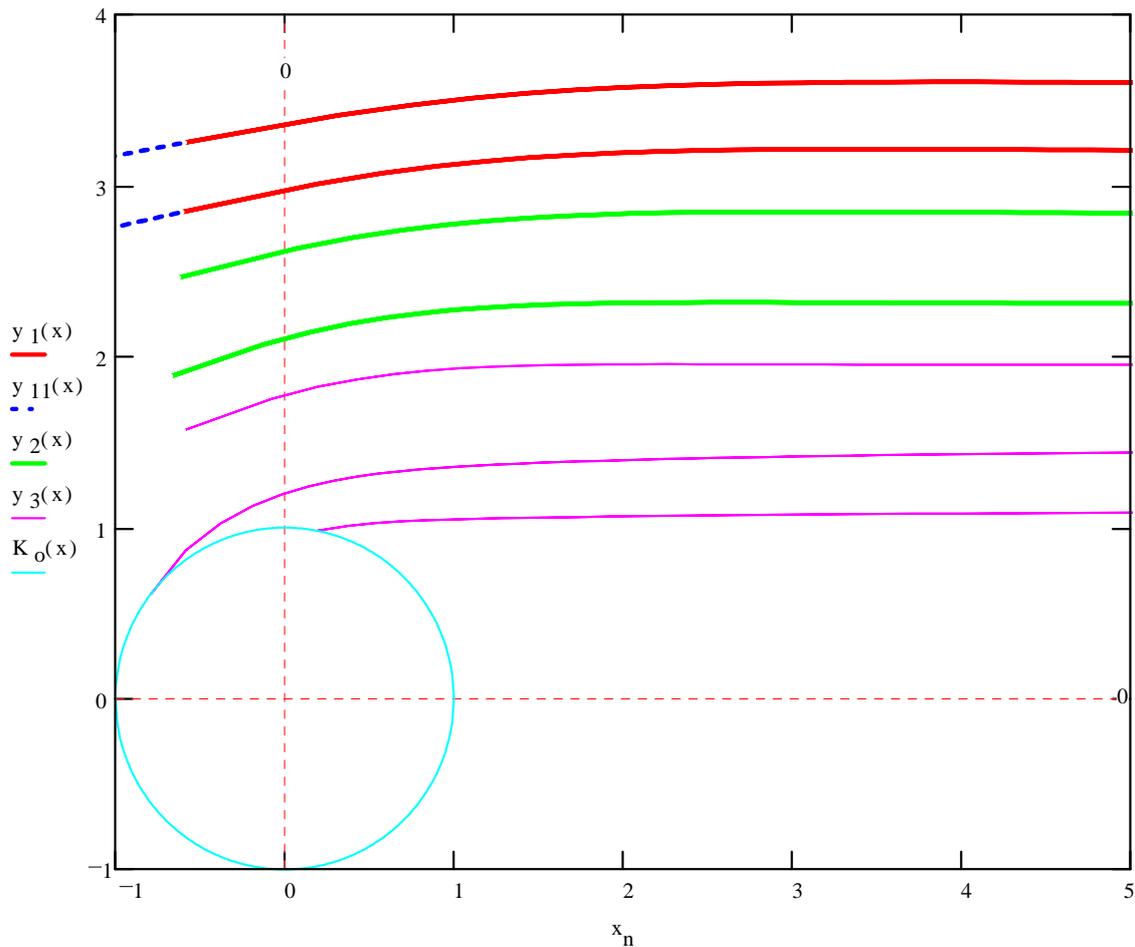


Abbildung 31: Lichtbahn im Gravitationsfeld

In Abbildung 31 sind abhängig vom Parameter r_S verschiedene Lichtbahnen dargestellt. Unterstellt ist für die (von oben) ersten 4 Kurven (Farben rot und grün) ein Gravitationsfeld für den Grenzfall

$$\frac{r_0}{r_q} = q_S \cdot q_0 = 1 = \frac{c^2}{2 \cdot r_0 \cdot g_0}.$$

Der hellblaue Kreis um den Koordinatenursprung entspricht im Sinne einer Normierung:

$$r_0 = r_q = 1.$$

Für die obersten beiden Kurven ist die gestrichelte Verlängerung über den Punkt engster Annäherung an das Gravitationszentrum angefügt. Bezogen auf diesen Punkt verläuft die gestrichelte Kurve spiegelbildlich.

Den untersten 3 Kurven (Farbe pink) ist ein Wert von: $r_q < 1$ unterlegt.

Für die den Kreis tangierende Kurve gilt: $r_q = \frac{1}{1,15}$.

$q_S = \frac{r_S}{r_q} \approx 1,15$ markiert, wie bereits ausgeführt, den Grenzwert der engsten Annäherung an das Gravitationszentrum, ohne dass Beziehung (9.72) ihre Gültigkeit verliert. Wenn diese Grenze mit $q_S < 1,15$ unterschritten wird, ist zwar Beziehung (9.72) nicht mehr für den Verlauf der Lichtbahn maßgebend; gleichwohl wird aber mit $q_S = s_0 = 1$ unter punktueller Betrachtung von (9.72) die eigentliche absolute Grenze markiert. Für diese absolute Grenze

ergibt sich mit $r_S = r_0$:

$$q_S = s_0 = 1 = \frac{r_S}{r_q} = \frac{r_0}{r_q} = \frac{c^2}{2 \cdot r_0 g_0}.$$

und damit die Grenzbedingung:

$$2 \cdot r_0 g_0 = c^2. \quad (9.88)$$

Dieser Grenzwert stimmt also mit dem Grenzwert für die Möglichkeit der Emission von Licht gegen die Gravitation nach Beziehung (9.56) überein. Unter den Grenzbedingungen nach (9.88) wird der Lichtstrahl also „eingefangen“ wie in einem Schwarzen Loch.

Diese absolute Grenze wird, wie Abbildung 31 zeigt, von einem Lichtstrahl mit den Parametern

$$q_S = s_0 \approx 1,15 = \frac{r_S}{r_q} = \frac{r_0}{r_q} \quad \text{mit} \quad r_q = \frac{r_0}{1,15} \quad \text{und} \quad 2 \cdot r_0 g_0 = c^2$$

erreicht.

Zusammenfassend weist also Beziehung (9.72) an der Stelle $s = s_0 = 1$ eine Singularität auf und Beziehung (9.88) stellt die Grenzbedingung für das sogenannte „Schwarze Loch“ dar.

Die Interpretation der Grenzbeziehung nach (9.88) ist darin zu finden, dass hier die Nahtstelle dreier Alternativen des physikalischen Prozesses der Fortpflanzung elektromagnetischer Strahlung vorliegt:

1. Reflexion: Das Licht bewegt sich bis an den Rand des Schwarzen Loches heran (punkt-förmige Berührung) und kann nach einer teilweisen „Umrundung“ des Gravitationszentrums unter einem Winkel zur Einfallsrichtung wieder „entfliehen“.
2. Einschwingen der Feinmasse des Lichts in eine Kreisbahn am Rande des Schwarzen Loches.
3. Eindringen der Feinmasse des Lichts in das Schwarze Loch mit Annäherung an das Gravitationszentrum.

Die sich aufdrängenden Analogien dieser „großen“ Schwarzen Löcher zu ihren „kleinen Verwandten“, den Materiebausteinen wie Proton und Elektron, lassen erwarten, dass auch die Gesetzmäßigkeiten innerhalb dieser beiden Typen von „Schwarzen Löchern“ gemeinsame Grundzüge aufweisen, die wie folgt skizziert werden können:

Orientiert am absoluten Zeitmaßstab und bezogen auf das Inertialsystem nimmt die Lichtgeschwindigkeit bei Annäherung an das Gravitationszentrum aufgrund der immer dichter werdenden Struktur abhängig vom Kontraktionsfaktor stetig ab. Für die Singularität, die die Grenzbedingung für das Schwarze Loch darstellt, tendiert die Lichtgeschwindigkeit nach 0 und die Energieverdichtung nach Unendlich. Diese Singularität ist die Nahtstelle zwischen Licht und Materie. Sie kennzeichnet den Übergang von Licht in Materie und umgekehrt. Alternativ kann sie aber auch als Umkehrpunkt einer Schwingung mit gesetzmäßiger Umformung von kinetischer in elastische Energie aufgefasst werden, wobei die elastische Energie der Gravitation entspricht. Die Umkehrung des Prozesses ist dabei das typische Merkmal der Reflexion. Es drängt sich auf, diese vorstehend für den Makrokosmos abgeleiteten Beziehungen sinngemäß auf den Mikrokosmos zu übertragen und

- Brechung
- Reflexion
- Absorption sowie
- Beugung

des Lichts entsprechend zu interpretieren. Dass dabei Brechung quasi in Anführungszeichen zu setzen ist, da die Lichtbahn auch im Mikrokosmos und damit in Stoffen wie Luft, Wasser oder Glas, keine echten Unstetigkeiten aufweist, sei der Vollständigkeit halber angemerkt. In Umformung von (9.88) ergibt sich

$$g_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{r_0}. \quad (9.89)$$

Wir dürfen bei der Interpretation dieser Beziehung nicht aus den Augen verlieren, dass sie für die **Feinmasse** des Lichts abgeleitet wurde. Wir erkennen die auffällige Verwandtschaft mit der für Materiebausteine, also Massenpunkte, gültigen Beziehung für die zentrifugale Beschleunigung

$$b = \frac{v^2}{r}, \quad (9.90)$$

wobei v für die Umfangsgeschwindigkeit und r für den Radius der Umlaufbahn steht. Um die zentrifugale Beschleunigung durch die Gravitation auf der Kreisbahn im Gleichgewicht zu halten, benötigt also Feinmasse nur die Hälfte der Gravitationswirkung, die ein Materiebaustein benötigt. Feinmasse und Materiebausteine sind zwar eng verwandt; dies gilt auch für die Gesetzmäßigkeiten, denen sie unterliegen. Aber es gibt nicht etwa Identität dieser Gesetzmäßigkeiten.

Der Grund für diesen Unterschied lässt sich anhand von Abbildung 27 nachvollziehen: Das für die Feinmasse-Strömung gewählte Schema des quadratischen Rahmens zeigt, dass immer nur die Hälfte der zirkulierenden Feinmasse sich in einer Position zur Kreisbahn des Materiebausteins befindet, die direkt der des Lichtstrahls auf seiner Kreisbahn entspricht. Die andere Hälfte ist quasi nur Ballast, der die den Gleichgewichtszustand kennzeichnende zentrifugale Kraft und Beschleunigung im Vergleich zum Lichtstrahl verdoppelt.

Würde man **irrtümlich** annehmen, dass auch auf die Feinmasse des Lichts die Beziehung (9.90) für die zentrifugale Beschleunigung des Materiebausteins anzuwenden ist, dann fehlt in Verkennung der echten Gesetzmäßigkeit nach (9.89) **vermeintlich** die Hälfte der Wirkung. Diesem Zwiespalt begegnete EINSTEIN dadurch, dass er dem Raum eine sogenannte *nichteuklidische* Struktur zuschrieb, die dann die andere Hälfte der Wirkung „besorgt“. Diese Gedankenkonstruktion ist aber im Lichte des Ergebnisses nach (9.89) inakzeptabel.

9.8.4 Coulomb-Wechselwirkungskraft und Elektronenspin

Interpretiert man die Ladungs-Feinmasse eines Elektrons wie Licht, das um die Rotationsachse des Elektrons zirkuliert, so ergibt sich bezogen auf den zur COMPTON-Wellenlänge λ_C gehörigen Radius r_C , der die rechnerische Nahtstelle zwischen dem Kern des Elektrons und seiner Ladungs-Feinmasse markiert, folgender Wert der Beschleunigung:

$$g_e = \frac{c^2}{2r_C} = 1,2 \cdot 10^{29} \frac{m}{s^2}.$$

(Von dieser rechnerischen Nahtstelle bei r_C ist der Kernradius $r_e = \pi r_C$ nach (7.62) zu unterscheiden.) Mit dieser (nach makrophysikalischen Maßstäben enormen) auf Radius r_C bezogenen wirksamen Beschleunigung korrespondiert die Kraft:

$$F_e = m_q \cdot g_e = \frac{m_q \cdot c^2}{2r_C} = \frac{m_q \cdot \lambda_C}{4\pi r_C^2} \cdot c^2.$$

D.h., es besteht Übereinstimmung mit der Beziehung für die COULOMB-Wechselwirkungskraft nach (7.88) für den Spezialfall des der COMPTON-Wellenlänge entsprechenden Radius. Dies

ist dahingehend zu interpretieren, dass das Elektron auf seine eigene Ladungs-Feinmasse eine Kraft ausübt, die der COULOMB-Wechselwirkungskraft entspricht. Der Rechenwert von F_e beträgt:

$$F_e = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{m}{s^2}.$$

Nach Abbildung 27 weist jeder differentielle Anteil der strömenden Feinmasse die gleiche überlagerte Geschwindigkeit v auf, gleichgültig ob er sich in Relation zu v in Richtung oder in Gegenrichtung bewegt oder senkrecht dazu. Erweitern wir das der Schematisierung dienende Bild des quadratischen Rahmens, gilt dies natürlich auch für jeden anderen Zwischenwert der Richtung der Geschwindigkeit bei der kreisförmig anzunehmenden Bewegung der Feinmasse. Ersetzen wir die überlagerte lineare Geschwindigkeit v durch eine rotierende Bewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω und Radius r , wobei gelten soll:

$$v = \omega \cdot r,$$

so haben wir die Gegebenheiten eines Elektrons bei seiner Umlaufbahn um den Atomkern vor uns. Da die innere Rotation der Feinmasse mit Lichtgeschwindigkeit durch die Überlagerung mit der das Elektron als Ganzes erfassenden äußeren Rotation natürlich nicht unterdrückt wird, unterliegt das Elektron einem zweifachen Einfluss hinsichtlich Drehimpuls und Massenänderung aufgrund der Überlagerung

- durch die Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$ sowie
- durch die Eigendrehung um die sich mit Winkelgeschwindigkeit ω bewegende Drehachse.

Dies entspricht der Überlagerung von

- Bahndrehimpuls und
- Eigendrehimpuls.

Der Eigendrehimpuls kann gegenüber dem Bahndrehimpuls mit positivem oder negativem Vorzeichen in Erscheinung treten. Nach Beziehung (7.109) in Relation zu (9.10) bildet sich im Bahndrehimpuls der innere Drehimpuls des Elektrons ab.

Zwischen Bahn- und Eigendrehimpuls, die an sich auf der gleichen Masse m_e und dem gleichen Drehimpuls L_n basieren, gibt es gleichwohl einen fundamentalen Unterschied. Während für die Berechnung des Bahndrehimpulses die „normalen“ Gesetze für ein Masseteilchen gelten, gilt für die rotierende Feinmasse innerhalb des Elektrons die für den Einfluss der Gravitation auf das Licht maßgebende Beziehung (9.89) sinngemäß, wobei c durch v zu ersetzen ist, und der entsprechende Einfluss auf den wirksamen Drehimpuls. Denn zwischen zentrifugaler Beschleunigung von Masseteilchen $\frac{v^2}{r}$ und Drehimpuls $mr v$ besteht Proportionalität bei gegebener Masse und Drehbewegung, die ihrerseits durch Radius und Winkelgeschwindigkeit bestimmt ist. Der Faktor $\frac{1}{2}$ in (9.89) kennzeichnet den entscheidenden Unterschied. Deshalb gilt für den als Elektronenspin bezeichneten Eigendrehimpuls:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot L_n.$$

S_n beträgt als Eigenschaft strömender Feinmasse also nur die Hälfte des Wertes des Bahndrehimpulses, der seinerseits als Eigenschaft eines Materiebausteines anzusehen ist.

Genauso wie auf ein- und derselben Umlaufbahn ein Lichtstrahl verglichen mit einem Materiebaustein nur die Hälfte der zentrifugalen Beschleunigung aufweist, beträgt der nach außen, in Überlagerung mit dem Bahndrehimpuls wirksame Drehimpuls des Elektrons in Form des Elektronenspins S_n nur die Hälfte seines inneren Drehimpulses L_i nach (9.10):

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot L_i.$$

An der Nahtstelle der Gesetzmäßigkeiten von strömender Feinmasse einerseits und Masseteilchen andererseits ergibt sich also das typische Verhältnis von 1 : 2 . Die innere Dynamik strömender Feinmasse ist „zweikanalig“, weil Elektropulse stets paarig auftreten. Mechanische Prozesse sind dagegen stets „einkanalig“.

9.9 Auswirkungen von Massenzuwachs und Längenkontraktion auf physikalische Gesetzmäßigkeiten

9.9.1 Elektrische Ladung

Aus Beziehung (7.43) ergibt sich die Form

$$Q_e = \sqrt{\frac{m_q}{m_e} \cdot \frac{h}{c}}.$$

Sowohl die Elektronenmasse m_e als auch die Ladungs-Feinmasse m_q als Untermenge von m_e unterliegen dem gleichen prozentualen Massenzuwachs abhängig von der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem. Damit ergibt sich keine Änderung des Quotienten $\frac{m_q}{m_e}$.

Weil aber auch der Quotient $\frac{h}{c}$ eine Konstante darstellt, bleibt zusammenfassend die Relativgeschwindigkeit v ohne Einfluss auf den Wert der elektrischen Ladung.

9.9.2 Coulomb-Wechselwirkungskraft

Die Beziehung

$$F = \frac{Q_e^2 \cdot c^2}{4\pi r^2}$$

erfährt wegen

$$r \rightarrow r' = r \cdot f(v)$$

abhängig vom Kontraktionsfaktor $f(v)$ eine Änderung auf den Wert

$$F' = \frac{F}{[f(v)]^2}.$$

Die für den inneren Zusammenhalt von Stoffen maßgebende Kraft pro Flächeneinheit

$$A \rightarrow A' = A \cdot [f(v)]^2$$

beträgt

$$\frac{F'}{A'} = \frac{F}{A} \cdot \frac{1}{[f(v)]^4}.$$

Demgegenüber steht eine Masse m pro Volumen V mit

$$m \rightarrow m' = \frac{m}{f(v)};$$

$$V \rightarrow V' = V \cdot [f(v)]^3;$$

$$\frac{m'}{V'} = \frac{m}{V} \cdot \frac{1}{[f(v)]^4}.$$

Der innere Zusammenhalt von Stoffen ist also durch ein von der Relativgeschwindigkeit v unabhängiges Verhältnis von Kraft pro Flächeneinheit zu Masse pro Volumeneinheit gekennzeichnet.

9.9.3 Gravitationsgesetz

$$F_g = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot G}{r^2}$$

Gehören m_1 und m_2 ein und demselben Inertialsystem an, so ergibt sich mit

$$m_{1(2)} \rightarrow m_{1(2)}' = \frac{m_{1(2)}}{f(v)},$$

$$r \rightarrow r' = r \cdot f(v)$$

rein rechnerisch eine Abhängigkeit vom Kontraktionsfaktor entsprechend:

$$F_g' = \frac{F_g}{[f(v)]^4}.$$

Der auffallende Unterschied zwischen COULOMB-Wechselwirkungskraft und Gravitationsgesetz trotz ihrer ins Auge springenden Verwandtschaft löst Zweifel aus, ob die Gravitationskonstante eine echte Konstante ist. Eine Abhängigkeit der Gravitationskonstante G vom Quadrat des Kontraktionsfaktors $f(v)$ ist anzunehmen. Auf die Ausführungen zu Beziehung (9.58) wird an dieser Stelle nochmals Bezug genommen.

Bei dem für

$$G = 6,672 \dots \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

aufgrund von Messungen angegebenen Genauigkeitsgrad entspricht ungefähr erst ein Sprung des Kontraktionsfaktors von z. B.

$$f(v=0) \quad \text{auf} \quad f(v=0,01 \cdot c)$$

einer Änderung von G um den Zahlenwert 1 auf der 3. Stelle hinter dem Komma, wenn eine Abhängigkeit vom Quadrat von $f(v)$ angenommen wird. Dieser weite Geschwindigkeitsbereich von 0 bis immerhin 1% der Lichtgeschwindigkeit ist für die Gravitationskonstante (beziehungsweise die verschiedenen Methoden für ihre Ermittlung) also in Bedacht zu nehmen.

9.9.4 Atomare Strukturen

Der Radius der Elektronenbahn r_n nach (7.104) ist abhängig vom Kontraktionsfaktor $f(v)$:

$$r_n \rightarrow r_n' = r_n \cdot f(v).$$

Die Umlaufgeschwindigkeit v_n des Elektrons ist dagegen nach (7.106) **unabhängig** vom Kontraktionsfaktor $f(v)$, wofür die Beziehung (9.22)

$$c = c_a = \text{konst.}$$

maßgebend ist. Somit gilt für Kreisfrequenz ω_n und Periodendauer T_n

$$\omega_n = \frac{v_n}{r_n} \rightarrow \omega_n' = \frac{v_n}{r_n'} = \frac{\omega_n}{f(v)};$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \rightarrow T_n' = \frac{2\pi}{\omega_n'} = T_n \cdot f(v).$$

Damit erkennen wir, dass atomare Strukturen die natürlichen Voraussetzungen besitzen

- für ein Längennormal der **relativen** Länge und
- für ein Zeitnormal der **relativen** Zeit.

Die vorstehenden Überlegungen sind zwar anhand des einfachsten Atoms, des Wasserstoffatoms dargelegt, gelten aber prinzipiell auch für alle anderen Atome.

Die Definition der Basiseinheit 1 Meter mit Hilfe von Atomen des Nuklids ^{86}Kr und der Zeit mit dem Cäsium-Normal $CS\ 1$ sind die entsprechenden Anwendungen.

9.9.5 Fadenpendel

Für das Fadenpendel ergibt sich die Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dabei ist l die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung:

$$g = \frac{m_E \cdot G}{r_E^2},$$

wobei m_E die Masse der Erde und r_E den maßgebenden Erdradius darstellt. Damit ergibt sich:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cdot r_E^2}{m_E \cdot G}}.$$

Mit

$$\begin{aligned} l' &= l \cdot f(v), \\ r_E' &= r_E \cdot f(v) \quad \text{und} \\ m_E' &= m_E \cdot \frac{1}{f(v)} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$T' = T \cdot [f(v)]^2.$$

Das heißt, die mit dem Fadenpendel gemessene Zeit wäre vom Quadrat des Kontraktionsfaktors abhängig. Allerdings hat dies (erneut) zur Voraussetzung, dass die Gravitationskonstante tatsächlich eine echte Konstante ist.

Unterstellt man jedoch die Abhängigkeit der Gravitationskonstante G von der 2. Potenz des Kontraktionsfaktors, wie zu (9.58) ausgeführt, wird mit dem Fadenpendel **relative** Zeit gemessen.

9.9.6 3. Kepler-Gesetz

Nach dem 3. KEPLER-Gesetz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{a^3} &= k, \\ k &= \frac{4\pi^2}{M \cdot G}, \end{aligned}$$

wobei T die Umlaufzeit, a die große Halbachse der Bahnellipse und M die Masse des Zentralgestirns darstellt.

Daraus errechnet sich:

$$T = \sqrt{a^3 \cdot k} = 2\pi\sqrt{\frac{a \cdot a^2}{M \cdot G}}.$$

Mit der idealisierten konstanten Beschleunigung des Zentralgestirns

$$g(a) = \frac{M \cdot G}{a^2}$$

ergibt sich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g(a)}}.$$

Es besteht also Analogie zu der Beziehung für das Fadenpendel. Die für das Fadenpendel gemachten Aussagen gelten deshalb in gleicher Weise für die Himmelsmechanik.

9.10 Relativitätstheorie Einsteins - Vergleich, Diskussion, Kritik

9.10.1 Lorentz - Transformation nach Einstein

EINSTEIN [3] hat für zwei Inertialsysteme S und S' (S mit den Koordinaten x, y, z sowie der Zeit t und S' mit den Koordinaten x', y', z' sowie der Zeit t') Transformationsgleichungen für die Voraussetzung angegeben, dass x -Achse und x' -Achse aufeinander mit Relativgeschwindigkeit v „gleiten“. Inertialsysteme S' bewegt sich also gegenüber dem Bezugssystem S mit Relativgeschwindigkeit v , wobei $v = \frac{dx}{dt}$ auf den Parametern des Bezugssystems S basiert, womit EINSTEINS Angaben vervollständigt werden.

Lorentz - Transformation:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (9.91)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.92)$$

Für die beiden restlichen Koordinaten des Raumes soll gelten :

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Die Gleichungen (9.91) und (9.92) auf der linken Seite verknüpfen Wege und Zeiten zweier korrespondierender Inertialsysteme. Ihre Übereinstimmung setzt die Berücksichtigung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c voraus, und zwar in Form der Grundbeziehung:

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c. \quad (9.93)$$

Auf der Basis dieser Grundbeziehung ergeben sich für x' und t' die gleichwertigen Beziehungen:

$$x' = \frac{x(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x'(1 + \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.94)$$

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t'(1 + \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.95)$$

Hinsichtlich der Gleichungen für x und t auf der rechten Seite von (9.91) und (9.92) gilt das vorstehend für x' und t' Ausgeführte analog, wie in (9.94) und (9.95) dargestellt. Aus der Darstellung in (9.94) [oder (9.95)] erkennt man nach Umstellung, dass die Gleichung auf der rechten Seite keine eigenständige physikalische Aussage enthält, sondern lediglich die Umkehrfunktion der linken Gleichung darstellt. Diese Umkehrfunktion ist besonders einfacher Natur, weil lediglich von dem zu x beziehungsweise x' gehörigen Proportionalitätsfaktor der Kehrwert zu bilden ist.

Damit erkennen wir die physikalische und mathematische Identität der beiden Gleichungen auf linker und rechter Seite von (9.94) beziehungsweise (9.95). Diese verknappte Identität innerhalb der LORENTZ-Transformation bedeutet zum einen, dass die Aufspaltung in Gleichungspaare auf linker und rechter Seite nur der Verwirrung Vorschub leistet und der Verschleierung der Identität. Weitere Konsequenz ist die völlige Übereinstimmung mit der Gesetzmäßigkeit

der alternativen Interpretation als Kontraktion (Ausgangswert) oder Dehnung (Kehrwert), wie sie aus den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen nach dem Additionstheorem hervorgehen.

Fundamentale Konsequenz dieser Identität ist die Erkenntnis, dass es zwischen zwei Inertialsystemen niemals Gleichberechtigung geben kann, so wie prinzipiell für alle Außenbeziehungen von Inertialsystemen Gleichberechtigung ausgeschlossen ist. Dem Inertialsystem, dem durch den Rechenansatz die Rolle des kontrahierten Systems zugewiesen wird, steht zwingend der Partner gegenüber, der relativ zum kontrahierten System gedehnt ist. Für beide Betrachtungsweisen ist die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Systemen nur an einem System, nämlich dem **nicht** kontrahierten System orientiert und am Gang seiner Uhr, denn beide Betrachtungsweisen liegt eine identische physikalische Gesetzmäßigkeit zugrunde.

Zusammenfassend lässt sich die LORENTZ-Transformation mit

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c$$

auf nur eine Beziehung reduzieren:

$$\frac{x'}{x} = \frac{t'}{t} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} \quad (9.96)$$

Die LORENTZ-Transformation setzt eine Raum-Zeit-Koinzidenz mit

$$x_0 = x_0' = 0, \quad t_0 = t_0' = 0$$

voraus, bei der sich der Koordinatenursprung von S mit dem von S' deckt. In der wissenschaftlichen Literatur wird ein Gedankenexperiment angegeben, das eine Lichtausbreitung im Raum mit der LORENTZ-Transformation in Verbindung bringen soll. Danach soll im Moment der Raum-Zeit-Koinzidenz, wenn sich also der Koordinatenursprung von S mit dem von S' deckt, ein Lichtblitz ausgesendet werden, der sich kugelförmig ausbreitet. Aus Sicht des Inertialsystems S errechnet sich für den Radius der Kugeloberfläche in einfacher Weise:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ct \\ x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \end{aligned} \quad (9.97)$$

Und schon hier ist nachdrücklich darauf hinzuweisen, dass es keinen Sinn macht, den Parameter x gleichzeitig sowohl in der LORENTZ-Transformation in Ansatz zu bringen wie auch in Beziehung (9.97) für die Kugelkoordinaten. Der Grund ist einfach: Aus der Grundbeziehung (9.93) ergibt sich

$$x = ct, \quad x^2 = c^2 t^2.$$

Eingesetzt in (9.97) bleibt nach Kürzen nur der triviale Rest

$$y^2 + z^2 = 0.$$

Damit errechnet sich also lediglich für den Sonderfall, dass bei einem Lichtstrahl, der in die x - beziehungsweise x' -achse fällt, die Resultierende $y^2 + z^2$ senkrecht dazu, zu Null werden muss.

Völlig fehlgeleitet ist es unter diesen Voraussetzungen eines trivialen Sonderfalles, von Bezugssystem S mit den Koordinaten x , y , z sowie der Zeit t auf das kontrahierte Inertialsystem

S' mit den Koordinaten x' , y' , z' sowie der Zeit t' umzurechnen. Es ergibt sich der analoge Sonderfall ohne allgemeingültige Aussage:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = ct'$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$x'^2 = c^2 t'^2$$

$$y'^2 + z'^2 = 0.$$

Aber selbst wenn die Gleichungen von LORENTZ-Transformation und Kugeloberfläche ordnungsgemäß auseinander gehalten werden, also berücksichtigt wird, dass die Parameter x und x' nicht wechselseitig zwischen LORENTZ-Transformation und Kugelgleichung als identische Größen übertragen werden können, bleibt ein weiteres Hindernis in Form der in der kompletten LORENTZ-Transformation vorgegebenen Identität von

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Die identischen Parameter $y' = y$, $z' = z$ können schlechterdings nicht gleichzeitig in zwei Kugelgleichungen mit unterschiedlichen Radien erscheinen:

$$r = ct \neq r' = ct'.$$

9.10.2 Hintergrund der Lorentz - Transformation

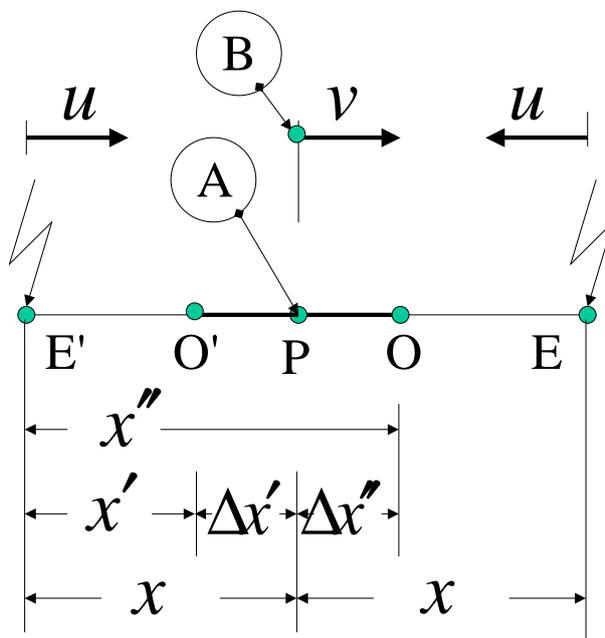


Abbildung 32: LORENTZ-Transformation

Um in die Diskussion des physikalischen Hintergrundes der LORENTZ-Transformation einzusteigen, bedienen wir uns zunächst in Anlehnung an die Methodik EINSTEINS für deren Veranschaulichung der Darstellung in Abbildung 32. A steht an der geraden Straße am Punkt P, auf der B mit konstanter Geschwindigkeit v fährt. Zu dem Zeitpunkt, da B an A vorbeifährt, also den Punkt P passiert, schlägt links (bei Punkt E') und rechts (bei Punkt E) in einem gleichen Abstand x ein Blitz ein. Die zugehörigen optischen Informationen (Blitz) beider Ereignisse werden von A als gleichzeitig empfunden. In entsprechendem zeitlichen Abstand treffen aber auch die akustischen Informationen (Donner) gleichzeitig ein.

Für B dagegen treffen sowohl die optischen wie auch danach die akustischen Informationen in entsprechendem zeitlichen Abstand ein. B weiß, dass sowohl das Licht wie auch der Schall sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Aufgrund seiner

physikalischen Kenntnisse weiß er, dass es zur Beurteilung der Gleichzeitigkeit beider Blitzschläge, einer Messung der zeitlichen Abstände des Eintreffens von Licht beziehungsweise Schall bei ihm bedarf, und entsprechender rechnerischer Berücksichtigung. B weiß auch, dass

Gleichzeitigkeit subjektiver Natur ist und sowohl vom Abstand wie auch von der Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Ort des Ereignisses sowie der Geschwindigkeit der Informationsübermittlung abhängt.

O' soll der Ort sein, an dem der sich mit Geschwindigkeit v bewegende B beim gleichzeitigen Einschlagen des Blitzes in E' und E befinden muss, wenn er später am Punkt P den gleichzeitigen Empfang der von E' und E ausgegangenen Information gemeinsam mit A erfahren soll. Die Zeit t , die er zum Überwinden der Strecke von O' nach P mit Geschwindigkeit v benötigt, ist identisch mit der Zeit $t = \frac{x}{u}$ für die Informationsübermittlung mit Geschwindigkeit u von E beziehungsweise E' nach P . Mathematisch folgen diese physikalischen Gegebenheiten der nachfolgenden Gleichung (9.98), deren Parameter Abbildung 32 zu entnehmen sind. Alle weiteren Ableitungen bis (9.106) ergeben sich unmittelbar aus dieser Ausgangsbeziehung und sind im Kontext mit Abbildung 32 veranschaulicht. x' mit der zugehörigen Geschwindigkeit $u - v$ korrespondiert mit Punkt O' und x'' mit der zugehörigen Geschwindigkeit $u + v$ korrespondiert mit Punkt O . Bis Gleichung (9.106) wird dabei von einer Informationsübermittlung durch ein körperliches Medium mit Übertragungsgeschwindigkeit u ausgegangen, also konkret: der des Schalles im Luftraum als Medium.

Die Informationsübermittlung mit Licht unterscheidet sich nun aber von der durch Schall nicht nur durch eine wesentlich höhere Informations- oder Ausbreitungsgeschwindigkeit, sondern auch hinsichtlich der Abhängigkeit von einem Medium der Ausbreitung. Schall bedarf des Luftraums als Medium (ohne Medium kein Schall), Licht dagegen breitet sich im Freiraum ohne jede Abhängigkeit von einem Medium aus. (Der geringe Einfluss der Luft ist für unsere Überlegung ohne Belang.) Alle historischen Bemühungen, im Freiraum ein irgendwie geartetes Medium für die Lichtausbreitung zu entdecken, waren vergeblich, oder positiv ausgedrückt: Dass der Freiraum **das** ist, was in seiner Bezeichnung schon anklingt, nämlich frei von jedem denkbaren Medium, ist physikalisch unstrittig. Licht breitet sich im Freiraum autark mit immer gleicher Geschwindigkeit aus. Welche Erfahrungen physikalische Experimente zur Messung dieser konstanten Lichtgeschwindigkeit auf der Basis von Inertialsystemen mit gegenseitiger Relativgeschwindigkeit erbringen, darf zunächst noch zurückgestellt bleiben.

Dieser unabhängig von der unterschiedlichen Höhe der Ausbreitungsgeschwindigkeit existierende signifikante methodische Unterschied bei der Ausbreitung von Licht verglichen mit Schall, muss natürlich auch seinen Niederschlag im mathematischen Ansatz finden. Deshalb folgen die für den Informationsträger „Licht“ entsprechend modifizierten Beziehungen nach der Kennzeichnung $u \rightarrow c$, also Übergang der Informationsgeschwindigkeit u zur Lichtgeschwindigkeit c . Dabei ist in der Darstellung Wert darauf gelegt, die physikalischen Gesetzmäßigkeiten abhängig von der Informationsgeschwindigkeit von Schall, also u , und von Licht, also c , direkt vergleichen zu können, und zwar sowohl Verwandtschaft wie Unterschiede. Die mediumgebundene Informationsübertragung mit Geschwindigkeit u erfordert bei Verknüpfung mit v rein arithmetische Gesetzmäßigkeit bei Addition und Subtraktion. v als Fahrgeschwindigkeit von B auf dem Medium „Straße“ hat ja auch vergleichbaren physikalischen Charakter. So ist der arithmetische Mittelwert von $u + v$ und $u - v$ trivialerweise identisch mit u und der arithmetische Mittelwert von x' und x'' identisch mit x .

Unter den Bedingungen des Lichtes zur Informationsübermittlung ist das arithmetische Regime durch das geometrische Regime zu ersetzen. So tritt in (9.110) an die Stelle des arithmetischen Mittels von $u + v$ und $u - v$ das geometrische Mittel von $c + v$ und $c - v$. x ist mit gleicher Konsequenz jetzt identisch mit dem geometrischen Mittel von x' und x'' .

Für sehr kleine Werte von v gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c nähern sich die Ergebnisse für das geometrische Regime an die Ergebnisse des arithmetischen Regimes an. Unbeschadet dessen interessiert in der Folge aber gerade das mit der Lichtausbreitung verbundene Spezifische.

$$x' = x - vt \qquad x'' = x + vt \qquad t = \frac{x}{u} \qquad (9.98)$$

$$x' = x \left(1 - \frac{v}{u}\right) \qquad x'' = x \left(1 + \frac{v}{u}\right) \qquad (9.99)$$

$$\Delta x' = x - x' = \Delta x'' = x'' - x = \Delta x = x \frac{v}{u} = vt \qquad (9.100)$$

$$x - \Delta x = x' = x \left(1 - \frac{v}{u}\right) \qquad (9.101)$$

$$x + \Delta x = x'' = x \left(1 + \frac{v}{u}\right) \qquad (9.102)$$

$$\frac{x'}{u-v} = \frac{x - \Delta x}{u-v} = \frac{x}{u} = \frac{x + \Delta x}{u+v} = \frac{x''}{u+v} \qquad (9.103)$$

$$\frac{x''}{x} = \frac{u+v}{u} = 1 + \frac{v}{u} \qquad (9.104)$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{u}{u-v} = \frac{1}{1 - \frac{v}{u}} \qquad (9.105)$$

$$\frac{x''}{x} \neq \frac{x}{x'} \qquad x = \frac{x' + x''}{2} \qquad (9.106)$$

$u \rightarrow c$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x'' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{x}{c} \qquad (9.107)$$

$$x' = x \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x'' = x \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (9.108)$$

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x - x' = x \left(1 - \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) \\ &\neq \Delta x'' = x'' - x = x \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \end{aligned} \qquad (9.109)$$

$$\frac{x'}{c-v} = \frac{x}{\sqrt{(c-v)(c+v)}} = \frac{x''}{c+v} \qquad (9.110)$$

$$\frac{x''}{x} = \frac{c+v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \qquad (9.111)$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{c-v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} \qquad (9.112)$$

$$\frac{x''}{x} = \frac{x}{x'} \qquad x = \sqrt{x'x''} \qquad (9.113)$$

Die physikalische Aussage der Gleichung (9.112) kann wie folgt zusammengefasst werden: Mit dieser Gleichung wird ein durch Parameter x definierter Punkt eines Körpers in Inertialsystem S (Im Beispiel „ruht“ A in S .) in den korrespondierenden, durch Parameter x' definierten Körperpunkt innerhalb des relativ zu ihm bewegten Inertialsystems S' (Im Beispiel „ruht“ B in S' .) transformiert. Die direkte Korrespondenz von x'' mit x' geht aus (9.110) bis (9.113) hervor. Damit ist der physikalische Hintergrund der LORENTZ - Transformation ausgeleuchtet.

Die verschiedenen Varianten der Darstellung entsprechen den Beziehungen (9.91) - (9.96) und stehen mit der vorstehenden Ableitung in Einklang.

Zur Darstellung der Kontraktion, der ein Stab in einem Inertialsystem unterliegt, das sich relativ zu einem Bezugssystem bewegt, gehen wir von der Gleichung auf der rechten Seite von (9.94) aus. x auf der linken Gleichungsseite ist der Parameter des unkontrahierten Bezugssystems S . Addieren wir zu x die Länge L eines Stabes, muss sich dessen Kontraktion auf das Maß L' im kontrahierten Inertialsystem S' auf der rechten Gleichungsseite abbilden. Im Zähler des Quotienten ist der Parameter x' des kontrahierten Inertialsystems S' mit dem Klammerausdruck $(1 + \frac{v}{c})$ multipliziert, wobei sich hinter dem Teilterm $\frac{x'v}{c} = t'v$ die Zeitabhängigkeit verbirgt. Der Stab L im Bezugssystem S muss aber zu ein und demselben Zeitpunkt, also zeitunabhängig in seiner auf L' kontrahierten Form abgebildet werden. Deshalb ist L' ohne Zeitabhängigkeit zu $x'(1 + \frac{v}{c})$ zu addieren. Damit ergibt sich zusammenfassend:

$$x + L = \frac{x'(1 + \frac{v}{c}) + L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.114)$$

und nach Differenzbildung mit der Ausgangsbeziehung auf der rechten Seite von (9.94):

$$\frac{L'}{L} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (9.115)$$

In analoger Weise ergibt sich mit der linken Gleichung von (9.94)

$$x' + L = \frac{x(1 - \frac{v}{c}) + L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.116)$$

das gleiche Ergebnis von (9.115). Dies ist allein deshalb folgerichtig, da (9.116), umgeformt mit Hilfe von (9.96), der Beziehung (9.114) mit der nachstehend dargestellten Modifikation entspricht.

$$x \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} + L = \frac{x' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} (1 - \frac{v}{c}) + L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x + L \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{x'(1 + \frac{v}{c}) + L' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Der für L und L' identische multiplikative Faktor, auf den sich die Modifikation gegenüber (9.114) beschränkt, führt schließlich zum identischen Ergebnis nach (9.115) für ihre Proportion.

Zu betonen ist, dass linke und rechte Gleichung von (9.94) einer gemeinsamen Wurzel entstammen und einer eindeutigen Zuordnung der Parameter zum unkontrahierten Bezugssystem (Inertialsystem S , Parameter x) beziehungsweise zum kontrahiertem Partner (Inertialsystem S' , Parameter x') unterliegen. Fehlerhaft wäre, einer Ambivalenz von linker und rechter Gleichung im Sinne von Gleichberechtigung zu unterstellen, denn die Rolle von Bezugssystem und kontrahiertem Inertialsystem ist in der LORENTZ-Transformation nicht frei zu wählen. Aus Gleichung (9.115) ergibt sich, dass zu ein und demselben Zeitpunkt korrespondierende Wegabschnitte (im Beispiel die Stablänge L) in den beiden Inertialsystemen S und S' nicht übereinstimmen. In S ergibt sich im Beispiel die Stablänge L , im kontrahierten System S'

die kontrahierte Länge L' . Ein Beobachter in S erkennt, dass ein Stab, der in seinem Inertialsystem die Länge L hat, im korrespondierenden Inertialsystem S' durch Kontraktion die Länge L' aufweist. Umgekehrt erkennt ein Beobachter in S' , dass ein Stab, der in seinem Inertialsystem die Länge L' hat, im korrespondierenden Inertialsystem S durch Dehnung die Länge L aufweist.

In analoger Weise ergibt sich, dass an ein und demselben Ortpunkt korrespondierende Zeitabschnitte in den beiden Inertialsystemen S und S' nicht übereinstimmen. In S ergibt sich zum Beispiel das Intervall T , im kontrahierten System S' das kontrahierte Intervall T' . Ein Beobachter in S erkennt, dass ein Intervall, das in seinem Inertialsystem die Dauer T hat, im korrespondierenden Inertialsystem S' durch Kontraktion die Dauer T' aufweist. Umgekehrt erkennt ein Beobachter in S' , dass ein Intervall, das in seinem Inertialsystem die Dauer T' hat, im korrespondierenden Inertialsystem S durch Dehnung die Dauer T aufweist.

Die vorstehend angegebene Berechnung in (9.114) bis (9.116) unterscheidet sich grundsätzlich von der gängigen Methode in der wissenschaftlichen Literatur. Selbstverständlich ist es möglich, wie in (9.114) angegeben, aus der Beziehung (9.94) durch räumliche Parallelverschiebung eine abgeleitete Beziehung, im Beispiel: (9.114) zu gewinnen. Dann gilt im Beispiel: (9.94) bildet den Stabanfang ab und (9.114) das Stabende. Dazu ist es aber weder nötig noch zulässig, die prinzipielle Raum-/Zeitkoinzidenz von (9.94) sowie die Grundbeziehung (9.93) zu verletzen. Werden dagegen isolierte räumliche beziehungsweise zeitliche Koinzidenzen, wie in der wissenschaftlichen Literatur üblich, künstlich gesetzt, ergeben sich zwar rein formal Rechenergebnisse für die Kontraktion des Stabes, aber allein in der wahlweisen Zuordnung der Kontraktion der Längen zu linker oder rechter Gleichung von (9.94), also zu Inertialsystem S oder S' , zeigt die Willkürlichkeit und damit Fehlerhaftigkeit diese Verfahrens.

9.10.3 Additionstheorem

Additionstheorem und LORENTZ - Transformation stehen in direktem Zusammenhang. Einerseits haben die Ableitungen zum Additionstheorem die LORENTZ - Transformation zur Basis. Andererseits kann die LORENTZ - Transformation als Spezialfall des Additionstheorems interpretiert werden. Alle physikalischen Eigenschaften von Additionstheorem und LORENTZ - Transformation gelten prinzipiell für beide gemeinsam. Das gilt insbesondere für die Natur von Bezugssystemen und die Zuordnung von Kontraktion und Dehnung.

Alle Überlegungen zum Additionstheorem haben die Abhängigkeiten zwischen **drei** Inertialsystemen zum Gegenstand. Zur Veranschaulichung des Additionstheorems wird als Beispiel ein Schiff gewählt, das sich vom Strand mit Relativgeschwindigkeit v_1 entfernt. Ein Passagier an Bord des Schiffes soll sich dabei in gleicher Richtung wie v_1 mit Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem Schiff bewegen und erreicht damit eine Relativgeschwindigkeit v_2 gegenüber dem Strand. Gegenstand des Additionstheorems sind die mathematischen Beziehungen zwischen den drei Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v unter Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie in Form der LORENTZ-Transformation. Die LORENTZ-Transformation wird angewandt auf die Beziehungen zwischen Inertialsystem 1 (Schiff) und Inertialsystem 2 (Passagier).

Zum Verständnis der nachstehend angegebenen Beziehungen wird auf ein charakteristisches Merkmal hingewiesen. Die Geschwindigkeit eines Körpers (Beispiel: v_1 des Schiffes) und seines Inertialsystems, in dem er ruht (also im Beispiel: Inertialsystem 1), bestimmt sich in Relation zum Bezugssystem (also im Beispiel: gegenüber dem Strand). Maßgebend für die Definition des Messwertes von v_1 ist aber der Kontraktionsfaktor $f(v_1)$, der in dem Inertialsystem herrscht, das die Geschwindigkeit v_1 aufweist (also im Beispiel: das Inertialsystem 1). Für den Messwert von v_1 und den daraus ermittelten Kontraktionsfaktor $f(v_1)$ ist dann also der Gang der Uhr in Inertialsystem 1 maßgebend, nicht etwa der Gang der Uhr im Inertialsystem

„Strand“. Diese Rollenverteilung zwischen Bezugssystem einerseits und dem Inertialsystem, dessen Geschwindigkeit betrachtet wird, andererseits, ist das markante Merkmal des Additionstheorems. Bei allen Betrachtungen darf dieses Merkmal nicht aus den Augen verloren werden.

In diesem Merkmal ist gleichzeitig ein zu Missverständnissen Anlass gebender Konflikt angelegt, der auf EINSTEIN [3] und dessen Niederschlag in der wissenschaftlichen Literatur zurückgeht. Danach basiert in der LORENTZ-Transformation die Relativgeschwindigkeit v auf den Parametern des unkontrahierten Bezugssystems und dem Gang seiner Uhr. Im Additionstheorem wird dagegen erneut mit einer Relativgeschwindigkeit v operiert, deren Definition dann aber zwingend an die Parameter des mit v bewegten Inertialsystems und dem Gang seiner Uhr gebunden ist. v in der LORENTZ-Transformation hat also eine andere physikalische Qualität als v im Additionstheorem. Beim direkten Vergleich beider Werte soll v im Additionstheorem zweckmäßig durch v' ersetzt werden, damit die Unterscheidung von v in der LORENTZ-Transformation gewährleistet ist. Diese Unterscheidung wird im nachfolgenden Unterabschnitt aus gegebenen Anlass praktiziert. In den nachfolgenden Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen besteht dagegen keine Ursache hierfür.

Auf der Basis aller dargelegten Annahmen führen die Ableitungen zu diesen Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen in der markanten Form:

$$\frac{v_2}{f(v_2)} = \frac{v_1 + v}{f(v_1) \cdot f(v)} \quad (9.117)$$

$$\frac{v_1}{f(v_1)} = \frac{v_2 - v}{f(v_2) \cdot f(v)} \quad (9.118)$$

$$\frac{v}{f(v)} = \frac{v_2 - v_1}{f(v_1) \cdot f(v_2)} \quad (9.119)$$

Alle Gesetzmäßigkeiten zu den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen lassen sich aus den Ergebnissen des Additionstheorems für 3 Inertialsysteme darstellen und für beliebig viele weitere Inertialsysteme analog anwenden. Es kann also ohne logischen Bruch von Bezugssystem zu Bezugssystem „umgestiegen“ werden. Die Natur dieser Umstiegsmöglichkeit schließt den Sonderfall des ruhenden Bezugssystems ein, ohne jedoch dessen konkrete Parameter aus den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen berechnen zu können.

Eine detaillierte Darstellung aller mit dem Additionstheorem verbundenen Ableitungen und Schlussfolgerungen ist im **Anhang** wiedergegeben.

9.10.4 Relativgeschwindigkeit von Inertialsystemen

Körper in bewegten Inertialsystemen unterliegen einer Kontraktion, die von der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem abhängt. Für die weiteren Betrachtungen darf die Rolle des ruhenden Bezugssystems auf ein frei definierbares Inertialsystem S übertragen werden, auf das die Relativgeschwindigkeit eines Körpers samt seinem Inertialsystem S' , in dem er ruht, bezogen ist. Die Berechtigung für diese Vorgehensweise leitet sich aus den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen nach Beziehung (9.117) - (9.119) ab. Wie bereits zum Additionstheorem ausgeführt, kann mit diesen Wechselbeziehungen freizügig von Bezugssystem zu Bezugssystem umgestiegen werden. Vor dem Hintergrund dieser Ersatzfunktion für das ruhende Bezugssystem ist dann auch in der Folge der Begriff des „absoluten“ Geschwindigkeitswertes v (Messwert aus Sicht des ruhenden Bezugssystems mit den Parametern l und t für Längen- und Zeitmessung) in der Verknüpfung mit dem dazugehörigen

relativen Wert v' (Messwert aus Sicht des bewegten Inertialsystems mit den Parametern l' und t' für Längen- und Zeitmessung) zu interpretieren.

Für Längen wie auch Zeiten gilt innerhalb eines Inertialsystems ein identischer Kontraktionsfaktor. Deshalb wird in jedem Inertialsystem unabhängig von seinem Kontraktionsfaktor die Lichtgeschwindigkeit c als Konstante wahrgenommen und als Quotient der Länge l und der zugehörigen Laufzeit t des Lichtes gemessen:

$$c = \frac{l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c = \textit{konst.} \quad [0 \leq v \leq c]$$

Man kann diese physikalische Gegebenheit auch umgekehrt interpretieren, ohne dass sich freilich an diesem Zusammenhang irgendetwas ändert. Die umgekehrte Schlussfolgerung lautet: Weil die Lichtgeschwindigkeit c eine Konstante ist, sind in jedem Inertialsystem Längen und Zeiten dem gleichen Kontraktionsfaktor unterworfen.

Während aber Längen **innerhalb** von bewegten Inertialsystemen immer einer Kontraktion unterliegen, sind Längen **zwischen** Inertialsystemen **nie** kontrahiert. Zwei Inertialsysteme mit gegenseitiger Relativgeschwindigkeit, deren Koordinatensysteme in ihrer gegenseitigen Lage hinsichtlich räumlicher und zeitlicher Koinzidenz definiert sind, haben zwar zu jedem Zeitpunkt einen anderen gegenseitigen Abstand, aber definitionsgemäß die gleiche Relativgeschwindigkeit. In deren Quotient wirkt sich im Zähler, also bei der (variablen) Länge sehr wohl aus, dass diese besonderen Längen **zwischen** Inertialsystemen **nie** kontrahiert sind. Der daraus erwachsende besondere Charakter der Relativgeschwindigkeit v zwischen Inertialsystemen ist in EINSTEINS Relativitätstheorie nicht erwähnt und wohl auch nicht erkannt worden. Es liegt aber doch auf der Hand, dass in einem Universum von unterschiedlichen Längenmaßstäben und voneinander abweichenden Uhren (trotz theoretisch absoluter Baugleichheit) ein Wörtchen zu sagen ist, an welche Längen- und Zeitmaßstäbe gedacht wird, auf deren Basis sich die Relativgeschwindigkeit v bestimmt. Diesem Versäumnis EINSTEINS soll abgeholfen werden, indem kategorisch definiert wird, dass für die Relativgeschwindigkeit v beziehungsweise v' der Längenmaßstab im Zähler auf absoluten Werten ohne jede Kontraktion basiert. Bei der Zeit im Nenner haben wir prinzipiell zwei Alternativen. Entweder gehen wir vom Zeitmaßstab des ruhenden Bezugssystems aus. Dann verbinden wir mit der Relativgeschwindigkeit v zwar eine klare Vorstellung, sie kann aber aus Sicht des relativ zum ruhenden Bezugssystem bewegten Inertialsystem nicht gemessen werden, weil sein Zeitmaßstab aufgrund des Kontraktionsfaktors von der absoluten Zeit des ruhenden Bezugssystems abweicht. Welche Vorstellung EINSTEIN auch mit der Relativgeschwindigkeit v verbunden haben mag, die von ihm angegebene Formel für den Kontraktionsfaktor kann nur für die absoluten Maßstäbe des ruhenden Bezugssystems sinnvoll sein, also:

$$f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \left[v = \frac{l}{t} \right]$$

Ein Beobachter und Messender im bewegten Inertialsystem kann aber **nicht** davon ausgehen, sich als ruhendes Bezugssystem zu begreifen (wie es EINSTEINS Vorgehen entspricht), sondern muss sich am Gang **seiner** Uhr orientieren.

Davon ausgehend wird folgender Gedankengang entwickelt:

Aus Sicht des ruhenden Bezugssystems erkennt ein (gedachter) Beobachter, dass ein Inertialsystem aufgrund seiner „absoluten“ Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem ruhenden Bezugssystem einer Kontraktion von Längen und Zeiten **innerhalb** des Inertialsystems unterliegt. Von der Kontraktion nicht betroffen sind Längen **zwischen** Inertialsystemen, also auch mit Bezug auf das ruhende Inertialsystem. Die unterschiedliche Betroffenheit hinsichtlich

der Kontraktion von Längen einerseits und der Zeiten andererseits schlägt naturgemäß auch auf die Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen sowie relativ zum ruhenden Bezugssystem durch. Deshalb korrespondiert die Relativgeschwindigkeit v' eines Inertialsystems, die aus **seiner** Sicht (Parameter l' und t') relativ zum ruhenden Bezugssystem gemessen wird, mit der absoluten Relativgeschwindigkeit v , die aus Sicht des ruhenden Bezugssystems (Parameter l und t) maßgebend ist. Wir haben eine Möglichkeit, den Wert der Kontraktion $f(v)$ aus dem bewegten Inertialsystem heraus korrekt zu bestimmen, indem der Zeitmessfehler für t' gegenüber der absoluten Zeit t entsprechend

$$t' = t \cdot f(v) \quad \text{und} \quad t = \frac{t'}{f(v)}$$

korrigiert wird. Dabei gilt weiterhin:

$$v = v' \cdot f(v) = v' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Daraus leitet sich folgende Beziehung ab:

$$f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left[\frac{v' \cdot f(v)}{c} \right]^2} \quad \left[v = \frac{l \cdot f(v)}{t \cdot f(v)} = \frac{l \cdot f(v)}{t'} = v' \cdot f(v) \right]$$

Vorstehende Beziehung ergibt aufgelöst:

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}} \quad \left[v' = \frac{l}{t'} = \frac{l}{t \cdot f(v)} = \frac{v}{f(v)} \right]$$

Aus den Beziehungen für das Additionstheorem ergibt sich auch gleich die geeignete Möglichkeit, dieses Ergebnis zu verifizieren: Denn im Additionstheorem findet naturgemäß bei den zusammenzufassenden Geschwindigkeiten der Einfluss des absoluten Längenmaßstabes sowie der relativen, also vom Kontraktionsfaktor abhängigen Zeitmaßstäbe Eingang in die Berechnung. Ohne die Allgemeingültigkeit des Additionstheorems in Frage zu stellen, betrachten wir dabei den Spezialfall, dass die beiden zusammenzufassenden Geschwindigkeiten gleich groß sind. D. h., ein Inertialsystem 1 bewegt sich mit Relativgeschwindigkeit v' gegenüber dem ruhenden Inertialsystem 0. Ein weiteres Inertialsystem 2 hat dabei die gleiche Relativgeschwindigkeit v' gegenüber Inertialsystem 1. Einer ersten Kontraktion mit dem Kontraktionsfaktor $f(v)$ von Inertialsystem 1 gegenüber Inertialsystem 0 ist eine identische Kontraktion von Inertialsystem 2 gegenüber Inertialsystem 1 überlagert. Insgesamt ergibt sich zwischen Inertialsystem 2 und Inertialsystem 0 eine multiplikative Überlagerung in Form des Quadrats von $f(v)$:

$$[f(v)]^2 = \frac{1}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$$

Der Nenner ergibt sich unmittelbar aus dem Additionstheorem. Dass der Strich im Symbol v' hier lediglich der Unterscheidbarkeit vom Symbol v für die LORENTZ-Transformation geschuldet ist, sei nur der Vollständigkeit halber nochmals erwähnt. Dieser kombinierte Wert des Kontraktionsfaktors ist als reine Zeitkontraktion im Additionstheorem zu interpretieren. Für den Kontraktionsfaktor des Inertialsystems 1 gegenüber dem ruhenden Bezugssystem ergibt sich also

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}$$

und damit Übereinstimmung mit obiger Ableitung.

9.10.5 Wahrnehmung von Lichtausbreitung und Körpern

EINSTEIN beschreibt in seiner Veröffentlichung „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ unter § 3, dass es sich bei der radialen Ausbreitung eines Lichtsignals in zwei relativ zueinander bewegten Inertialsystemen S und S' sowohl bei

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (\text{Inertialsystem } S)$$

wie auch bei

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (\text{Inertialsystem } S')$$

(im Original : ξ, η, ζ, τ statt x', y', z', t' und V statt c)

in beiden Fällen um die Gleichungen von Kugelwellen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes handelt.

Wenn aber x, y, z die Koordinaten einer Kugel mit Radius $R = ct = R(x = R, y = 0, z = 0)$ sind, können die Koordinaten x', y', z' **nicht** die Koordinaten einer anderen Kugel mit Radius $R' = ct' = R'(x' = R', y' = 0, z' = 0)$ sein, da gilt:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{und} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Somit gilt für korrespondierende Punkte beider Kugeln:

$$y' = y \quad \text{und} \quad z' = z,$$

aber

$$x' \neq x \quad \text{und} \quad R \neq R' \quad (\text{wegen } t' \neq t).$$

Der Beweis ist einfach zu führen an Hand des Spezialfalles

$$\begin{aligned} x' = x = z' = z = 0 : \\ y = R = y' \neq R'. \quad (t, t' \neq 0) \end{aligned}$$

In § 4 seiner Veröffentlichung „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ schreibt EINSTEIN dagegen: „Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel hat, hat also in bewegtem Zustande - vom ruhenden System aus betrachtet - die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen:“

$$R' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, R', R'.$$

(im Original : R statt R')

Dass diese Erkenntnis aus derselben Beziehung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

(im Original : ξ, η, ζ, τ statt x', y', z', t' und V statt c)

mit

$$ct' = R' \quad \text{und} \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (x' \text{ hier für } t = 0)$$

hervorgeht, für die er in § 3 noch eine Ausbreitung in Form von Kugelwellen konstatiert hat, wird von EINSTEIN schlicht übergangen. Zur Veranschaulichung bräuchte man sich eigentlich nur vorstellen, dass der gedachte Ausgangspunkt der kugelförmigen Ausbreitung des

Lichtes mit dem Mittelpunkt der starren Kugel zusammenfällt. (Diese Kugel können wir uns auch als ein Medium völlig ungedämpfter Lichtausbreitung oder nur aus einer äußeren Kugelschale bestehend vorstellen.) Dann hätte der Beobachter im ruhenden System zwei nicht übereinstimmende Wahrnehmungen zu ein und demselben Vorgang der Ausbreitung eines Lichtsignals!?

Diese zwiespältige Schlussfolgerung EINSTEINS, dass in einem bewegten Inertialsystem ein Körper als Kugel wahrgenommen wird, dagegen derselbe Körper vom ruhenden Inertialsystem aus betrachtet („ruhend“ relativ zum bewegten Inertialsystem), als Rotationsellipsoid wahrgenommen wird, offenbart weit mehr als nur einen (mathematisch beweisbaren) Denkfehler. Die konsequente Beseitigung dieses Denkfehlers führt zu weitgehenden Konsequenzen:

1. Die Kontraktion bewegter Körper ist **nicht eindimensional**, sondern ein von der Willkürlichkeit eines Beobachterstandpunktes unabhängiger physikalischer Effekt, der sich, ohne die Gestalt des Körpers zu verändern, auf alle 3 Dimensionen des Raumes erstreckt.
2. Jeder Beobachter, gleichgültig, ob er relativ zu diesem Körper ruht oder sich gegenüber diesem Körper bewegt, nimmt die gleiche Gestalt des Körpers wahr.
3. An sich baugleiche Maßstäbe der Länge, die eine gegenseitige Relativgeschwindigkeit aufweisen, also in **nicht** identischen Inertialsystemen ruhen, unterliegen **nicht** übereinstimmenden Werten der Kontraktion. In diesem Sinne sind die Wahrnehmungen oder Messungen zweier relativ zueinander bewegter Inertialsysteme unterschiedlich. In den physikalischen Beziehungen **zwischen** Inertialsystemen kann es **nie** Gleichberechtigung geben.
4. Die Abstände zwischen Inertialsystemen unterliegen **nie** einer Kontraktion, die von ihrer gegenseitigen Relativgeschwindigkeit abhängig wäre.
5. Die Lichtgeschwindigkeit wird von allen Beobachtern unabhängig von ihrem Bewegungszustand als immer gleicher konstanter Wert gemessen. Das bedeutet, dass innerhalb jedes Inertialsystems die Zeit dem gleichen Kontraktionsfaktor unterliegt wie die Länge.
6. Aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und einer identischen Kontraktion für Längen und Zeiten werden **innerhalb** von Inertialsystemen unabhängig von ihrem Bewegungszustand alle Naturgesetze in gleicher Weise erfahren. **In diesem Sinne** sind alle Inertialsysteme unabhängig von ihrem Bewegungszustand gleichberechtigt.
7. Die Relativität der Maßstäbe für Längen und Zeiten in den Inertialsystemen von unterschiedlichen Bewegungszuständen schließt den Sonderfall des unbewegten Inertialsystems ohne jede Kontraktion von Längen und Zeiten nicht aus, sondern setzt ihn im Gegenteil voraus. Das seit EINSTEIN existierende Tabu um den absoluten Raum und die absolute Zeit ist unberechtigt, obwohl letztere in unseren physikalischen „Alltag“ nicht in Erscheinung treten. Der effektive Kontraktionsfaktor $F = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ist vom Verhältnis der maßgebenden Energien $\frac{mv^2}{mc^2}$ abhängig (m für Masse), das nur mit Bezug auf ein Inertialsystem mit Relativgeschwindigkeit $v = 0$ eindeutig sein kann, also mit Bezug auf den Sonderfall des ruhenden Inertialsystems. Der lineare Differenzwert Δv zwischen zwei Inertialsystemen ist dagegen energetisch irrelevant. Für diese Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Inertialsystemen, sei sie nun v oder zu Verdeutlichung Δv genannt, kann niemals aus beiden Inertialsystemen heraus der gleiche Wert gemessen werden, weil für die Zeit unterschiedliche Werte der Kontraktion in den beiden Inertialsystemen gelten.

Die Relativitätstheorie ist damit keinesfalls insgesamt ad absurdum geführt, wie allein aus der physikalisch wohl begründeten Kontraktion und damit der Relativität von Längen und Zeiten abhängig vom Bewegungszustand hervorgeht. Aber wesentliche Randbedingungen, die EINSTEIN eingeführt hat, sind physikalisch unhaltbar. Diese „Randbedingungen“ - in diesem Zusammenhang eher ein Euphemismus - haben spätere Interpreten von EINSTEINS Theorie zu Glaubenssätzen bewogen wie: „Die Natur ist nicht immer so freundlich, dass sie unserem Vorstellungsvermögen entgegenkommt.“ - Beim kritischen Blick auf das gesamte Gedankengebäude der speziellen Relativitätstheorie erkennen wir jedoch, dass unser Vorstellungsvermögen keinesfalls überfordert ist, wenn wir den esoterischen Teil von EINSTEINS Theorie zugunsten stimmiger Randbedingungen ausblenden.

So werden wohl bei zwei Inertialsystemen, die sich relativ zueinander bewegen, **innerhalb** des Inertialsystems dieselben Naturgesetze festgestellt. Aber für die externen Beziehungen ist die Relativgeschwindigkeit zu einem anderen Inertialsystem **keine** hinreichende Basis zur Bestimmung des maßgebenden Kontraktionsfaktors. Dass jedes der beiden Inertialsysteme das jeweils andere als gegenüber dem eigenen System kontrahiert betrachten kann, wie es der symmetrische Aufbau der kompletten LORENTZ-Transformation (nach EINSTEIN) vorgibt, ist nicht nur mit unserem Vorstellungsvermögen unvereinbar; sondern auch die physikalische Realität spricht dagegen, wie sich aus den schlüssigen Ableitungen zur LORENTZ-Transformation ergibt. Bezeichnend ist hierbei, dass mathematisch immer nur mit einer Hälfte der LORENTZ-Transformation operiert werden muss, also die Idee des symmetrischen Aufbaus konsequent ignoriert werden muss.

Bei der rechnerischen Umsetzung nach der LORENTZ-Transformation mit den von EINSTEIN vorgegebenen Randbedingungen (eindimensionale Kontraktion) ist also Vorsicht geboten, wie das Beispiel „Kugelwelle“ zeigt. Es ist nach obigem Beweis sachlich unrichtig, dass nach der LORENTZ-Transformation in der Interpretation nach EINSTEIN außer im ruhenden System **auch** im bewegten System eine Kugelwelle zu konstatieren wäre. Das gibt die von EINSTEIN (fälschlich) unterstellte **eindimensionale** Kontraktion einfach nicht her. Und LORENTZ, der Schöpfer dieser Transformationsbeziehungen, wenn er auch hinsichtlich des physikalischen Hintergrundes noch unsicher war, hatte sicher nicht Kugelwellen im Sinn.

Die Ausbreitung des Lichts in Inertialsystemen von gegenseitiger Relativgeschwindigkeit ist von so fundamentaler Bedeutung, dass alle sie kennzeichnenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten im nachfolgenden Kapitel nochmals vertieft betrachtet werden.

9.10.6 Ausbreitung des Lichts als Kugelwelle

Ein Körper kann nur einem Inertialsystem mit seinem Bewegungszustand angehören. Auch ein Lichtstrahl kann im homogenen Medium nur **einer** geradlinigen Bahn angehören. Das gilt auch für ein Kollektiv von Lichtstrahlen, die von einer punktförmigen Lichtquelle nach allen Richtungen des Raumes ausgesandt werden. Was bedeutet dies für das bekannte, von EINSTEIN zitierte und nachfolgend nochmals zusammengefasste Gedankenexperiment? - Die Betrachtung geht von 2 Inertialsystemen S und S' aus, die sich mit Relativgeschwindigkeit v gegeneinander bewegen. S soll als ruhendes Inertialsystem und S' als bewegtes Inertialsystem angesprochen werden. Eine im Koordinatenursprung des Inertialsystems S' befindliche Lampe gibt einen allseits gerichteten Lichtblitz zu dem Zeitpunkt ab, da sich der Koordinatenursprung des Inertialsystems S' mit dem von S deckt. Emittiert eine gegenüber dem ruhenden Inertialsystem S mit Relativgeschwindigkeit v bewegte Lichtquelle Licht, gilt für die resultierende Lichtgeschwindigkeit c_a nach dem Additionstheorem:

$$c_a = \frac{c \pm v}{1 \pm \frac{cv}{c^2}} = c.$$

Wird nach der Emission das Licht in seiner Relativgeschwindigkeit gegenüber bewegten Körpern oder Inertialsystemen betrachtet, ergibt sich auch für diese Betrachtung, dass das Additionstheorem maßgebend ist und somit die resultierende Geschwindigkeit identisch ist mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit c . Die Lichtgeschwindigkeit ist also nicht nur innerhalb eines mit Relativgeschwindigkeit v bewegten Inertialsystems konstant, weil Weg x und Zeit t dem identischen Kontraktionsfaktor $f(v)$ unterliegen, so dass gilt:

$$c_a = \frac{x \cdot f(v)}{t \cdot f(v)} = c.$$

Sondern auch in seiner „Bewegung“ relativ zu einem Inertialsystem, das einen beliebigen Bewegungszustand aufweist, nimmt es den immer gleichen Wert der konstanten Lichtgeschwindigkeit c an. Deshalb liegen hinsichtlich der resultierenden Lichtgeschwindigkeit identische Verhältnisse vor, wenn zum Zeitpunkt des Lichtblitzes in unserem Gedankenexperiment, alternativ die Lichtquelle nicht in S' sondern in S positioniert ist.

Betrachten wir aus Sicht des bewegten Inertialsystems S' die beiden exemplarischen Fälle der Lichtausbreitung, deren Richtung einmal mit der Relativgeschwindigkeit übereinstimmt und im zweiten Fall mit der Gegenrichtung.

Für einen Lichtstrahl in Richtung der Relativgeschwindigkeit wird in S' eine Dehnung der Wellenlänge von λ auf λ' wahrgenommen, wobei gilt:

$$\lambda' = \lambda \cdot F_v$$

mit

$$F_v = 1 + \frac{v}{c}.$$

Mit der Dehnung der Wellenlänge ist aber zwingend eine Minderung der wahrgenommenen Frequenz f auf

$$f' = \frac{f}{F_v}$$

verbunden. Insgesamt bleibt das Produkt

$$f' \cdot \lambda' = f \cdot \lambda = c$$

identisch mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit. Das heißt aber auch, auf jedes beliebige Zeitintervall T' im Inertialsystem S' treffen $T' \cdot f'$ Wellenzüge der Länge λ' , die eine Länge von

$$l' = T' \cdot f' \cdot \lambda' = T' \cdot f \cdot \lambda = T' \cdot c$$

ergeben. Für den Lichtstrahl in der Gegenrichtung gilt der Faktor der Kontraktion

$$F_{-v} = 1 - \frac{v}{c}.$$

Ansonsten gelten alle vorstehenden Überlegungen in analoger Weise. Dabei ist das übereinstimmende Ergebnis für die Wegmessung im Zeitintervall T' hervorzuheben. Damit werden für den Weg des Lichtes in einem Inertialsystem für ein Zeitintervall T' gleiche Messergebnisse der Länge erzielt, gleichgültig, ob die Richtung der Lichtausbreitung mit der Relativgeschwindigkeit übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Diese für die beiden exemplarischen Fälle festgestellte Unabhängigkeit der gemessenen Wege von der Richtung des Lichtes, gilt aber auch für beliebige Richtungen der Lichtausbreitung, die nicht dadurch ausgezeichnet sind, dass sie mit Richtung oder Gegenrichtung der Relativgeschwindigkeit übereinstimmen. Dies ergibt sich aus folgender Überlegung:

Es gibt den Sonderfall der geradlinigen Lichtausbreitung, bei dem **innerhalb** des bewegten Inertialsystems eine zum Vektor der Relativgeschwindigkeit exakt senkrechte Bahn festgestellt wird. In diesem Sonderfall hat der Lichtstrahl keine Komponente relativ zur Bewegungsrichtung des Inertialsystems S' und ruht **hinsichtlich dieser Richtung** im Inertialsystem S' . Damit existiert innerhalb des Inertialsystems S' für die Lichtausbreitung senkrecht zur Relativgeschwindigkeit der Sonderfall, der mit den vorstehend behandelten exemplarischen Fälle der Lichtausbreitung in Richtung und Gegenrichtung der Relativgeschwindigkeit korrespondiert. Sowohl in Richtung und Gegenrichtung der Relativgeschwindigkeit wie auch senkrecht dazu unterliegt die Lichtausbreitung identischen Gesetzmäßigkeiten. Das heißt, auch für die Senkrechte zum Vektor der Relativgeschwindigkeit wird im Intervall T' eine einheitliche Länge

$$l' = T' \cdot c$$

gemessen. Damit ist der Nachweis für das Achsenkreuz des dem bewegten Inertialsystem S' eingepprägten Koordinatensystems erbracht. Alle anderen Durchmesserlinien für die Lichtausbreitung in Form einer Kugelwelle ergeben sich durch anteilige Zusammensetzung der aus den Vorzugsrichtungen gebildeten Komponenten.

Der Sonderfall, bei dem innerhalb des bewegten Inertialsystems S' eine Lichtausbreitung exakt senkrecht zum Vektor der Relativgeschwindigkeit vorliegt, verdient aber noch eine nähere Betrachtung. Denn für diesen Sonderfall haben wir vergleichbare Verhältnisse wie sie nach dem Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik vorliegen, das sich in GALILEIS Überlegungen spiegelt: „Er betrachtet als Beispiel einen Stein, der von der Mastspitze eines Schiffes fällt, und stellt fest: Unabhängig davon, ob das Schiff in Ruhe ist oder sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber dem Ufer bewegt, fällt der Stein immer zum Fußpunkt des Mastes. Wenn der Beobachter, der sich auf dem Schiff befindet, keine Kontakte zur Außenwelt hat, kann er also aus der Fallbewegung des Steines nicht erschließen, ob das Schiff ruht oder in Bewegung ist.“ - Und eben diese Überlegungen gelten in analoger Weise auch für das Licht in dem Sonderfall der Lichtausbreitung senkrecht zum Vektor der Relativgeschwindigkeit des Inertialsystems S' . Ein Beobachter, der in Inertialsystem S' ruht, kann nicht feststellen, ob sein Inertialsystem eine Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ruhenden Inertialsystem hat. Wenn er aber im Gedankenexperiment eine Relativgeschwindigkeit unterstellt, erkennt er eine ungewöhnliche Konsequenz daraus: Ein und derselbe Lichtstrahl nimmt aus der Sicht eines im bewegten Inertialsystem S' ruhenden Beobachters eine andere Richtung an als aus Sicht eines im ruhenden Inertialsystems S postierten Beobachters! Während der Beobachter in S' „blind“ ist für die Komponente der Lichtgeschwindigkeit in Richtung der Relativgeschwindigkeit, erkennt der Beobachter in S diese Komponente sehr wohl und stellt einen Winkel δ des Lichtstrahls gegenüber dem Lot auf den Vektor der Relativgeschwindigkeit fest. Die Wahrnehmung des Beobachters im bewegten Inertialsystem S' ist vergleichbar der Wahrnehmung eines gedachten Matrosen an Bord des Schiffes in GALILEIS Beispiel, der den Stein in einer Lotrechten fallen sieht. So gut der Vergleich die Anschauung befördern kann, sind der Vergleichbarkeit aber enge Grenzen gesetzt. Das fängt schon damit an, dass ein Lichtstrahl keiner Fallrichtung unterworfen ist und sich für jeden Beobachter geradlinig fortpflanzt, während der Stein in GALILEIS Beispiel aus Sicht eines Beobachters am Ufer keiner gleichmäßigen und geradlinigen Bewegung folgt.

Kehren wir also zu unserem eigentlichen Betrachtungsgegenstand zurück, der Lichtbahn aus Sicht des Inertialsystems S' . Dabei erkennen wir, dass dem Beobachter in Inertialsystem S' die Richtung des Lichtstrahls senkrecht zum Vektor der Relativgeschwindigkeit nur „vorgegaukelt“ wird. Die „echte“ Senkrechte, die freilich nur ein Beobachter im ruhenden Inertialsystem wahrnehmen kann, weist gegenüber der „unechten“ Senkrechten aus Sicht des bewegten Inertialsystems S' einen von der Relativgeschwindigkeit v abhängigen Winkel δ entsprechend:

$$\delta = \arctan \frac{v}{c}.$$

δ gilt, wie gesagt, für den Spezialfall eines Winkels von $\alpha = 90^\circ$ zwischen Lichtbahn und der durch die Relativgeschwindigkeit gegebenen Richtung. Für alle anderen Werte des Winkels α gilt:

$$\delta(\alpha) = \arctan \frac{v \cdot \sin \alpha}{c}.$$

Wenn wir nach allen vorstehenden Überlegungen auch aus Sicht des bewegten Inertialsystems S' uneingeschränkt Ausbreitung des Lichts als Kugelwelle konstatieren, so darf Folgendes nicht außer Acht gelassen werden: Betrachtet man im bewegten Inertialsystem S' die Kugelwelle und denkt sich, dass die aktuelle Oberfläche der für einen beliebigen Zeitpunkt gegebenen Kugel ein (nach innen) reflektierendes Hindernis darstellt, so wird aus Sicht eines Beobachters in Inertialsystem S' die Oberfläche (von innen) von jedem der sich ausbreitenden Lichtstrahlen senkrecht (senkrecht mit Bezug auf die Tangente) getroffen und von der Oberfläche senkrecht zurückgeworfen. Tatsächlich trifft aber jeder Strahl, beurteilt aus dem ruhenden Inertialsystem S heraus, mit einer um den Winkel $\delta(\alpha)$ gegen die Senkrechte auf die Tangente geneigten Richtung auf das reflektierende Hindernis und wird nach dem Reflexionsgesetz unter einem Winkel von $2 \cdot \delta(\alpha)$ gegen die Richtung des einfallenden Strahls zurückgeworfen. Nur unter dieser Bedingung kann er dann später genau im Mittelpunkt der Lichtausbreitung im bewegten Inertialsystem S' wieder eintreffen.

Ruhendes wie bewegtes Inertialsystem nehmen also kugelförmige Wellenausbreitung des Lichtes wahr. Aber die Lichtbahnen korrespondierender Kugelpunkte der beiden Inertialsysteme sind **nicht** identisch. Korrespondierende Kugelpunkte werden **innerhalb** ihres Inertialsystems unter einem identischen Winkel α gegenüber dem Vektor der Relativgeschwindigkeit v wahrgenommen. Während aber für die in Inertialsystem S ruhende Lichtquelle dieser Punkt durch einen fokussierten Lichtstrahl erreicht wird, dessen Richtung gegen den Vektor der Relativgeschwindigkeit genau dem Winkel α entspricht, kann der korrespondierende Punkt in S' nur erreicht werden, wenn dieser Winkel $\alpha + \delta(\alpha)$ beträgt. Und genau umgekehrt verhält es sich, wenn die Lichtquelle nicht in S sondern in S' ruht. Dann kann nur der unter dem Winkel $\alpha - \delta(\alpha)$ emittierte Lichtstrahl den Kugelpunkt erreichen, der innerhalb S unter dem Winkel α wahrgenommen wird.

Nach allem vorstehend Ausgeführten sind die Gesetzmäßigkeiten der Lichtausbreitung von einem Charakter des Besonderen und Exklusiven gekennzeichnet. Diener zweier Herrn kann aber selbst das Licht beziehungsweise der nach seiner Richtung konkret definierte Lichtstrahl nicht sein. Die Reflektion des sich als Kugelwelle ausbreitenden Lichtes an dem gedachten Hindernis in Form der innenseitig reflektierenden Kugeloberfläche provoziert eine weitere Überlegung. Würde dieses gedachte Hindernis im Augenblick der Reflektion sich nicht mit dem Inertialsystem S' gegenüber Inertialsystem S bewegen, sondern gegenüber S ruhen, dann würde die Reflektion unter dem Winkel $\delta(\alpha)$ gegenüber der Senkrechten sehr wohl auch im Inertialsystem S' wahrgenommen. Dieser Effekt ist unter der Bedingung $\alpha = 90^\circ$ und $\delta = \arctan \frac{v}{c}$ identisch mit dem von BRADLEY gefundenen Effekt der sogenannten Aberration des Lichtes. Dabei kommt dem betrachteten fernen Fixstern die Rolle des ruhenden Systems zu.

Betont sei rückblickend auf diesen Unterabsatz, dass sich alle Überlegungen zu den Längen l und l' sowie den Zeiten T und T' exklusiv auf den Lichtstrahl beziehen und hierzu zwei konkurrierende Faktoren F_v für die Dehnung und F_{-v} für die Kontraktion existieren, die ihrerseits nur der Überlegung zugänglich und **nicht** selektiv wahrgenommen und gemessen werden können. Wie sich aus diesen Faktoren der für Körper oder allgemein: Raumfiguren (hier fokussiert auf die Kugel) maßgebende Kontraktionsfaktor

$$f(v) = \sqrt{F_v \cdot F_{-v}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ergibt, stimmt mit (9.5) in Unterabschnitt 9.2 sowie mit den Erläuterungen zu Abbildung 27 überein.

Es bleibt darauf hinzuweisen, dass sich die, Zeit und Weg des Lichtstrahls in gleicher Weise erfassende Dehnung F_v einerseits und Kontraktion F_{-v} andererseits, im Vergleich der relativ zueinander bewegten Inertialsysteme unterschiedlich sind. Deswegen korrespondiert ein Zeitintervall T' und eine Länge $l' = T' \cdot c$ in Inertialsystem S' mit einem Zeitintervall T und einer Länge $l = T \cdot c$ in S , wobei $T \neq T'$ und $l' \neq l$ ist. Auch der für die Raumfigur „Kugel“ maßgebende Kontraktionsfaktor $f(v)$ ist **nicht** übereinstimmend für beide Inertialsysteme. Die in S' wahrgenommene Kugelwelle hat in allen korrespondierenden Zeitpunkten einen abweichenden Radius gegenüber dem Radius in S .

Prinzipiell erfolgt also, wie von EINSTEIN behauptet, sowohl betrachtet von S aus wie auch von S' aus, die Lichtausbreitung in Form einer Kugelwelle. Tatsächlich kann ein und dasselbe Kollektiv von Lichtstrahlen, wie es EINSTEINS Auffassung entspricht, gleichzeitig 2 oder theoretisch beliebig vielen Inertialsystemen das „Schauspiel kugelförmiger Ausbreitung bieten“! - Dass der von EINSTEIN angegebene mathematische Ansatz für diese kugelförmige Ausbreitung im bewegten System diese Interpretation entgegen seiner Behauptung **nicht** hergibt, liegt allein an der von ihm unterstellten eindimensionalen Kontraktion. Eliminiert man diesen Denkfehler durch eine gleichmäßig alle Richtungen des Raumes erfassende Kontraktion im bewegten Inertialsystem, ist auch mathematisch die korrekte Abbildung der physikalischen Realität erreicht.

Als wesentliche Konsequenz ist also festzustellen, dass ein Lichtstrahl, der in einem Inertialsystem S' als senkrecht zum Vektor seiner Relativgeschwindigkeit gegenüber Inertialsystem S wahrgenommen wird, von einem Beobachter in S **nicht** als senkrecht wahrgenommen wird. Ausgehend von der mit der Richtung der Relativgeschwindigkeit definierten Geraden ist also das Lot in S auf diese Gerade nicht parallel zu dem Lot in S' , vielmehr schließen beide Lote einen Winkel ein. Also nicht nur die Längenmaßstäbe und der Gang der Uhren, sondern auch die wahrgenommenen Richtungen stimmen bei relativ zueinander bewegten Inertialsystemen **nicht** überein!

9.10.7 Gesetz von der Erhaltung der Energie, echtes Zwillingparadoxon

Das unter dem Stichwort „Zwillingparadoxon“ bekannte physikalische Gedankenexperiment und seine Kommentierung in der wissenschaftlichen Literatur sind bekannt. Wenn auch zu kritisieren ist, dass wesentliche Randbedingungen, die mit dem ruhenden Bezugssystem zusammenhängen, ausgeblendet und undiskutiert bleiben, zum Nachweis eines echten Paradoxons taugt das Gedankenexperiment jedenfalls nicht.

Ganz anders ist aber ein weiteres Gedankenexperiment zu sehen, bei dem die Beachtung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie überprüft werden soll. Nachdem uns die Zwillinge A und B schon vertraut sind, wollen wir mit ihnen also folgendes Experiment durchführen: A und B haben eine identische Masse m und ruhen im gemeinsamen Inertialsystem S , das identisch mit der Erde sein soll. B , wiewohl zunächst ohne Relativgeschwindigkeit gegenüber A , steht auf einer rollengelagerten Schiene, die sich gegenüber der Erde bewegen kann, wenn sie angestoßen wird. In der Tat: Auf B wird ein Ball abgeschossen und prallt von ihm wieder ab. Durch den mechanischen Impuls erfährt B eine Beschleunigung, nach deren Abklingen B sich mit konstanter Geschwindigkeit v gegenüber A bewegt. Reibungsloser Lauf der rollengelagerten Schiene wird unterstellt oder abstrakt: B bewegt sich auf der x' -Achse seines neuen Inertialsystems S' , das gegenüber S mit seiner x -Achse eine Relativgeschwindigkeit v hat.

A weiß aufgrund seiner Kenntnis der Relativitätstheorie EINSTEINS, dass sein Zwillingbruder B jetzt einen Massenzuwachs von

$$m \quad \text{auf} \quad \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und einen Energiezuwachs von mc^2 auf $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

erfahren hat.

B stellt nun aber seinerseits fest, dass unbeschadet der auslösenden Ursache A sich mit Relativgeschwindigkeit v von ihm entfernt. B pocht auf die Gleichberechtigung zweier sich gegeneinander bewegnender Inertialsysteme und errechnet getreu der Spiegelbildlichkeit der auf EINSTEIN zurückgehenden Gleichungen der LORENTZ-Transformation für seinen Bruder A ebenfalls einen Massenzuwachs von

$$m \quad \text{auf} \quad \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und einen Energiezuwachs von mc^2 auf $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

A und B freuen sich, ein Perpetuum mobile erster Art gefunden zu haben. Nach kurzer Euphorie verwerfen sie diese Möglichkeit und damit EINSTEINS Postulat von der Gleichberechtigung aller Inertialsysteme.

9.10.8 Der Versuch von Michelson und die eindimensionale Kontraktion nach Einstein

Die reale Kontraktion eines bewegten Körpers hängt, wie vorstehend erläutert, **nicht** von der Relativgeschwindigkeit seines Inertialsystems A gegenüber einem beliebigen anderen Inertialsystem B ab. Aber natürlich ist nicht nur der Betrag der Relativgeschwindigkeit gegenüber diesem willkürlich gewählten Inertialsystem B keine hinreichende Basis für die Berechnung des realen Kontraktionsfaktors. Auch die mit dieser willkürlichen Wahl verbundene Richtung der Relativgeschwindigkeit ist eine reine Zufallsgröße. Wird deshalb dieser zufälligen Richtung der Relativgeschwindigkeit gegenüber dem willkürlich gewählten Inertialsystem B die x -Achse zugeordnet, so kommt natürlich auch der dazu senkrechten y -Achse eine Zufallsgröße seiner Relativgeschwindigkeit und seines realen Kontraktionsfaktors zu. Dreht man nun gedanklich dieses Achsenkreuz aus x - und y -Achse um ihren Schnittpunkt, so stehen wir vor 2 Alternativen: Entweder es gibt für jede Position bei der Drehung des Achsenkreuzes ein anderes Wertepaar der Kontraktion, bezogen auf die x -Achse, und der Kontraktion, bezogen auf die y -Achse; oder die eindimensionale Längenkontraktion nach EINSTEIN ist physikalisch unhaltbar. Und in der Tat: Geschwindigkeitsabhängige Kontraktion betrifft einen Körper immer als Ganzes ohne Deformation seiner Gestalt, weil alle 3 Richtungen des Raumes in gleicher Weise beteiligt sind. Und mit dem historischen MICHELSON-Versuch ist dazu bereits der Beweis erbracht, so erstaunlich das auch klingen mag.

Der MICHELSON-Versuch hatte zwar im Zusammenhang mit der seinerzeitigen Vorstellung eines absoluten Äthers eine völlig andere Zielsetzung als den Nachweis der relativistischen Kontraktion. Aus seinem Ergebnis kann aber weit mehr geschlossen werden als nur die Nichtexistenz dieses Äthers. Die Relativitätstheorie EINSTEINS und die LORENTZ-Transformation basieren einseitig auf **einer** Dimension im Raum, die mit dem Vektor einer Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen vorgegeben ist. Das kann natürlich nicht heißen, dass für die Betrachtung eines Inertialsystems immer nur eine Richtung im Raum von Belang wäre, die

durch die willkürliche Annahme eines zweiten Inertialsystems bestimmt ist, das sich relativ zu ihm bewegt. Kontraktion kann keine Einbahnstraße sein. Vielmehr ist zu jeder gewählten Richtung immer auch die dazu senkrechte Richtung zu beachten, die nicht willkürlich ausgeblendet werden kann.

Der MICHELSON-Versuch bringt aber die auf x - und y -Achse zurückgelegten Wege des Lichts mit ihren Wellenzügen von diskreter Wellenlänge am Vereinigungspunkt zur Interferenz. Das Licht hat für x - und y -Achse die gleiche Lichtgeschwindigkeit c , aber abhängig von der realen Kontraktion $F < 1$ einen reduzierten Lichtweg $l' = l \cdot F$. Nur unter der Annahme, dass für alle Richtungen des Raumes ein **einheitlicher** Kontraktionsfaktor des Lichts **unabhängig** von einer beliebigen Variation dieser x - und y -Achsen im Raum gegeben ist, lässt sich keinerlei Streifenbildung bei der Interferenz der Lichtstrahlen von x - und y -Achse feststellen. Das bekannte Ergebnis des MICHELSON-Versuchs ist der Beweis dafür, dass die geschwindigkeitsabhängige Kontraktion eines Inertialsystems und des in ihm ruhenden Körpers alle 3 Richtungen des Raumes in gleicher Weise betrifft.

9.10.9 Allgemeine Relativitätstheorie

EINSTEIN postuliert eine Krümmung des Raums in Abhängigkeit von der Masse. Die in den Abschnitten 8 und 9 dargelegten Ableitungen zur Gravitation bedürfen dieses „Kunstgriffes“ nicht und kommen dennoch für Gravitationspotential und Krümmung der Lichtbahn zu übereinstimmenden Ergebnissen mit den von EINSTEIN angegebenen Gesetzmäßigkeiten.

Einerseits kann aus der allgemeinen Relativitätstheorie im Umkehrschluss abgeleitet werden: Ohne Materie keine Krümmung des Raums! Andererseits wird die Wirkung, die sich einstellt, nämlich die Krümmung der Bahn des Lichtstrahls, zwar als alleinige Folge der von der Materie ausgehenden Gravitationswirkung anerkannt, aber gleichwohl wird beharrlich postuliert: Der Raum sei gekrümmt und der Lichtstrahl würde stets den kürzesten Weg nehmen!

Die Erklärung dieses klassischen Falls der Vertauschung von Ursache und Wirkung ist in EINSTEINS Annahmen zur physikalischen Natur von Licht und Gravitation zu suchen. EINSTEIN begreift die elektromagnetischen Wirkungen und die Gravitation als eigenständige physikalische Effekte neben der Masse, aber in einer Wechselwirkung mit der Masse und den an ihr wirkenden Kräften.

Das führt ihn zu dem komplexen Bild einer physikalischen Zwitternatur

- der Korpuskularstrahlung für das Licht, d. h. Welle-Teilchen-Dualismus (Welle oder Teilchen abhängig vom Interpretationsbedarf des Beobachters) und
- der auf das Licht wirkenden Gravitation als Überlagerung von Massenanziehung und *nichteuklidischer* Struktur des Raumes.

Diesem physikalischen Weltbild EINSTEINS werden in dieser Ausarbeitung die Gesetzmäßigkeiten strömender Feinmasse entgegengehalten, wobei die Feinmasse als das konstituierende Element in der Natur anzusehen ist.

Licht und Gravitation kommunizieren nicht nur mit Masse; sie sind vielmehr selbst spezifische Formen wirkender Feinmasse: Ohne Masse keine Wirkung!

Mit dem Phänomen der strömenden Feinmasse ist dann auch das Tabu um das Licht gebrochen. Das Licht kann trotz unvergleichbarer Geschwindigkeiten seine Verwandtschaft mit einem geworfenen Stein prinzipiell nicht leugnen: Sind die Gesetzmäßigkeiten, denen sie unterliegen, auch qualitativ und quantitativ noch so verschieden (Verwandtschaft ist nicht mit Gleichheit zu verwechseln):

Unter dem Einfluss der die Gravitation definierenden Konstellation der Masse im Umfeld, werden sie beide auf gekrümmte Bahnen gezwungen. Der Raum dagegen, in dem diese physikalischen Prozesse ablaufen, ist und bleibt unter allen Umständen strukturlos und unveränderbar!

Die *euklidische* Geometrie reicht zwar nicht aus als alleiniges Instrument zur Berechnung solcher gekrümmter Bahnen, dass ihre Gesetzmäßigkeiten durch die Gravitation aber quasi außer Kraft gesetzt werden, ist schlicht abwegig. So basiert gerade die Ausgangsbeziehung der Differentialgleichung für die Lichtbahn im Gravitationsfeld auf den Gesetzmäßigkeiten *euklidischer* Geometrie.

10 Induktive Beeinflussung durch eine Freileitung

10.1 Übergang vom Vollmodell zum Halbmodell

Der Spezialfall des Außenleiters mit $c = 1$ nach (4.59) betrachten wir in der Folge als Referenz-Vollmodell. Dabei impliziert der Wert $c = 1$, dass der mit dem Außenleiter korrespondierende Innenleiter differentiell klein ist. Für den praktischen Fall ist es jedoch ausreichend, wenn der Innenleiter gegenüber dem Außenleiter einen extrem kleinen Durchmesser aufweist. Dieses so gestaltete Referenz-Vollmodell entspricht einer mit Industriefrequenz (typisch: 50 Hz) beaufschlagten Leitung, die allseitig von Erde umgeben ist. Die Leitung spielt dabei die Rolle des Innenleiters und die Erde die des Außenleiters der Koaxialleitung. Die maßgebenden elektrischen Einflussgrößen, insbesondere die niedere Frequenz sorgen für eine Eindringtiefe im km-Bereich und damit für das unterstellte Größenverhältnis von extrem dünnen „Innenleiter“ zu seinem „Außenleiter“ (Erde).

Das Referenz-Vollmodell ist der gedankliche Ausgangspunkt. Die Freileitung über dem Erdboden, dessen Oberfläche idealisierend als Ebene angenommen wird, entspricht dem Halbmodell. (Der Abstand dieser Leitung von der Erdoberfläche wird zunächst vernachlässigt und in seiner Auswirkung später noch betrachtet.) Die rechnerischen Beziehungen für das Halbmodell können ausgehend von dem Referenz-Vollmodell, schrittweise unter Benutzung eines Ersatz-Vollmodells entwickelt werden.

Wir gehen davon aus, dass zwei identische spiegelbildlich zu einer Horizontalen aneinandergefügte Halbmodelle A und B das Ersatz-Vollmodell ergeben. Die gegeninduktive Wirkung der Stromfäden von A auf B ist in ihrer Gesamtheit identisch mit der Wirkung von B auf A. Wird A von B getrennt, so gilt für beide Teile, dass hinsichtlich der gegeninduktiven Wirkungen der einzelnen Stromfäden **gesamtheitlich** das Gleichgewicht fortbesteht, da es ja in der Wechselseitigkeit bereits angelegt ist. Hinsichtlich der Gesamtwirkung wird nach der gedanklichen Teilung des Vollmodells in zwei Halbmodelle also die Kontinuität gewahrt. Der Gesamtterdstrom wird lediglich in zwei identische Hälften aufgeteilt.

Die Wirkung, die auf den Partner (das andere Halbmodell) ausgeübt wird, ist gleich groß wie die Wirkung, die von ihm empfangen wird. Offensichtlich geht dieser Teil der Wirkung bei der Teilung nicht unter, sondern bleibt in (gesamtheitlich) gleicher Größe erhalten und überlagert sich mit der gegeninduktiven Wirkung, die schon vor der Teilung, also im Vollmodell, innerhalb des eigenen Halbmodells vorhanden war. Dass dabei die induktive Verkopplung mit den Stromfäden des eigenen Halbmodells enger und intensiver war als mit dem „fernen“ Partner, dem korrespondierenden Halbmodell, leuchtet ein. Die zahlenmäßige Proportion wird nachfolgend untersucht.

Die einzelnen Stromfäden folgen im Halbmodell aber im Vergleich zum Vollmodell einem anderen Verteilungsgesetz. (Dieser neue Gleichgewichtszustand wird wiederum durch das Medium der Gegeninduktivität bewirkt und später noch im einzelnen untersucht.) Einzige Besonderheit ist die Senkrechte durch die Leitung L , die ja die Symmetrieachse des Halbmodells bildet. Für die Senkrechte kann zu jedem Stromfaden (außerhalb der Senkrechten) ein spiegelbildlich komplementärer Stromfaden gefunden werden, so dass wegen der gegenseitigen Kompensation keine Vertikalkomponente der magnetischen Feldstärke längs der Senkrechten induziert wird. Deshalb gilt hinsichtlich der Senkrechten die Differentialgleichung (4.7) des Vollmodells für das Halbmodell in gleicher Weise! D.h. aber gleichzeitig, dass Stromdichte und magnetische Feldstärke des Erdstromes der gleichen mathematischen Gesetzmäßigkeit folgen. Lediglich hinsichtlich der Eindringtiefe ergibt sich ein Unterschied, der nachfolgend ermittelt wird. Bei normierter Darstellung der Variablen

$$s = s_y,$$

d.h. Einführung der normierten Größe für die Senkrechte

$$y = \frac{s}{D} \quad \text{mit} \quad s = s_y$$

ergibt sich unter Bezug auf (4.53) mit der Identität

$$e^{g(z)} = e^{g(y)}$$

auch ein identischer Verlauf von

$$J(y) = J_v(y) \quad \text{und} \quad H_v(y)$$

für Vollmodell und Halbmodell beziehungsweise dessen Ersatz-Vollmodell.

Der für die abweichenden Eindringtiefen maßgebende Unterschied lässt sich an Hand der Beziehungen (4.53) - (4.58) erkennen. Nach (4.53) gilt

$$J_{v0}(z) = J_0 \cdot e^{g(z)}$$

und

$$\frac{d}{dz} [J_{v0}(z)] = J_0 \cdot \frac{d}{dz} [e^{g(z)}].$$

Ausgehend vom Vollmodell mit $I_{v0}(z)$ nach (4.58) und $H_{v0}(z)$ nach (4.56) sollen die entsprechenden Werte des Halbmodells mit $I_{vH}(z)$ und $H_{vH}(z)$ bezeichnet werden, wobei von der Gleichwertigkeit von y und z Gebrauch gemacht wird. Der Unterschied zwischen beiden Wertepaaren äußert sich darin, dass im Halbmodell der Strom **gleicher** Größe $I_{vH}(z) = I_{v0}(z)$ auf einen Halbkreis statt auf einen Vollkreis abgebildet wird. Deshalb gilt für das Halbmodell mit der Modifikation

$$D \rightarrow D \cdot k_H$$

$$J_0 \rightarrow J_0 \cdot k_I$$

analog (4.58)

$$I_{vH}(z) = I_{v0}(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi z (D \cdot k_H)^2}{2\tau^2} \cdot J_0 \cdot k_I \cdot \frac{d}{dz} [e^{g(z)}]$$

und nach Division dieser Beziehung durch (4.58):

$$k_H^2 \cdot k_I = 2. \quad (10.1)$$

In dieser Form ist implizit die Abbildung eines Vollkreises (Referenz-Vollmodell) auf einen Halbkreis (Halbmodell) enthalten. Ein Vollkreis wird flächengleich auf einen Halbkreis abgebildet, wenn sein Radius D auf $\sqrt{2}D$ anwächst, weil für die Gleichheit der Flächen gilt:

$$\pi D^2 = \frac{1}{2} \pi (\sqrt{2}D)^2.$$

Unter Berücksichtigung dieses Faktors $\sqrt{2}$ ergibt sich hinsichtlich der magnetischen Feldstärke analog (4.56) für das Halbmodell folgende Form:

$$H_{vH}(z) = H_{v0}(z) = -\sqrt{2} \cdot \frac{k_0 \cdot D \cdot k_H}{4\tau^2} \cdot J_0 \cdot k_I \cdot \frac{d}{dz} [e^{g(z)}].$$

Nach Division durch (4.56) ergibt sich die Beziehung:

$$k_H \cdot k_I = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (10.2)$$

Die Interpretation der Beziehungen (10.1) und (10.2) bringt den charakteristischen Unterschied zwischen Halbmodell und Referenz-Vollmodell zum Ausdruck:

Bei doppeltem Gesamtstrom besitzt das Halbmodell eine zugehörige magnetische Feldstärke, die um den multiplikativen Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner ist. Mit der Bezugnahme auf den **doppelten** Gesamtstrom wird schon deutlich signalisiert, dass bis hierher erst ein gedankliches Zwischenergebnis erreicht ist.

Aus den Beziehungen (10.1) und (10.2) errechnet sich schließlich:

$$k_I = \frac{1}{4}, \quad (10.3)$$

$$k_H = 2 \cdot \sqrt{2}. \quad (10.4)$$

Damit sich für Halbmodell und Vollmodell eine identische rechnerische Beziehung für die Stromdichte $J(y)$ ergibt, muss also für das zum Halbmodell gehörige Ersatz-Vollmodell der Korrekturfaktor

$$k_H = 2 \cdot \sqrt{2}$$

in geeigneter Weise eingeführt werden. Die Ableitungen von (10.1) und (10.2) sind nämlich auf reine Verhältnisse von Flächen beziehungsweise Umfängen abgestellt. Dass dabei immer auch die maßgebende Eindringtiefe D eine Änderung erfährt, ist bis zu dieser Stelle unberücksichtigt geblieben. Für die Berücksichtigung dieses Zusammenhangs gilt folgende Überlegung:

Aus (4.7) ergibt sich in Verbindung mit (4.48), dass die magnetische Feldstärke H_v eine proportionale Größe zum **Quadrat** der Eindringtiefe D darstellt. Die um den multiplikativen Faktor k_H größere magnetische Feldstärke verlangt deshalb auch ein Anwachsen des **Quadrats** von D um denselben Faktor k_H . Die Eindringtiefe D selbst wächst somit mit der Wurzel aus k_H !

Die Eindringtiefe des Halbmodells errechnet sich damit zu:

$$D_H = \sqrt{k_H} \cdot D_V = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot D_V.$$

Der Index H für Halbmodell und V für Vollmodell wird immer nur dann gesetzt, wenn es zur Unterscheidung erforderlich ist. Es gilt also für das

Halbmodell:

$$D = D_H = 4\tau \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\omega\mu_0}} \quad (10.5)$$

Die geschilderten Zusammenhänge lassen sich besonders gut auch mittels Diskussion der Formel für die Eindringtiefe des Vollmodells anschaulich machen.

Nach Umformung von Gleichung (4.48):

$$D_V^2 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \tau^2 \cdot \frac{\rho}{\omega\mu_0}$$

erkennt man unmittelbar die Äquivalenz von ohmschen (ρ) und induktiven ($\omega\mu_0$) Einflussgrößen und die Auswirkung des resultierenden Quotienten dieser Größen auf die Eindringtiefe. Das Halbmodell hat im Vergleich zum flächengleichen Vollmodell eine um den Faktor $1/\sqrt{2}$ geringere magnetische Feldstärke durch Aufspreizung des Vollkreises auf den Halbkreis. Dies entspricht einer äquivalenten Steigerung des spezifischen Erdwiderstandes um den Faktor $\sqrt{2}$.

Das Halbmodell entspricht einem Ersatz-Vollmodell von doppeltem spezifischen Erdwiderstand. (Eine Hälfte hat unendlich hohen Widerstand.) Der resultierende (mittlere) Ersatzwert des spezifischen Erdwiderstandes ρ_{EH} des Halbmodells beträgt damit:

$$\rho_{EH} = \rho \cdot 2 \cdot \sqrt{2},$$

und mit (4.48) wird:

$$D_H = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot D_V. \quad (10.6)$$

Das Ergebnis der Betrachtungen zur Eindringtiefe läuft darauf hinaus, dass ein effektiver spezifischer Erdwiderstand ρ_{EH} gebildet wird, der in geeigneter Weise die Eigenschaften der beiden spiegelsymmetrischen Halbmodelle von Erdreich und Luft zusammenfasst. Das das Erdreich einschließende Halbmodell ist gekennzeichnet durch den spezifischen Erdwiderstand ρ , das hierzu spiegelsymmetrische Halbmodell in der Luft durch den spezifischen „Erdwiderstand“:

$$\rho_{Lu} \rightarrow \infty.$$

Da alle bisher abgeleiteten Beziehungen prinzipiell auch für den Grenzwert $\rho_{Lu} \rightarrow \infty$ ihre Gültigkeit beibehalten, gelten die Betrachtungen zur Eindringtiefe in identischer Weise auch für den Luftraum über der Leitung.

Für den Luftraum gilt gemäß (4.6) mit $\rho_{Lu} \rightarrow \infty$:

$$\alpha_{Lu} = 0.$$

Damit ist die Stromdichte J_{Lu} , wie nicht anders zu erwarten, im Luftraum überall:

$$J_{Lu} = 0.$$

Hinsichtlich Stromdichte unterscheiden sich also die Halbmodelle von Erdreich und Luftraum fundamental. Dagegen gilt Kongruenz der physikalischen Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich der Bildung eines einheitlichen Ersatzwertes des spezifischen Erdwiderstandes ρ_{EH} sowie einer einheitlichen Eindringtiefe D_H nach (10.5).

Deswegen folgt die magnetische Feldstärke in idealer Spiegelsymmetrie den gleichen Gesetzmäßigkeiten, wie sie nachfolgend für das Halbmodell des Erdreichs noch aufgezeigt werden. Zusätzlich zur Symmetrie hinsichtlich der Horizontalen durch die Leitung ist aber auch Symmetrie bezogen auf die Vertikale gegeben. Unter Einbeziehung des Gesetzes von der Konstanz des Flusses ergibt sich daraus zwingend die weitere grundlegende Erkenntnis: Für zusammengehörige Wertepaare der magnetischen Feldstärke in Erdreich und Luft existiert - bezogen auf den Mittelpunkt der Leitung - Punktsymmetrie nach Betrag und Richtung!

Da, wie in Unterabschnitt 7.5 dargestellt, Magnetismus außerhalb eines Leiters einem äußeren Strom entspricht, und zwar sowohl mit einer Komponente in Umfangsrichtung als auch in Ausbreitungsrichtung, ist noch folgender Hinweis angezeigt. Es existiert im Luftraum mit $J_{Lu} = 0$ zwar kein Leiterstrom, oder anders ausgedrückt: kein innerer Strom, dagegen durchaus ein äußerer Strom, der freilich nicht durch ein Ampèremeter, sondern nur auf induktivem Wege gemessen werden kann.

Ausgehend von dem Vollmodell, also für den Spezialfall des Außenleiters mit $c = 1$ ergeben sich aus (5.93) - (5.96) unter Übergang von

$$z \rightarrow y$$

und mit der Identität von

$$e^{g(y)} = e^{g(z)},$$

aber doppelter Stromdichte, für das

Halbmodell mit $c = 1$ und $0 < y \leq 1$

$$J(y) = -\frac{I_0 \cdot 4\tau^2}{D^2 \pi \gamma} \cdot e^{g(y)}, \quad (10.7)$$

$$H(y) = \frac{I_0}{2\pi D} \cdot \left[\frac{1}{y} + \frac{e^{g(y)} \cdot \frac{d}{dy} [g(y)]}{\gamma} \right], \quad (10.8)$$

$$\Phi'(y) = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left[-\ln y - \frac{e^{g(y)}}{\gamma} \right], \quad (10.9)$$

$$I(y) = I_0 \cdot \frac{e^{g(y)} \cdot \frac{d}{dy} [g(y)] \cdot y}{\gamma}, \quad (10.10)$$

$$D = 4\tau \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\omega \mu_0}}.$$

In der Folge unterscheiden wir nach Leiterstrom (Index L) und Erdstrom (Index E). Auf dieser Basis ergibt sich für die magnetische Feldstärke mit

$$H_D = \frac{I_0}{2\pi D} : \quad (10.11)$$

$$H(y) = H_L(y) + H_E(y),$$

$$H_L(y) = \frac{H_D}{y}, \quad (10.12)$$

$$H_E(y) = \frac{H_D}{\gamma} \cdot e^{g(y)} \cdot \frac{d}{dy} [g(y)]. \quad (10.13)$$

Weiterhin gilt für den magnetischen Fluss mit

$$\Phi_0' = I_0 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} : \quad (10.14)$$

$$\Phi'(y) = \Phi_L'(y) + \Phi_E'(y),$$

$$\Phi_L'(y) = -\Phi_0' \cdot \ln y, \quad (10.15)$$

$$\Phi_E'(y) = \frac{-\Phi_0'}{\gamma} \cdot e^{g(y)}. \quad (10.16)$$

Außerdem ist, anknüpfend an (10.10):

$$I(y) = I_E(y).$$

Die Gegeninduktivität zwischen stromdurchflossenem Leiter und beeinflusstem Leiter im normierten (senkrechten) Abstand y unter der Leitung L beträgt

$$M(y) = \frac{\Phi'(y)}{I_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left[-\ln y - \frac{e^{g(y)}}{\gamma} \right]$$

oder mit

$$M_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} :$$

$$M(y) = M_0 \cdot \left(-\ln y - \frac{e^{g(y)}}{\gamma} \right). \quad (10.17)$$

Die Selbstinduktivität L_n des Leiters n (n steht für einen beliebigen Leiter L) leitet sich aus der Formel (10.17) für die Gegeninduktivität für den Fall

$$s = b, \quad y = y_b = \frac{b}{D} \quad (b = \text{Radius des Leiters})$$

mit

$$e^{g(y)} \approx 1$$

wie folgt ab:

$$L_n = M_0 \cdot \left(\ln \frac{D}{b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right) = M_L - M_E; \quad (10.18)$$

$$M_L = M_0 \cdot \left(\ln \frac{D}{b} + \frac{1}{2} \right); \quad (10.19)$$

$$M_E = \frac{M_0}{\gamma} \approx 160 \frac{\mu H}{km}. \quad M_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \quad (10.20)$$

Bei den Werten L_n , M_0 , M_L und M_E handelt es sich um Induktivitäten, die auf die Längeneinheit bezogen sind. Die Aufteilung von L_n in M_L und M_E entspricht der Aufteilung nach Leiterstrom und Erdstrom. Der Faktor $1/2$ repräsentiert die innere Induktivität des Leiters:

$$M_i = \frac{M_0}{2}$$

nach (5.78).

Ordnet man den Buchstaben L der Induktivität eines Leiters zu und den Buchstaben M einer Gegeninduktivität gegenüber einem anderen Leiter, so darf nicht verwundern, dass vorstehend die Bezeichnungen M_0 , M_L und M_E gewählt werden. Diese Größen kommen je nach Fall sowohl als Induktivität als auch als Gegeninduktivität in Betracht, wobei letztere mit dem eigentlichen Betrachtungsgegenstand, der induktiven Beeinflussung, korrespondiert und damit Priorität erhält. Es gilt jedoch bei der Betrachtung „reiner“ Induktivitäten gleichberechtigt:

$$\begin{aligned} L_L &= M_L, \\ L_E &= M_E. \end{aligned}$$

Von dieser Darstellung wird nachfolgend in Abbildung 33 Gebrauch gemacht. Die dem Erdstrom zugehörige Induktivität M_E ergibt nach Multiplikation mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ den Betrag der ohmschen Komponente des Erdwiderstandes $R_E = \omega M_E$, wobei bekanntlich für den vorliegenden typischen Idealfall ohmsche und induktive Komponente betragsgleich sind.

So errechnet sich der komplexe Grundwiderstand $\overline{Z_n'}$ pro Längeneinheit der Leitung n zu:

mit

$$\overline{Z_n'} = 2\pi f \cdot (M_E + jL_n) = Z_n' \cdot e^{j(90^\circ - \delta)} \tag{10.21}$$

$$Z_n' = 2\pi f \cdot \sqrt{M_E^2 + L_n^2}, \tag{10.22}$$

$$\delta = \arctan \frac{M_E}{L_n}. \tag{10.23}$$

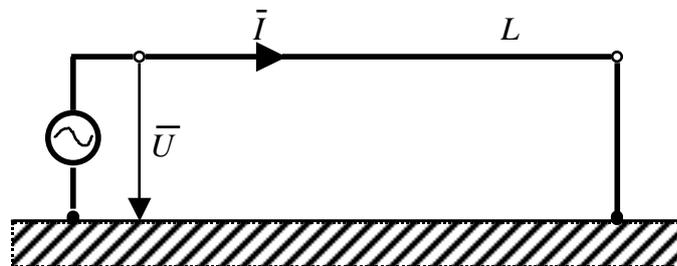
δ ist der Verlustwinkel für die ohmschen Verluste im Erdreich. Die Induktivität M_E geht wegen der Gegenphase der magnetischen Feldstärke des Erdstroms zu der des Leiterstromes mit negativem Vorzeichen in L_n ein.

Der ohmsche Widerstand (pro Längeneinheit) des Leitungsdrahtes wird mit

$$\frac{1}{\kappa \cdot q} \quad (\kappa = \text{spezifische Leitfähigkeit}, \quad q = \text{Querschnitt des Leiters})$$

errechnet. D. h., der komplexe Widerstand pro Längeneinheit des Leiters mit Berücksichtigung des Widerstandsbelages des Leiters ergibt sich zu:

$$\overline{Z_w'} = \overline{Z_n'} + \frac{1}{\kappa \cdot q}. \tag{10.24}$$



Für eine Leitung der Länge l und dem Widerstand

$$R_L = \frac{l}{\kappa \cdot q}$$

ergibt sich ein Ersatzbild sowie ein Zeigerdiagramm nach Abbildung 33 beziehungsweise Abbildung 34 (nächste Seite).

Da im Erdreich nur die räumlich variable Komponente der Stromdichte (und ihre abhängigen Größen) existieren, in dem Leiter dagegen nur die räumlich konstante Komponente zu betrachten ist (Die variable Komponente ist vernachlässigbar.), ist auf die Indizes v und k verzichtet worden. Vergleicht man mit dem allgemeinen Fall des Zeigerdiagramms nach Abbildung 8, ergeben sich außerdem folgende Besonderheiten: Die Indizes sind in Abbildung 34 abgewandelt, nämlich abgestellt auf Leiter (L) und Erde (E). A (für Außenleiter) ist durch E (Erde) ersetzt und I (für Innenleiter) durch L (Leiter).

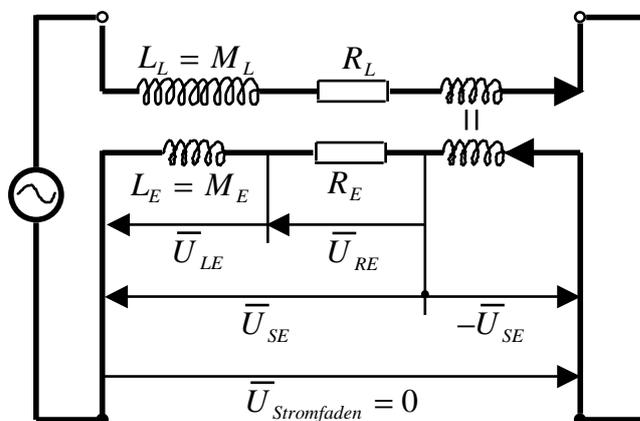


Abbildung 33: Ersatzbild des Leiters

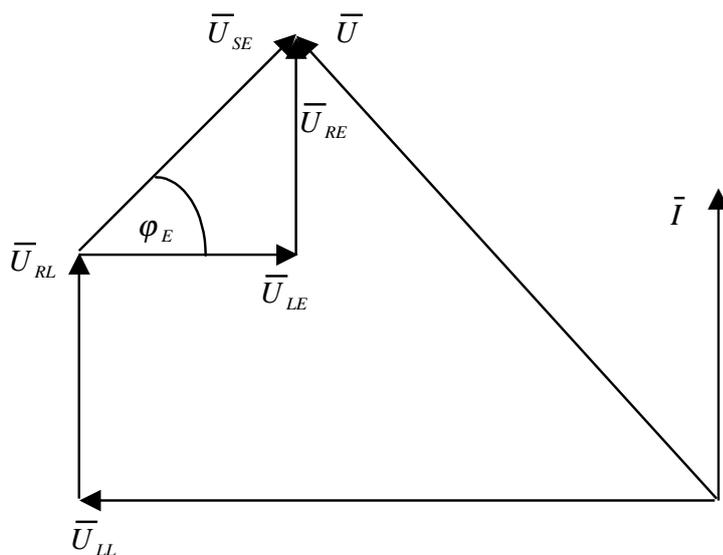


Abbildung 34: Zeigerdiagramm des Leiters

Für den Winkel $\varphi_A \rightarrow \varphi_E$ gilt

$$\varphi_E = 45^\circ,$$

wie es dem typischen Idealfall entspricht.

Der Winkel $\varphi_I \rightarrow \varphi_L$ tritt nicht in Erscheinung, weil - wie gesagt - die räumlich variable Komponente der Stromdichte im Leiter vernachlässigbar ist.

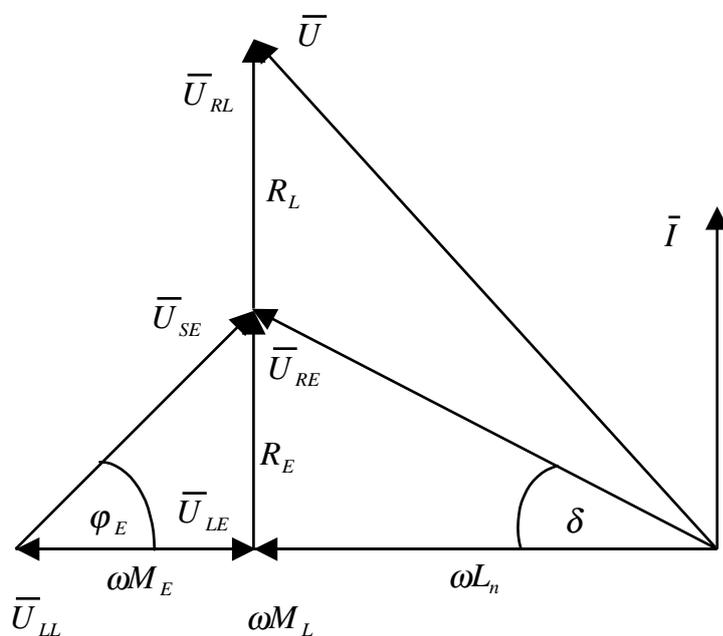


Abbildung 35: Zeigerdiagramm modifiziert

Abbildung 34 lässt sich durch Umgruppieren der Zeiger in die gleichwertige Form nach Abbildung 35 überführen, wobei jetzt auch das Verhältnis der Größen nach (10.18) - (10.23) wiedergegeben ist. Auf den eingetragenen Verlustwinkel δ wird besonders hingewiesen.

10.2 Das Übertragen der Beziehungen für die Senkrechte auf die Horizontale

Das Übertragen der für das Vollmodell abgeleiteten Beziehungen auf das Halbmodell gemäß Unterabschnitt 10.1 ist in seiner Gültigkeit noch allein auf die Senkrechte durch die Leitung beschränkt. Um den Verlauf aller maßgebenden elektrischen Größen im Halbmodell auch außerhalb der Senkrechten und insbesondere entlang der Horizontalen durch die Leitung abzuleiten, wird im folgenden die Modelltransformation schrittweise weiter vorangetrieben. In einem ersten Schritt denken wir uns das Vollmodell in zwei zur Horizontalen spiegelbildliche Hälften aufgeteilt. Für eine Hälfte gelten dann

- entlang der Senkrechten die bekannten Beziehungen für $J(y)$, $H_E(y)$ und $\Phi_E'(y)$ sowie
- entlang der Horizontalen mit $x = y$

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{2}J(y), \\ H_E(x) &= \frac{1}{2}H_E(y) \quad \text{und} \\ \Phi_E'(x) &= \frac{1}{2}\Phi_E'(y). \end{aligned}$$

Dieses im folgenden Initialmodell genannte Modell ergibt sich zwingend daraus, dass für alle konzentrischen Kreise um die Leitung mit dem Radius $x = y$, für die Vertikale - wie in Unterabschnitt 10.1 abgeleitet - die vollen Werte J , H_E und Φ_E' gelten, längs der Horizontalen aber jeweils nur die halben Werte dieser Größen, und zwar als Folge der Aufteilung des Vollmodells in zwei spiegelbildliche Hälften. Dass bei der gedanklichen Aufteilung des Vollmodells die Bezugsgröße Leitungsstrom ebenfalls einer Halbierung unterliegt, wird der Vollständigkeit halber erwähnt.

Für das aus der Teilung des Vollmodells hervorgegangene Initialmodell kann in Erweiterung der vorstehenden Aussagen für Vertikale und Horizontale folgende Feststellung getroffen werden:

Längs des Umfanges aller konzentrischen Kreise um die Leitung nimmt die Größe der magnetischen Feldstärke H_E gleichmäßig von dem Wert $H_E(y)$ senkrecht **unter** der Leitung über

$$H_E(x) = \frac{1}{2}H_E(y) \quad \text{mit} \quad x = y$$

auf der Horizontalen bis auf den Wert 0 ab, der sich senkrecht **über** der Leitung einstellt. Dies ergibt sich bei strikter Beachtung des Gebots der Symmetrie im Zuge der Teilung.

Aus diesem so definierten Initialmodell lässt sich eine erste wichtige Schlussfolgerung ziehen: Der Mittelwert der magnetischen Feldstärke H_E längs der Halbkreise unter der Horizontalen, die die Leitung zum Mittelpunkt haben, beträgt

$$\frac{1}{2} \left[H_E(y) + \frac{1}{2}H_E(y) \right] = \frac{3}{4}H_E(y).$$

D.h. das zugehörige Linienintegral umschlingt nur $\frac{3}{4}$ des Erdstroms $I_E(y)$! Dies lässt nur folgende Interpretation zu:

- Die wechselseitigen gegeninduktiven Wirkungen der einzelnen Stromfäden erstrecken sich in Höhe von $\frac{3}{4}$ des Erdstroms auf die „eigene“ Hälfte, also auf das Initialmodell, die restliche gegeninduktive Wirkung entsprechend $\frac{1}{4}$ des Erdstromes kommt der wechselseitigen Wirkung der beiden Hälften aufeinander zu.

- Da aber die wechselseitige Wirkung der beiden Hälften des Vollmodells mit dessen Aufteilung unterbunden wird, muss sich ausgehend vom Initialmodell ein neuer Gleichgewichtszustand einstellen.

Das Initialmodell ist also nur ein Teilmodell und für sich nicht stabil, aber es stellt den wichtigen Ausgangspunkt dar, aus dem heraus sich der „neue“ stabile Zustand entwickelt. Das Teilmodell für $\frac{3}{4}$ des Erdstroms ist durch ein Differenzmodell für das restliche $\frac{1}{4}$ des Erdstroms zu ergänzen, dessen magnetische Feldstärke bei der x -Achse

$$H_E(x) = \frac{1}{2}H(y)$$

beträgt und längs des zugehörigen Halbkreises unter der x -Achse (Mittelpunkt ist die Leitung) gleichmäßig bis auf den Wert 0 an der y -Achse abnimmt. Dieses Differenzmodell entspricht also der Einwirkung auf das andere Halbmodell **vor** der Teilung und wird als Konsequenz der Teilung an der Horizontalen gespiegelt und damit in den „eigenen“ Bereich umgeklappt. Initialmodell und Differenzmodell entsprechen also zusammen einem Halbmodell, das längs des vorgenannten Halbkreises eine gleichmäßige magnetische Feldstärke $H_E(y)$ aufweist und den gesamten Erdstrom $I_E(y)$ einschließt. In der Folge ist jeder differentiell kleine Sektor des Halbkreises nach einer noch zu definierenden Funktion zu dehnen, so dass die Summe aus Initialmodell und Differenzmodell in den gemeinsamen stabilen Zustand transformiert werden.

Maßgebender Aspekt für die Erweiterung und Transformation des Initialmodells in den stabilen Zustand ist die Gesetzmäßigkeit von der Konstanz des magnetischen Flusses. Für die Senkrechte liegt die Beziehung für den magnetischen Fluss $\Phi_E'(y)$ fest. Das die Senkrechte durchströmende magnetische Feld folgt einerseits bei Annäherung an die Horizontale dem Gesetz von der Konstanz des Flusses, seine Feldlinien spreizen sich aber andererseits durch die abnehmenden gegeninduktiven Wirkungen der Stromfäden (abnehmende Stromdichte!) immer weiter auf.

Unter der Vorgabe eines gleichen Wertes des magnetischen Flusses

$$\Phi_E'(x) = \Phi_E'(y)$$

kann jedem Wert x auf der Horizontalen ein zugehöriger Wert

$$y = f(x)$$

auf der Senkrechten zugeordnet werden. Für die Ermittlung der Beziehung $y = f(x)$ bedienen wir uns einer besonderen Eigenschaft der Grundbeziehungen für den Strom $I_E(y)$ und den magnetischen Fluss $\Phi_E'(y)$ nach Gleichung (10.10) beziehungsweise (10.9). Für unterschiedliche Werte der Eindringtiefe D_1 , D_n ergeben sich für gleiche Werte

$$y = \frac{s_1}{D_1} = \frac{s_n}{D_n}$$

identische Ergebnisse für $I_E(y)$ beziehungsweise $\Phi_E'(y)$. D.h., mittels der normierten Größe y können die Beziehungen für ein Modell mit beliebiger Eindringtiefe D_n auf ein Bezugsmodell der Eindringtiefe D abgebildet werden. Bei dieser Form der Abbildung ändert sich mit der Eindringtiefe D der Grundwert der magnetischen Feldstärke

$$H_D = \frac{I_0}{2\pi D}$$

entsprechend (10.11) - (10.13).

Dagegen variiert bei konstantem Grundwert H_D der zugehörige Strom I_0 abhängig von der Eindringtiefe. D.h., die Eindringtiefe D hat die Natur eines Proportionalitätsfaktors. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, die Verhältnisse längs der Horizontalen für das Differenzmodell mit $\frac{1}{4}$ des Erdstromes auf die Verhältnisse längs der Senkrechten mit vollem Erdstrom als Bezugswert abzubilden. D.h., für die Horizontale ist für $\frac{1}{4}$ des Erdstromes der 4-fache Wert der Eindringtiefe in Ansatz zu bringen!

Die korrekte Anwendung der geschilderten Abbildungsmöglichkeit erfordert die Berücksichtigung folgender Gesichtspunkte: Die zu den dargelegten Teilströmen gehörigen Teilflüsse überlagern sich prinzipiell additiv. Aus der Sicht eines beliebigen Punktes x längs der Horizontalen, gilt dies aber immer nur für den Bereich zwischen Leitung und Punkt x . Denn nur diese inneren Anteile von Strom und Fluss sind maßgebend für die Berechnung der elektrischen Größen im Punkt x ! Für die äußeren Anteile kann deren Überlagerung und Addition noch außer Ansatz bleiben. Sie findet vielmehr sukzessive mit dem Fortschreiten des Punktes x auf der Horizontalen nach außen statt. Die Werte x der Horizontalen müssen deshalb fortschreitend abschnittsweise auf die Senkrechte abgebildet werden.

In der normierten Darstellung entspricht der vollen Eindringtiefe D der Wert $x = 1$, so dass uns die Form

$$x = \frac{x}{1}$$

die Eigenart der normierten Größe anschaulich vor Augen stellt.

Wir trennen nun aber außerdem im Nenner in die Teilbereiche x und $1 - x$ auf und erhalten die Form:

$$x = \frac{x}{x + (1 - x)}. \quad (10.25)$$

Bei dem entscheidenden Schritt der Abbildung der Werte von x auf die y -Achse gilt für den äußeren Teilabschnitt die 4-fache Eindringtiefe:

$$1 - x \rightarrow 4 - x.$$

Weiterhin ergibt sich, dass für den inneren Teilabschnitt - die 4-fache Eindringtiefe kompensierend - der 4-fache Wert von x , also $4x$ in Ansatz gebracht werden muss, denn der Bezugswert von $\frac{1}{4}$ des Erdstromes wird durch die additive Überlagerung auf den 4-fachen Wert, also den vollen Wert des Erdstromes angehoben. Dass x und $y = f(x)$ auf einer gemeinsamen Feldlinie liegen, die definitionsgemäß einen magnetischen Fluss konstanter Größe eingrenzt, sei ergänzend erwähnt.

Unter Einbeziehung dieser Überlegungen ergibt sich aus (10.25) folglich

$$y = \frac{4x}{4x + (4 - x)}. \quad (10.26)$$

Hinsichtlich des (vierfachen) inneren Teilabschnittes mit dem Wert

$$4x = (3 + 1)x$$

korreliert der Faktor 1 mit dem betrachteten $\frac{1}{4}$ des Erdstromes und der Faktor 3 mit den $\frac{3}{4}$ des Erdstromes des Initialmodells. Durch Kürzen von Gleichung (10.26) ergibt sich die Zwischenform

$$y = \frac{x}{x + \left(1 - \frac{x}{4}\right)}.$$

Daraus lässt sich ablesen, dass die Wirkung des betrachteten $\frac{1}{4}$ des Erdstromes bei der Abbildung auf die y -Achse durch den von x auf $\frac{x}{4}$ reduzierten Wert zum Ausdruck kommt. Dieser reduzierte Wert steht in der Klammer der Größe 1 gegenüber, die für den Normalwert der Eindringtiefe steht. Dies ist das Kennzeichen der Abbildung auf die y -Achse. Das

betrachtete $\frac{1}{4}$ des Erdstromes entspricht ja dem Einfluss der anderen Hälfte des Vollmodells vor der Teilung, der sich - wie bereits ausgeführt- in dem heruntergeklappten Differenzmodell manifestiert. Dieser Einfluss ist bei $x = 1$ abgeklungen. Nach der Teilung erfolgt durch das heruntergeklappte Differenzmodell „interner Ersatz“. Auch dieser „interne Ersatz“ hat bei $x = 1$ seine Grenze. Beim Wert $x = 1$ ist der gesamte zu $\frac{1}{4}$ des Erdstromes gehörige magnetische Fluss entfaltet! Bei $x = 1$ liegt eine Unstetigkeit von $\frac{dy}{dx}$ vor! Daraus kann für $x = 1$ folgende Ausgangsform für die weitere Betrachtung gebildet werden:

$$y = \frac{x}{x + \frac{3}{4}} \quad \text{für } x = 1. \quad (10.27)$$

Dass der zugehörige Zahlenwert

$$y(x = 1) = \frac{4}{7}$$

beträgt, sei der Vollständigkeit halber ergänzt.

Für alle Werte $x > 1$ liegt für die Teilstrecke

$$\Delta x = x - 1$$

Gleichheit der Veränderung der korrespondierenden Eindringtiefe hinsichtlich innerem und äußerem Teilabschnitt vor, so dass jeweils der gleiche Wert, der gegenüber der Ausgangsform nach Gleichung (10.27) zum inneren Teilabschnitt hinzugezählt werden muss, vom äußeren Teilabschnitt wieder abgezogen werden muss. Damit bleibt insgesamt der Nenner der Ausgangsform nach (10.27)

$$x + \frac{3}{4} \quad \text{für } x \geq 1$$

erhalten!

Somit ergeben sich aus (10.26) und (10.27) schließlich zusammenfassend folgende Beziehungen:

$$y = \frac{x}{\frac{3}{4}x + 1} \quad \text{für } x \leq 1 \quad (10.28)$$

und

$$y = \frac{x}{x + \frac{3}{4}} \quad \text{für } x \geq 1. \quad (10.29)$$

Bei allen vorstehenden Teilschritten der Ableitung haben wir uns also die der Eindringtiefe D eigene Natur eines Proportionalitätsfaktors zunutze gemacht. Die resultierende Eindringtiefe beziehungsweise der resultierende Proportionalitätsfaktor zweier überlagerter Teilströme kommt durch Gewichtung (Proportion $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$) und Addition zustande.

Zur Veranschaulichung leiten wir uns aus Beziehung (10.28), die als Grundform anzusprechen ist, folgende gleichwertige Form ab:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{3}{4}. \quad (10.30)$$

Die Kehrwerte der auf die Eindringtiefe D normierten Abstände y und x sind nichts anderes als äquivalente Größen der magnetischen Feldstärke, und zwar normiert auf den Quotienten

$$H_{ED}(y) = \frac{I_E(y)}{2\pi D}.$$

In den Kehrwerten von $\frac{1}{y}$ und $\frac{1}{x}$ liegen - wie gesagt- magnetische Feldstärken des Erdstromes in normierter Form vor. Diese Normierung schließt für $\frac{1}{x}$ als besondere Konsequenz der Abbildung auf die y -Achse auch den Winkel des Feldstärkevektors gegen die radiale Verbindungslinie zum Mittelpunkt der Leitung ein, für den im Spezialfall der x -Achse 90° anzunehmen ist. Die Größe $\frac{1}{x}$ lässt wegen der zwingenden Verknüpfung mit der Abbildung auf die y -Achse keine direkte Berechnung der magnetischen Feldstärke am Punkt x zu!

Mit der einheitlichen Bezugsgröße $H_{ED}(y)$, gebildet aus dem von y abhängigen Strom $I_E(y)$ und dem Umfang des Kreises mit der Eindringtiefe D als Radius, lassen sich die Glieder der Formel (10.30) direkt in Beziehung setzen:

$\frac{1}{y}$ korreliert mit der Eindringtiefe D und dem gesamten Strom $I_E(y)$,

$\frac{1}{x}$ korreliert mit der für die x -Achse maßgebenden 4-fachen Eindringtiefe. Dies entspricht für die Abbildung auf die y -Achse $\frac{1}{4}$ von $I_E(y)$. Unabhängig davon geht dieser für die x -Achse maßgebende und auf die y -Achse abgebildete Strom, der also $\frac{1}{4}$ von $I_E(y)$ entspricht, seinerseits zu $\frac{3}{4}$ auf das Initialmodell und zu $\frac{1}{4}$ auf das Differenzmodell zurück.

$\frac{3}{4}$ entspricht der festen Differenz in Höhe von $\frac{3}{4}I_E(y)$.

Diese Zusammenhänge können der nachstehenden, geringfügig gegenüber (10.30) abgewandelten Form entnommen werden:

$$\frac{1}{y} - \left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{4x} \right) = \frac{3}{4}.$$

Das Glied

$$\frac{3}{4x} + \frac{1}{4x}$$

entspricht der Überlagerung von Initialmodell und Differenzmodell.

Bei $x = 1$ hat das Differenzmodell seinen vollen Strom von $\frac{1}{4}I_E(y)$ entfaltet:

$$\frac{1}{4x} = \frac{1}{4} \quad \text{für } x = 1.$$

und bleibt für Werte $x \geq 1$ konstant.

Damit ergibt sich für $x \geq 1$ die gegenüber (10.30) modifizierte Form:

$$\frac{1}{y} - \left(\frac{3}{4x} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

oder

$$\frac{1}{y} - \frac{3}{4x} = 1. \quad (10.31)$$

Die mit (10.28) und (10.29) verbundene Unstetigkeit bei $x = 1$ soll mit Rücksicht auf weitergehende Ableitungen in eine andere, an (10.30) angepasste Darstellung überführt werden. (10.28) ist als Grundform anzusprechen mit der von x abhängigen resultierenden Eindringtiefe

$$D_{eff} = \frac{3}{4}x + 1.$$

Bei $x = 1$ springt diese Funktion auf

$$D_{eff} + \Delta D_{eff} = x + \frac{3}{4}$$

mit

$$\Delta D_{eff} = x + \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}x + 1 \right) = \frac{1}{4}(x - 1). \quad (10.32)$$

Mit dem Korrekturglied nach (10.32) werden die Beziehungen (10.28) und (10.29) in folgende gemeinsame Form überführt:

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{3}{4} + \frac{a}{4} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}; \quad (10.33)$$

$$a = 0 \quad \text{für } x \leq 1, \quad a = 1 \quad \text{für } x \geq 1.$$

Aus (10.33) ergibt sich die gleichwertige Form:

$$y(x) = \frac{x}{D_x} \quad (10.34)$$

mit

$$D_x = 1 - \frac{a}{4} + x \cdot \frac{3+a}{4}.$$

In der folgenden Verallgemeinerung der Beziehung (10.33) betrachten wir nun das Kollektiv aller radialen Linien r durch den Mittelpunkt der Leitung zwischen x -Achse und y -Achse. Der zwischen y -Achse und einer beliebigen radialen Linie r eingeschlossene Winkel soll α sein. Der Winkel α überstreicht also den Bereich von

$$\alpha = 0,$$

wenn die radiale Linie in die y -Achse fällt, bis

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

wenn sie in die x -Achse fällt.

Aus Gleichung (10.33) kann folgende Form entwickelt werden:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = k(x). \quad (10.35)$$

Für einen beliebigen Punkt mit dem radialen Abstand r zum Mittelpunkt der Leitung gilt in analoger Weise:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 = k(x) \cdot g(\alpha), \quad (10.36)$$

wobei α der Winkel zwischen radialer Linie r und y -Achse ist. Aus der Differenz von (10.35) und (10.36) ergibt sich schließlich die zugehörige dritte Beziehung:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = k(x) \cdot [1 - g(\alpha)]. \quad (10.37)$$

Wir setzen für $g(x)$ die Funktion

$$g(\alpha) = \sin^2 \alpha \quad (10.38)$$

und erbringen den Nachweis für die Richtigkeit dieses Ansatzes, indem wir die damit gewonnene Lösung anschließend physikalisch ausdeuten.

(10.38) in (10.36) und (10.37) ergibt:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 = k(x) \cdot \sin^2 \alpha; \quad (10.39)$$

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = k(x) \cdot \cos^2 \alpha. \quad (10.40)$$

Multipliziert man (10.39) mit $\cos^2 \alpha$ und (10.40) mit $\sin^2 \alpha$ und zieht sie anschließend voneinander ab, ergibt sich nach Umformung die grundsätzliche Beziehung:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \sin^2 \alpha, \quad (10.41)$$

oder mit $y = y(x)$ und $r = r(x, \alpha)$:

$$r(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \sin^2 \alpha}}. \quad (10.42)$$

Die physikalische Ausdeutung und damit der Nachweis der Richtigkeit von (10.38) basiert auf folgenden Zusammenhängen: Die Kehrwerte von y , r und x sind normierte Werte der magnetischen Feldstärke. Der normierte Wert der Feldstärke $\frac{1}{r}$ setzt sich aus einer Komponente in Richtung der y -Achse, identisch mit der Richtung von $\frac{1}{y}$, zusammen, die der Projektion von $\frac{1}{y}$ auf die durch r beziehungsweise $\frac{1}{r}$ definierte Linie entspricht, und einer Komponente in Richtung der x -Achse, die analog der Projektion von $\frac{1}{x}$ auf r beziehungsweise $\frac{1}{r}$ entspricht. Die Menge aller zusammengehörigen Werte x , $r(x, \alpha)$ und $y(x)$ kennzeichnen nun eine Feldlinie der magnetischen Feldstärke des Erdstromes, die einen Bereich gleichen magnetischen Flusses $\Phi_E' [y(x)]$ und gleichen Stromes $I_E [y(x)]$ eingrenzt.

Aufgrund der Größe $y(x)$, die nach (10.33) für den Spezialfall der x -Achse berechnet wird und nach (10.42) mit einer beliebigen radialen Linie in Beziehung steht, ergibt sich aus (10.10) die gleichwertige Form:

$$I_E(x) = I_0 \cdot \frac{e^{g[y(x)]} \cdot \frac{d}{d[y(x)]} \{g[y(x)]\} \cdot y(x)}{\gamma}. \quad (10.43)$$

Die Interpretation der Identität der Ergebnisse $I_E(x) = I_E [y(x)] = I_E(y)$ nach (10.43) und (10.10) führt uns zu der Schlussfolgerung, dass ein Sektor, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Leitung liegt und der einen differentiell kleinen Öffnungswinkel $d\alpha$ besitzt, den gleichen differentiellen Beitrag zum Gesamtstrom repräsentiert, unabhängig davon, ob dieser Sektor die x -Achse beziehungsweise eine beliebige radiale Linie oder die y -Achse einschließt. Der Unterschied zwischen dem Initialmodell als gedanklichem Ausgangspunkt, die als komprimierte Form betrachtet werden kann, und der endgültigen Lösung kann als eine Entspannung nach Maßgabe der zu

$$y = y(x)$$

beziehungsweise

$$y = y(r, \alpha)$$

gehörigen Umkehrfunktion

$$x = x(y)$$

beziehungsweise

$$r = r(y, \alpha)$$

betrachtet werden.

Die Integration der Stromdichte nach Maßgabe der zusammengehörigen Werte einer Feldlinie, also den Werten x , $y(x)$ und $r(x, \alpha)$ muss für jeden differentiellen Sektor zum gleichen

Ergebnis führen. Deshalb gilt:

$$J(x) \cdot \pi x \cdot dx' = J(r) \cdot \pi r \cdot dr' = J(y) \cdot \pi y \cdot dy$$

oder :

$$J(x) = J(y) \cdot \frac{y \cdot dy}{x \cdot dx'}; \quad (10.44)$$

$$J(r) = J(y) \cdot \frac{y \cdot dy}{r \cdot dr'} = J(y) \cdot \frac{y \cdot dy}{x \cdot dx'} \cdot \frac{x \cdot dx'}{r \cdot dr'}; \quad (10.45)$$

Mit dem Strich im Symbol von dx' und dr' wird zum Ausdruck gebracht, dass der Änderung der effektiven Eindringtiefe, wie nachfolgend dargestellt, in besonderer Weise Rechnung getragen werden muss. Aus (10.33) errechnet sich:

$$\frac{x}{y} = \left[\frac{1}{x} + \frac{3}{4} + \frac{a}{4} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] \cdot x, \quad (10.46)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cdot \left(1 - \frac{a}{4} \right)}{x^2} = k_{Hx} \cdot k_{Dx}, \quad (10.47)$$

$$k_{Dx} = \frac{y \cdot \left(1 - \frac{a}{4} \right)}{x}, \quad (10.48)$$

$$k_{Hx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{k_{Dx}} = \frac{y}{x}. \quad (10.49)$$

k_{Dx} geht auf den Einfluss der von x abhängigen effektiven Eindringtiefe D_x zurück. Mit der zu $y(x) = y$ gehörigen konstanten Eindringtiefe D gilt ausgehend von (10.34):

$$\frac{y}{D} = \frac{x}{D_x}$$

oder

$$\frac{D}{D_x} = \frac{y}{x}.$$

Dieses variable Größenverhältnis wird also in (10.48) erfasst, wobei lediglich zusätzlich mit dem Faktor $1 - \frac{a}{4}$ die Singularität bei $x = 1$, die sich zwangsläufig aus (10.47) ergibt, in (10.48) berücksichtigt wird, da sich ja das Bildungsgesetz von D_x bei $x = 1$ sprunghaft ändert.

k_{Dx} folgt für $x \leq 1$ und $a = 0$ dem gleichen Bildungsgesetz wie k_{Hx} . Die Singularität des Bildungsgesetzes der zu x gehörigen Eindringtiefe, bei $x = 1$ kommt - wie gesagt- in (10.48) zum Ausdruck.

Für die Ableitung des magnetischen Flusses beziehungsweise des Stromes nach dx muss für die innere Ableitung der Differentialquotient nach (10.47) entsprechend (10.49) durch k_{Dx} dividiert werden, um nicht nur der Änderung des Weges nach dx , sondern auch der Änderung der effektiven Eindringtiefe D_x Rechnung zu tragen.

Der Faktor k_{Hx} markiert also das Verhältnis der zusammengehörigen Wertepaare $H_E(x)$ und $H_E(y)$ der magnetischen Feldstärken des Erdstromes für x - und y -Achse. Für den entsprechenden Faktor k_{Jx} der Stromdichte gilt analog:

$$k_{Jx} = \frac{y \cdot dy}{x \cdot dx \cdot k_{Dx}} = \frac{y^2}{x^2}. \quad (10.50)$$

Daraus erkennt man mit (10.44) den Zusammenhang:

$$dx' = dx \cdot k_{Dx}.$$

In Verallgemeinerung gilt schließlich für einen beliebigen radialen Abstand r von der Leitung:

$$k_{Jr} = \frac{y^2}{r^2} \quad (10.51)$$

mit

$$dr' = dr \cdot k_{Dr}.$$

nach (10.45). Auf die explizite Darstellung von k_{Dr} kann verzichtet werden.

Damit lassen sich ausgehend von den Beziehungen (4.53) - (4.58) schließlich die folgenden Beziehungen schreiben:

$$J(x) = -I_0 \cdot \frac{4\tau^2 \cdot [y(x)]^2}{D^2 \pi \gamma \cdot x^2} \cdot e^{g[y(x)]}, \quad D = 4\tau \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\omega \mu_0}} \quad (10.52)$$

$$J(r) = J(x, \alpha) = J(x) \cdot \frac{x^2}{r^2}, \quad (10.53)$$

$$H_L(y) = \frac{I_0}{2\pi D} \cdot \frac{1}{y(x)}, \quad (10.54)$$

$$H_E(y) = \frac{I_0}{2\pi D} \cdot \frac{e^{g[y(x)]} \cdot \frac{d}{d[y(x)]} \{g[y(x)]\}}{\gamma}, \quad (10.55)$$

$$H(y) = H_L(y) + H_E(y), \quad (10.56)$$

$$\frac{H(x)}{H(y)} = \frac{H_L(x)}{H_L(y)} = \frac{H_E(x)}{H_E(y)} = \frac{y(x)}{x}, \quad (10.57)$$

$$H(x) = H_L(x) + H_E(x), \quad (10.58)$$

$$H_E(r) = H_E(x, \alpha) = H_E(y) \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{[y(x)]^2}{x^2} \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \cos \beta, \quad (10.59)$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}, \quad (10.60)$$

$$b = \frac{dr}{d\alpha \cdot r} = \frac{-\frac{1}{[y(x)]^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{[y(x)]^2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{x^2} \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad (10.61)$$

$$\Phi_L'(x) = \Phi_L'(y) = \Phi_L'(r) = -I_0 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln [y(x)], \quad (10.62)$$

$$\Phi_E'(x) = \Phi_E'(y) = \Phi_E'(r) = -I_0 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{g[y(x)]}}{\gamma}, \quad (10.63)$$

$$\Phi'(x) = \Phi_L'(x) + \Phi_E'(x) = \Phi'(y) = \Phi'(r), \quad (10.64)$$

$$I_E(x) = I_E(y) = I_E(r) = I_0 \cdot \frac{e^{g[y(x)]} \cdot \frac{d}{d[y(x)]} \{g[y(x)]\} \cdot y(x)}{\gamma}. \quad (10.65)$$

Die magnetische Feldstärke $H_E(r)$ ergibt sich dabei aus der geometrischen Summe der Projektionen von $H_E(y)$ und $H_E(x)$ auf die radiale Linie r . β ist der Winkel zwischen dem Feldstärkevektor und der Senkrechten auf r .

Für die Gegeninduktivität gilt Beziehung (10.17), wobei entsprechend des engen Zusammenhangs mit (10.64) ebenfalls gilt:

$$M(x) = M(y) = M(r).$$

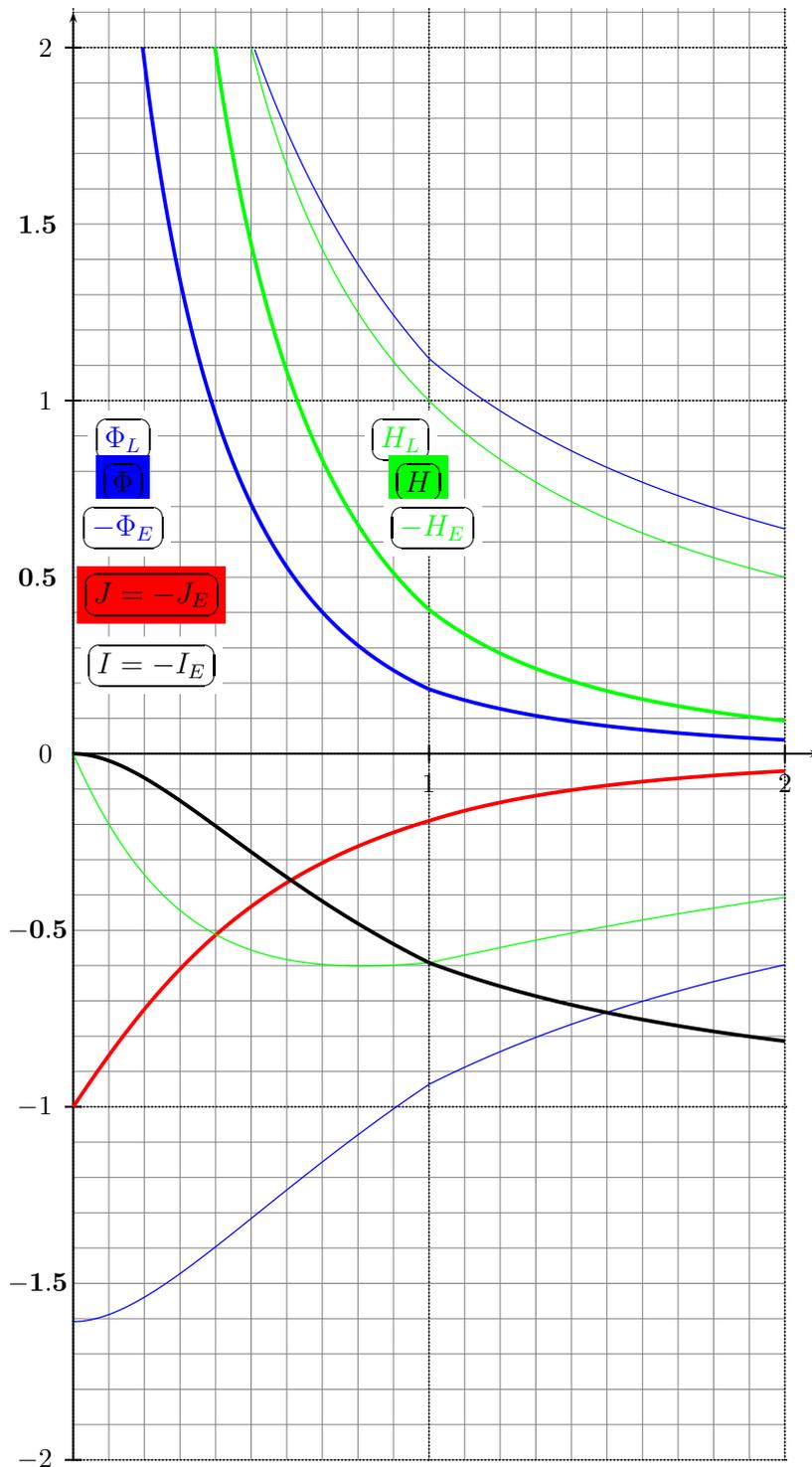


Abbildung 36: Erde als Rückleiter

Für die Leitung mit Rückleitung über Erde sind die Verläufe der maßgebenden elektrischen Größen für die x -Achse in Abbildung 36 wiedergegeben.

Die Werte der Ordinaten sind in Übereinstimmung mit den Abbildungen 9 - 13 wie folgt normiert:

- Stromdichte: auf den Maximalwert,
- magnetische Feldstärke: auf den zur Eindringtiefe D gehörigen Wert $H_L(x)$,
- magnetischer Fluss: auf den Wert $I_0 \cdot \mu_0 / 4\pi$
- Strom: auf den Maximalwert I_0 .

Die zu $x = 1$ gehörige Feldlinie ist wie eine Trennungslinie zwischen zwei aneinander angrenzende Schichten zu betrachten, deren Bildungsgesetze für die Berechnung der effektiven Eindringtiefe voneinander abweichen, weil bei dieser Feldlinie das mehrfach erwähnte $1/4$ des Erdstromes des Differenzmodells voll entfaltet ist, dessen Rolle bei der Aufspaltung des Vollmodells in zwei Halbmodelle beleuchtet wurde.

Der sich aus Beziehung (10.42) in Verbindung mit Beziehung (10.33) ergebende Verlauf der mit dem Erdstrom verbundenen magnetischen Feldlinien ist in Abbildung 37 dargestellt.

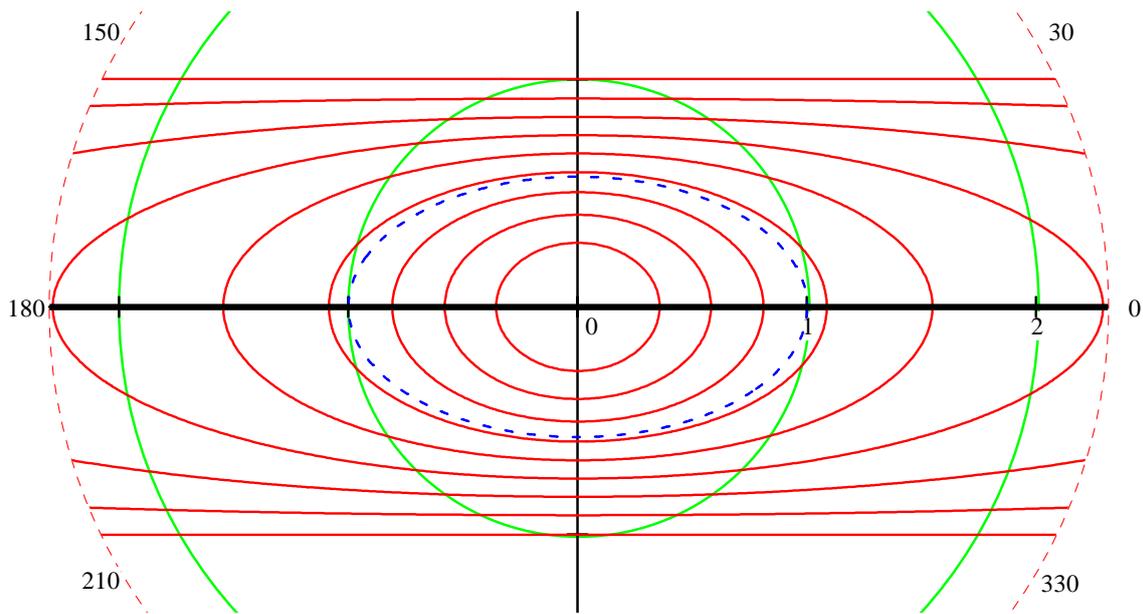


Abbildung 37: Magnetische Feldlinien des Erdstromes

Die beiden Parallelen zur x -Achse im Abstand D ($y = \pm 1$ in normierter Darstellung) markieren die Grenze der induktiven Beeinflussung im Erdreich und im Luftraum, also in vertikaler Richtung. Jenseits dieser Grenzlinien bei $y = \pm 1$ kompensieren sich die magnetischen Felder von Leitung einerseits und Erdstrom andererseits in idealer Weise und eine separate Darstellung der magnetischen Feldlinien für den Erdstrom erübrigt sich. In horizontaler Richtung spreizen sich die Feldlinien mit wachsendem Abstand von der Leitung immer weiter auf. Alle Ableitungen für die stromdurchflossene Leitung mit Erde als Rückleitung erlauben prinzipiell eine exakte Berechnung ohne Einschränkungen im Sinne einer Näherung. Voraussetzung ist, dass der Abstand a dieser Leitung und der Abstand h einer beeinflussten Leitung (Gegeninduktivität) zur Erdoberfläche gleich 0 sind:

$$a, h = 0$$

Alternativ darf ausgehend von $a, h \neq 0$ unter der Voraussetzung, dass diese Abstände a, h sehr klein gegenüber der Eindringtiefe D sind,

$$a, h \ll D,$$

auf die Berücksichtigung von a, h verzichtet werden und für den Wert von x in Gleichung (10.33) der kürzeste Abstand zwischen stromdurchflossener Leitung und beeinflusster Leitung in Ansatz gebracht werden. Welch hohen Ansprüchen an die Genauigkeit diese Näherung genügt, wird im folgenden Unterabschnitt dargelegt.

10.3 Vergleichende Betrachtung und Schlussfolgerung

Die Gegeninduktivität zwischen einer beeinflussenden Leitung mit Rückleitung über Erde und einer von ihr beeinflussten Leitung entspricht einem reellen Wert (siehe Gleichung (10.17)). Strom und Spannung in der Leitung mit Rückleitung über Erde erfahren eine Phasenverschiebung entsprechend den Erdverlusten. Die Höhe der induzierten Spannung in der beeinflussten Leitung ist abhängig vom Abstand zur beeinflussenden Leitung, dagegen gibt es aber **keine** Variation des Phasenwinkels dieser Spannung abhängig vom Abstand!

Hier liegt der entscheidende Dissens zu den Näherungsbeziehungen nach POLLACZEK [3], die von dem diffusen Begriff des „komplexen Gegeninduktivitätskoeffizienten“ ausgehen.

POLLACZEK unterzieht in [3] die Konsequenzen aus der „komplexen Gegeninduktivität“ hinsichtlich Abhängigkeit des Phasenwinkels der induzierten Spannung vom Abstand, keiner näheren Würdigung und Plausibilitätskontrolle. - Wie sollen ein Strom in definierten Phasenlage und ein Erdstrom in exakter Gegenphase gemeinsam Spannungen variabler Phasenlage induzieren?

POLLACZEK operiert mit dem Betrag der Gegeninduktivität und klammert damit in [3] das Problem der Phasenlage aus. Auf dieser Basis und mit der damit implizierten Einschränkung lassen sich die Ergebnisse von POLLACZEK und die vorstehenden Ableitungen vergleichen.

Für den Grenzfall, dass beeinflussende und beeinflusste Leitung auf Niveau der Erdoberfläche liegen, lässt sich die Fehlerabweichung der Näherungsbeziehung von POLLACZEK nach [3] unmittelbar berechnen:

Die Ungenauigkeit der Werte für die Gegeninduktivität liegt bei ca. 2%. Diese in Bild 9 der DIN VDE-Norm 0228 [4] eingeflossenen Werte der Gegeninduktivität genügen also sehr hohen Ansprüchen an die Genauigkeit.

Umgekehrt erlauben die Näherungsbeziehungen von POLLACZEK, nachzurechnen, welche Fehlerabweichung hingenommen wird, wenn der Abstand a der beeinflussenden Leitung zur Erdoberfläche und der Abstand h der beeinflussten Leitung vernachlässigt werden, solange für die Eindringtiefe gilt:

$$D \gg a, h.$$

Wir unterstellen dabei, dass in den Näherungsbeziehungen nach [3] hinsichtlich des Einflusses von a und h kein systematischer Fehler vorliegt und kommen beispielhaft zu folgendem Ergebnis:

Für einen festen gegenseitigen Abstand der Leitungen von 7 m und $f = 50\text{ Hz}$, $\rho = 100\ \Omega \cdot \text{m}$ sowie $a, h \leq 7\text{ m}$ variieren die Ergebnisse für die Gegeninduktivität abhängig von a, h um maximal 0,2%.

Dieser hohe Grad der Genauigkeit rechtfertigt also die Vernachlässigung von a, h für die Voraussetzung

$$a, h \ll D.$$

Die vorstehenden Ableitungen erlauben ohne Einschränkungen die Berechnung der induktiven Beeinflussung für den im Vordergrund des Interesses stehenden Niederfrequenzbereich. Die Anwendung auf eine Oberleitung, die ein System verkoppelter Leitungen darstellt, ist in Abschnitt 11 wiedergegeben.

11 Rechenverfahren für die induktive Beeinflussung

11.1 Einleitung

Ausgangspunkt der Überlegungen ist eine sehr lange (theoretisch unendlich lange) Leitung die - lediglich getrennt durch eine Isolierschicht - allseitig vom Medium Erde umgeben ist. An einem Ende der Leitung ist eine Wechselspannungsquelle zwischen Leitung und Erde angeschlossen, am entgegengesetzten Ende ein Lastwiderstand.

Dieser allseitig vom Medium Erde umgebene Leiter entspricht dem typischen Idealfall, der dadurch gekennzeichnet ist, dass dem sich ausbildenden elektrischen Strömungsfeld kein kanalisierender Zwang durch die Leiterform auferlegt ist. Unter diesen Bedingungen gilt allein die Eigengesetzlichkeit elektrischer Strömung wie sie in Unterabschnitt 4.1 - 4.3 wiedergegeben ist.

Im Abschnitt 2 ist dargestellt, dass für jeden Punkt des Erdreichs analog dem spezifischen Erdwiderstand ρ ein spezifischer induktiver Widerstand λ existiert, der der Beziehung folgt:

$$\lambda = \rho$$

Diese auf den ersten Blick verblüffende Erkenntnis lässt in einfacher Weise eine Überprüfung auf Plausibilität zu: Ohmscher und induktiver Widerstand entsprechen nach ihrer physikalischen Natur Quotienten, in deren Nenner der Strom steht. Dieser Strom ist in jedem differentiell kleinen Stromfaden für beide Größen trivialerweise identisch, d.h. auch die Nenner sind identisch. Aber auch die Zähler beider Größen sind über das den Stromfaden direkt umschlingende differentiell kleine Magnetfeld in fester gegenseitiger Beziehung, wobei das Induktionsgesetz (Änderung des Magnetflusses nach der Zeit) die Brücke zwischen den beiden Größen ρ und λ darstellt.

Mit $\rho = \lambda$ hat der resultierende spezifische komplexe Erdwiderstand immer den Betrag $\sqrt{2} \cdot \rho$ und einen festen Phasenwinkel von 45° !

Neben diese grundsätzliche Aussage ist die Tatsache zu stellen, dass die elektrische Feldstärke, die das Produkt aus Stromdichte und spezifischem komplexen Erdwiderstand bildet, an jedem Punkt auf induktivem Wege vollständig vom überlagernden Magnetfeld der Leitung kompensiert wird.

In der Mitte der Leitung, also weitab von Speise- und Lastpunkt, ist die resultierende Spannung im Erdreich überall gleich Null! (Die Besonderheiten im Bereich von Speise- und Lastpunkt sind nicht Gegenstand dieser Ausarbeitung.)

Ausgehend von vorgenannten Grunderkenntnissen ist in Abschnitt 4 die Differentialgleichung für die Betragsgleichheit von ohmschem und induktivem Spannungsabfall in jedem Stromfaden des Erdstroms unter den Bedingungen einer Koaxialleitung (Leiter allseitig von Erde als Rückleiter umgeben) aufgestellt und gelöst. Damit ist der Zugang gefunden zur Berechnung aller relevanten elektrischen Größen.

In Abschnitt 10 ist ergänzend zu dieser Berechnung dargestellt, wie die Modellvorstellung von der allseitig mit Erdreich umgebenen Leitung auf die realen Verhältnisse einer Leitung über der als Ebene angenommenen Erde, rechnerisch übertragen wird. Die Ergebnisse sind nachfolgend zusammengestellt.

Leiter mit Erde als Rückleitung:

$$J(y) = J_0 \cdot e^{g(y)}$$

$$J_0 = -\frac{I_0 \cdot 4\tau^2}{D^2\pi \cdot \gamma}$$

$$H(y) = H_D \cdot \left\{ \frac{1}{y} + \frac{e^{g(y)} \cdot \frac{d}{dy} [g(y)]}{\gamma} \right\}$$

$$H_D = \frac{I_0}{2\pi D}$$

$$I_E(y) = I_0 \cdot \frac{e^{g(y)} \cdot \frac{d}{dy} [g(y)] \cdot y}{\gamma}$$

$$\Phi'(y) = \Phi_0' \cdot \left[-\ln y - \frac{e^{g(y)}}{\gamma} \right]$$

$$\Phi_0' = \frac{\mu\mu_0 \cdot I_0}{2\pi}$$

$$\Phi_L' = -\Phi_0' \cdot \ln y$$

$$\Phi_E' = -\frac{\Phi_0'}{\gamma} \cdot e^{g(y)}$$

$$M(y) = M_0 \cdot \left[-\ln y - \frac{e^{g(y)}}{\gamma} \right]$$

$$M_0 = \frac{\mu\mu_0}{2\pi}$$

$$L_n = M_0 \cdot \left[\ln \frac{D}{b} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} \right] = M_L - M_E$$

$$M_L = M_0 \cdot \left[\ln \frac{D}{b} + \frac{1}{2} \right]$$

$$M_E = \frac{M_0}{\gamma} \approx 160 \frac{\mu H}{km}$$

$$\overline{Z_n'} = 2\pi f \cdot (M_E + jL_n) = Z_n' \cdot e^{j(90^\circ - \delta)}$$

$$Z_n' = 2\pi f \cdot \sqrt{M_E^2 + L_n^2}$$

$$\delta = \arctan \frac{M_E}{L_n}$$

$$\overline{Z_w'} = \overline{Z_n'} + \frac{1}{\lambda \cdot q}$$

$$e^{g(y)} = \sum_{v=0}^{v \rightarrow \infty} \frac{(-1)^v}{(v!)^2} \cdot (\tau \cdot y)^{2v}$$

$$y = \frac{s}{D}$$

$$D = 4\tau \cdot \sqrt{\frac{\rho}{2\pi f \cdot \mu\mu_0}}$$

$$\tau = 1, 202\,413 \dots \quad \gamma = 1, 248\,459 \dots$$

Für $v = 10$ ergibt sich bereits eine Konvergenz der Glieder mit einer geringeren Abweichung als 10^{-9} .

Legende:

J	Stromdichte
H	magnetische Feldstärke
I_E	Erdstrom
Φ'	magnetischer Fluss (pro Längeneinheit)
M	Gegeninduktivität stromdurchflossener Leiter zu beeinflusstem Leiter (pro Längeneinheit)
L_n	Induktivität des stromdurchflossenen Leiters mit Erde als Rückleitung (pro Längeneinheit)
$\overline{Z_n'}$	Komplexer Grundwiderstand des stromdurchflossenen Leiters mit Erde als Rückleitung (pro Längeneinheit)
Z_n'	Betrag von $\overline{Z_n'}$
δ	Verlustwinkel für die Erdverluste
$\overline{Z_w'}$	Komplexer Widerstand des Leiters (pro Längeneinheit) mit Berücksichtigung des Widerstandsbelages des Leiters
q	Querschnitt des Leiters
b	Radius des Leiters
κ	spezifische Leitfähigkeit des Leiters
f	Frequenz
μ_0	magnetische Feldkonstante
μ	relative magnetische Permeabilität
ρ	spezifischer Widerstand des Erdreiches
s, s_y	vertikaler Abstand zum Leiter
D	Eindringtiefe
y	Auf die Eindringtiefe normierter Wert von s

In der Formel für M_L ist die innere Induktivität des Leiters $\frac{M_0}{2}$ berücksichtigt. Die Gegeninduktivität $M(y)$ bezieht sich auf den nicht kompensierten Teil des magnetischen Flusses, der den beeinflussten Leiter bei y umschlingt. Das ist von y aus, der von der beeinflussenden Leitung abgewandte Teil des Flusses. Der Verlauf des magnetischen Flusses in dem Diagramm nach Abbildung 36 (Unterabschnitt 10.2) ist darauf abgestellt. y ist die auf die Eindringtiefe D normierte Größe nach der Beziehung

$$y = \frac{s}{D} \quad \text{mit} \quad s = s_y.$$

D ist die Eindringtiefe senkrecht unter der Leitung. Sie definiert einen konkreten Punkt, bis zu dem die Induktionswirkung der stromdurchflossenen Leitung reicht. Bei dem Punkt $s = D$ hat sich der Erdstrom voll entfaltet und kompensiert die Induktionswirkung des Leitungstromes für alle Punkte $s \geq D$ beziehungsweise $y \geq 1$.

Für eine erste Veranschaulichung der Beziehungen und ihrer Ergebnisse soll für einen Fahrdrabt mit Erde als Rückleitung sein komplexer Widerstand berechnet werden. Berechnet wird der Grundwert $\overline{Z_n'}$, d.h., exklusiv für den Fahrdrabt, ohne seinen Widerstandsbelag und die Verkoppelungen mit den übrigen Leitern (z.B. Schienen) zu berücksichtigen.

Berechnet wird weiterhin der Wert $\overline{Z_w'}$, der den Widerstandsbelag beinhaltet, und die Eindringtiefe D .

Fahrdraht:	Querschnitt	$q = 120 \text{ mm}^2$
	spez. Leitfähigkeit	$\kappa = 47 \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$
	spez. Erdwiderstand	$\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$
Frequenz:		$f = 16 \frac{2}{3} \text{ Hz}$
		$L_n = 2.625 \frac{\mu\text{H}}{\text{km}}$
		$\overline{Z_n'} = (0,017 + j 0,275) \frac{\Omega}{\text{km}} = 0,275 \cdot e^{j86,5^\circ} \frac{\Omega}{\text{km}}$
		$\overline{Z_w'} = (0,194 + j 0,275) \frac{\Omega}{\text{km}} = 0,337 \cdot e^{j54,8^\circ} \frac{\Omega}{\text{km}}$
		$D = 4.194 \text{ m}$
Frequenz:		$f = 50 \text{ Hz}$
		$L_n = 2.515 \frac{\mu\text{H}}{\text{km}}$
		$\overline{Z_n'} = (0,050 + j 0,790) \frac{\Omega}{\text{km}} = 0,792 \cdot e^{j86,4^\circ} \frac{\Omega}{\text{km}}$
		$\overline{Z_w'} = (0,228 + j 0,790) \frac{\Omega}{\text{km}} = 0,822 \cdot e^{j73,9^\circ} \frac{\Omega}{\text{km}}$
		$D = 2.421 \text{ m}$

Jedem der Werte $I_E(y)$, $\Phi_E'(y)$ entlang der Senkrechten entspricht ein identischer Wert $I_E(x) = I_E(y)$, $\Phi_E'(x) = \Phi_E'(y)$ entlang der Horizontalen durch den stromdurchflossenen Leiter, also parallel zur Erdoberfläche.

x ist hierbei wieder eine normierte Größe $x = \frac{s}{D}$, wobei in diesem Fall für $s = s_x$ entlang der Horizontalen gilt.

Korrespondierende Werte von x und y folgen der Beziehung:

$$y = \frac{x}{1 + \frac{3}{4}x} \quad x \leq 1$$

und

$$y = \frac{x}{\frac{3}{4} + x} \quad x \geq 1.$$

Daraus erkennt man, dass die Feldwirkungen der magnetischen Induktion in der Horizontalen entsprechend weiter reichen, und dass im Endlichen kein konkreter Punkt existiert, für den sie völlig auf Null abgeklungen sind.

Hat der Leiter zur Erdoberfläche den Abstand a und ein beeinflusster Leiter den Abstand h zur Erdoberfläche, so kann deren Einfluss wegen

$$a, h \ll D$$

vernachlässigt werden und für x der kürzeste Weg zwischen beiden Leitungen in Ansatz gebracht werden, um die Gegeninduktivität zu berechnen.

11.2 System verkoppelter Leitung

11.2.1 Allgemeines

Bei einem System von mehreren benachbarten Leitungen mit Erde als Rückleitung wie z.B. der Oberleitung einer Eisenbahn ist jeder Leiter mit allen anderen verkoppelt. Die Lösung dieser Aufgabe ist vom Prinzip her die Lösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, wobei n für die Zahl der beteiligten Leiter steht.

Die Definition der benutzten Größen und die maßgebenden rechnerischen Beziehungen sind nachfolgend dargestellt. Die Impedanzen \overline{Z}_n und \overline{Z}_L sind auf die Längeneinheit bezogene Größen, wobei aber nachfolgend zur Vereinfachung auf den Strich im Symbol (wie \overline{Z}_n') verzichtet wird.

11.2.2 Definitionen

Leitungsstrom \overline{I}_L und Streckenwiderstand \overline{Z}_L

Der Gesamtstrom \overline{I}_L im Leitungssystem, eingespeist in Fahrdrabt und Trageil (bei 2-gleisiger Strecke in beide Fahrdrähte und Trageile), ist die Bezugsgröße.

Weitere Bezugsgrößen sind der das Leitungssystem mit dem Gesamtstrom \overline{I}_L charakterisierende resultierende Streckenwiderstand \overline{Z}_L und schließlich der (analog \overline{Z}_L auf die Längeneinheit bezogene) Spannungsabfall

$$\overline{U}_L = \overline{I}_L \cdot \overline{Z}_L \quad (11.1)$$

als Produkt von Strom und Streckenwiderstand.

Spannungsverhältnis u_n'

Die in den einzelnen Leitern eingeprägte Summenspannung wird als

$$u_n' \cdot \overline{U}_L = u_n' \cdot \overline{I}_L \cdot \overline{Z}_L$$

definiert. u_n' ist also die auf den Wert $\overline{U}_L = \overline{I}_L \cdot \overline{Z}_L$ normierte Summenspannung. Sie umfasst die Induktionswirkungen aller Nachbarleitungen und bei Fahrdrabt und Trageil zusätzlich den galvanisch eingepprägten Spannungsabfall:

$$\overline{U}_L = \overline{I}_L \cdot \overline{Z}_L.$$

n	steht für die Bezeichnung der einzelnen Leiter.
O	Fahrdrabt der Oberleitung
T	Trageil
K	Kompensationsleiter
R	Rechte Schiene
L	Linke Schiene
Z	Rückleiterseil

Der negative Wert

$$-u_n' \cdot \overline{U}_L$$

beziehungsweise für Fahrdrabt und Trageil

$$(1 - u_n') \cdot \overline{U}_L$$

ist dann identisch mit dem Spannungsabfall an dem komplexen Gesamtwiderstand des Leiters. Die Summe aus eingepprägter Spannung und Spannungsabfall ist 0 beziehungsweise für Fahrdrabt und Trageil gleich \overline{U}_L oder normiert: 1.

Stromverhältnis w_n und Leitungsfaktor F_n

w_n steht für das Verhältnis von Strom \overline{I}_n im Leiter n zum Gesamtstrom \overline{I}_L :

$$w_n = \frac{\overline{I}_n}{\overline{I}_L}. \quad (11.2)$$

Der Leitungsfaktor F_n ist die den Leiter kennzeichnende Größe nach der Beziehung:

$$F_n = \frac{\overline{Z}_n}{R_n + \overline{Z}_n}. \quad (11.3)$$

R_n ist der Widerstandsbelag, \overline{Z}_n der komplexe Grundwiderstand der Leitung n mit Erde als Rückleitung.

11.2.3 Rechnerische Beziehungen

Mit vorstehenden Definitionen errechnet sich:

$$w_n = \frac{\overline{I}_n}{\overline{I}_L} = \frac{u_n' \cdot \overline{I}_L \cdot \overline{Z}_L \cdot \overline{Z}_n}{(R_n + \overline{Z}_n) \cdot \overline{I}_L \cdot \overline{Z}_n} = u_n' \cdot F_n \cdot \frac{\overline{Z}_L}{\overline{Z}_n}.$$

Nach (11.3) ist:

$$F_n = \frac{\overline{Z}_n}{R_n + \overline{Z}_n}. \quad n \dots O, T, K, R, L, Z$$

Daraus leiten sich folgende Beziehungen ab:

$$u_n' = \frac{w_n \cdot \overline{Z}_n}{F_n \cdot \overline{Z}_L}; \quad (11.4)$$

$$u_n'' = u_n' \cdot F_n = w_n \cdot \frac{\overline{Z}_n}{\overline{Z}_L}; \quad (11.5)$$

(u_n'' ist der Anteil der normierten Spannung u_n' , der für die Verkopplung mit den anderen Leitungen maßgebend ist.)

$$w_n = u_n'' \cdot \frac{\overline{Z}_L}{\overline{Z}_n}. \quad (11.6)$$

Für den Fahrdrabt der Oberleitung und das Trageil gilt speziell:

$$\frac{w_O}{w_T} = \frac{u_O'' \cdot \overline{Z}_T}{u_T'' \cdot \overline{Z}_O} = \frac{\frac{u_O''}{\overline{Z}_O}}{\frac{u_T''}{\overline{Z}_T}}. \quad (11.7)$$

Da Fahrdrabt und Trageil den gesamten Strom führen, erhalten wir:

$$w_O + w_T = 1. \quad (11.8)$$

Somit lässt sich auch schreiben:

$$w_O = \frac{w_O}{w_O + w_T} = \frac{\frac{w_O}{w_T}}{\frac{w_O}{w_T} + 1}. \quad (11.9)$$

Setzt man (11.7) in (11.9) ein, ergibt sich:

$$w_O = \frac{\frac{u_O''}{\overline{Z_O}}}{\frac{u_O''}{\overline{Z_O}} + \frac{u_T''}{\overline{Z_T}}}. \quad (11.10)$$

Aus (11.6) und (11.10) ergibt sich mit $n = 0$

$$\begin{aligned} \overline{Z_L} &= w_O \cdot \frac{\overline{Z_O}}{u_O''}; \\ \overline{Z_L} &= \frac{1}{\frac{u_O''}{\overline{Z_O}} + \frac{u_T''}{\overline{Z_T}}}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Die Größen $\frac{u_O''}{\overline{Z_O}}$ und $\frac{u_T''}{\overline{Z_T}}$ sind die Kehrwerte der für den Fahrdrabt der Oberleitung O und das Trageil T maßgebenden effektiven und auf die Längeneinheit bezogenen komplexen Widerstände. Effektiv bedeutet, dass die Verkopplung mit den anderen Leitungen eingeflossen ist. Dass der Streckenwiderstand $\overline{Z_L}$ sich aus diesen effektiven Widerständen analog der Formel für parallel geschaltete Widerstände bildet, erkennt man aus (11.11) unmittelbar.

Die Ableitungen (11.7) bis (11.11) können für die eingeleisige Strecke unmittelbar nachvollzogen werden. Für die 2-gleisige Strecke ergibt sich im Vergleich hierzu eine Parallelschaltung von 4 Leitungen, nämlich je 2 Fahrdrähte der Oberleitung O und Trageile T . Unter der Bedingung der Symmetrie ergibt sich deswegen die Hälfte des in (11.11) angegebenen Wertes. Dass sich dabei freilich für die 2-gleisige Strecke ein von der 1-gleisigen Strecke abweichender Wert von u_O'' sowie von u_T'' ergibt, sei besonders hervorgehoben. Denn in diesen Werten spiegelt sich ja die resultierende Verkopplung, die natürlich für 1-gleisige Strecke und 2-gleisige Strecke nicht identisch sein können.

Mit dem für die Kopplung maßgebenden normierten Spannungsabfall nach (11.5)

$$u_n'' = u_n' \cdot \overline{F_n}$$

ergibt sich die Summe der Induktionswirkungen in normierter Form

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} u_m' \cdot F_m \cdot u_{mn} = \sum_{m=1}^{m=n-1} u_m'' \cdot u_{mn} \quad (11.12)$$

für alle $m = n - 1$ Nachbarleitungen. n steht hier für die Gesamtzahl aller verkoppelten Leitungen. Daraus ergeben sich schließlich die n Gleichungen mit n Unbekannten zu:

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} u_m'' \cdot u_{mn} + \frac{u_n''}{F_n} = 0 \quad (1) \quad (11.13)$$

(1 auf der rechten Gleichungsseite gilt für Fahrdrabt und Trageil, an die ja die Spannung galvanisch angelegt ist.)

Der Faktor

$$\frac{u_n''}{F_n} = u_n'$$

ergibt sich aus (11.5) und entspricht der normierten Summenspannung als resultierende Größe. Die in (11.13) gegebene Verknüpfung mit dem positiven Vorzeichen bedeutet, dass jedes zum Summenzeichen gehörige Glied zwar von u_n' abzuziehen ist, aber die gegeninduktive Wirkung sich ihrerseits in einem negativen Vorzeichen manifestiert, so dass sich resultierend eine Verknüpfung mit positivem Vorzeichen ergibt.

u_{mn} ist das Verhältnis von Gegeninduktivität zu Selbstinduktivität der Leitung m relativ zu Leitung n :

$$u_{mn} = \frac{M(x)}{L_m} \quad (11.14)$$

mit x als Abstand zwischen Leitung n und m .

Bei symmetrischen Systemen wie einer 2-gleisigen Strecke treten die Unbekannten paarig auf; es existieren also nur $n/2$ echte Unbekannte. Dies muss gegebenenfalls (abhängig von der Rechenmethode) zur Vermeidung von großen Ungenauigkeiten durch geeignete Zusammenfassung berücksichtigt werden.

Für einen beeinflussten, **nicht** beidseitig geerdeten Leiter ergibt sich die induzierte Spannung in prinzipiell gleicher Weise. In dessen Gleichung werden die vorher berechneten Unbekannten des verkoppelten Systems geerdeter Leiter eingeführt.

Der danach sich ergebende auf $\overline{I_L} \cdot \overline{Z_L}$ normierte Spannungswert muss dann noch mit $\overline{Z_L}$ multipliziert werden, um die auf den Strom $\overline{I_L}$ und die Längeneinheit normierte Beeinflussungsspannung zu erhalten:

$$\frac{\overline{U_B}}{\overline{I_L}} = \overline{Z_L} \cdot \sum_{m=1}^{m=n} u_m'' \cdot u_{mn}. \quad (11.15)$$

Weiterhin errechnet sich der auf den gesamten Leitungsstrom $\overline{I_L}$ bezogene Strom $\overline{I_n}$ jedes Leiters n aus (11.6) in Verbindung mit (11.2). Der negative Wert der Summe aller Leitungsströme (einschließlich $\overline{I_O}$ und $\overline{I_T}$) ergibt schließlich den Erdstrom $\overline{I_E}$.

11.3 Die Darstellung der Ergebnisse und Anmerkungen zum Rechenverfahren

Die Werte der Gegeninduktivität $M = M(x) = M[y(x)]$ entlang der Horizontalen sind bei doppeltlogarithmischer Darstellung in Abbildung 38 wiedergegeben. In dieser Darstellung ist wieder die Eindringtiefe D die fundamentale Bezugsgröße. Der Abstand (in m) zur Leitung wird mit a bezeichnet. i ist dagegen lediglich eine proportionale Größe zu a . Im einzelnen gelten folgende rechnerische Beziehungen:

Nach (10.5) ist:

$$D = 4\tau \cdot \sqrt{\frac{\rho}{2\pi f \cdot \mu_0}}.$$

Daraus ergibt sich:

$$x = \frac{a}{D} = \sqrt{\frac{\pi \cdot \mu_0}{8\tau^2}} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{f}{\rho}} = \frac{i}{p}; \quad (11.16)$$

$$i = p \cdot x = \frac{a}{m} \cdot \sqrt{\frac{f}{Hz} \cdot \frac{\Omega m}{\rho}}; \quad (11.17)$$

$$p = \sqrt{\frac{8\tau^2}{\pi \cdot \mu_0}} \cdot \sqrt{\frac{\Omega s}{m}} = 1.712. \quad (11.18)$$

Für $a = 1.712 m$ und $\sqrt{\frac{f}{Hz} \cdot \frac{\Omega m}{\rho}} = 1$ nimmt x den Wert 1 an:

$$x = 1 \quad \text{für} \quad a = 1.712 m, \quad \sqrt{\frac{f}{Hz} \cdot \frac{\Omega m}{\rho}} = 1. \quad (11.19)$$

Aus (10.33) errechnet sich $y = y(x)$ und schließlich aus (10.17)

$$M(x) = M[y(x)].$$

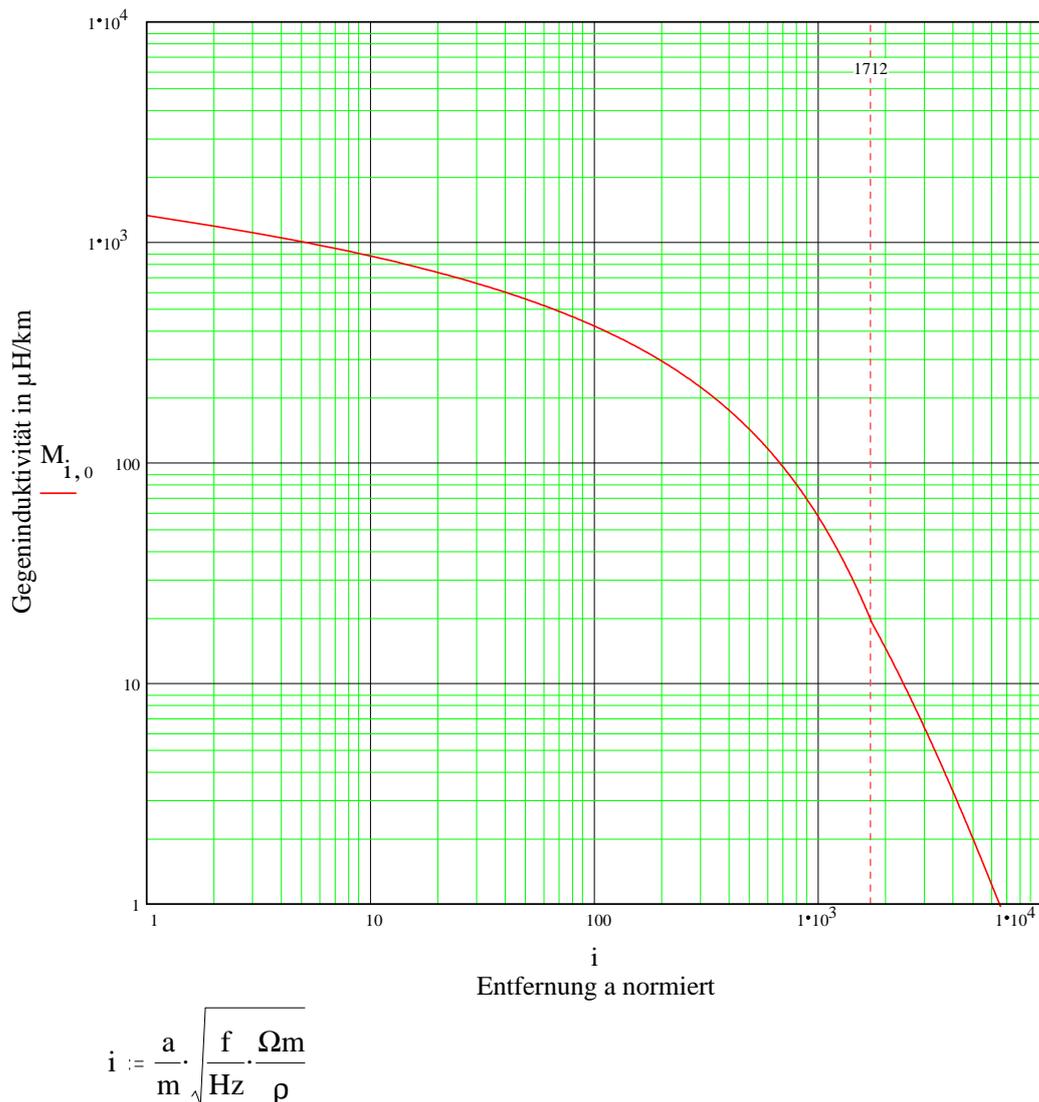
Abbildung 38: Gegeninduktivität M

Abbildung 38 ist weitgehend identisch mit Bild 9 der DIN VDE-Norm 0228 (ab 01.04.2013 ersetzt durch DIN VDE-Norm 0845-6-1) und stellt den Verknüpfungspunkt mit der nationalen deutschen [5] sowie der internationalen Normung [6] nach CCITT/ITU beziehungsweise ITU-T Rec. dar. Diese Normung fußt auf den theoretischen Grundlagen von POLLACZEK [4], dessen Arbeit hier im Wesentlichen nochmals bestätigt wird. Zur Diskussion der Phasenverhältnisse wird allerdings auf Abschnitt 10 verwiesen.

Dargestellt ist in Abbildung 38 der Betrag der auf 1 km bezogenen Gegeninduktivität M zwischen zwei Einfachleitungen mit Rückleitung über Erde in Abhängigkeit vom Abstand a , vom spezifischen Widerstand des Erdreiches ρ und von der Frequenz f .

Die am diskreten Punkt von $i = 1.712 m$ an sich gegebene Unstetigkeit in der Steigung der Kurve für M kommt in der Darstellung nach DIN VDE-Norm 0228 nicht zum Ausdruck. Die Abweichung ist freilich gering, bewegt sich in der Größenordnung der Zeichengenauigkeit und wird in der Näherungsbeziehung nach POLLACZEK nicht erkannt.

Mit dem neuen theoretischen Zugang, wie er vorstehend geschildert ist, können nun aber die Werte der Kurve nach Abbildung 38 auf direktem Wege berechnet werden. Graphische Methoden sowie die Nachbildung mit Näherungspolynomen aus Tabellenwerten, wie es den

angesprochenen Normen entspricht, sind also entbehrlich.

Die Begriffskonstruktion der sogenannten komplexen Gegeninduktivität, die der einfachen Interpretation von Rechenergebnissen im Wege steht, kann aufgegeben werden. Denn eine Gegeninduktivität hat ihrer Natur nach immer nur einen Realteil. Die Erde als Rückleitung dagegen bedeutet eine Belastung mit einem Phasenwinkel von 90° , vermindert um den Verlustwinkel δ .

Dieser Phasenwinkel ist von der Gegeninduktivität zu trennen. Beachtet man diesen Zusammenhang, so erkennt man, dass die Kurve nach Abbildung 38 nicht nur relativ einfach berechnet werden kann, sondern auch bereits die Problematik in ihrer Gesamtheit beinhaltet. Für neue Anwendungsfälle muss also nicht erneut der für eine fehlerfreie Anwendung sehr anspruchsvolle und einfacher Interpretation der Ergebnisse schwer zugängliche Weg über Tabellen und Näherungspolynome nach CCITT-Norm gegangen werden.

11.4 Anwendung des Rechenverfahrens

Die Eigenschaften des beschriebenen Rechenverfahrens für das Problem der induktiven Beeinflussung von Leitungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Bewältigung in einem leistungsfähigen wissenschaftlichen Taschenrechner,
- gemessen am Problem kurze Rechenzeiten,
- Transparenz des Rechengangs und damit
- gute Interpretationsmöglichkeit der Ergebnisse.

Die Anwendung soll an dem Beispiel der Neubaustrecke Madrid - Sevilla (AVE) vorgestellt werden. In den Bildern 40 bis 45 sind nachfolgend die Beeinflussungsverhältnisse für ausgewählte Annahmen dargestellt:

- Die Kurven der Beeinflussungsspannung sind abhängig vom Abstand des beeinflussten Leiters von der Gleisachse dargestellt, wobei Verlegung auf Niveau der Schienen angenommen ist.
- Die Aufteilung des Triebströmes auf Strom im Erdreich, Strom in den Schienen sowie in den Rückleiterseilen ist angegeben.
- Schließlich ist der spezifische Streckenwiderstand angegeben.

Alle angegebenen Phasenwinkel und Prozentangaben von Strömen sind auf den Gesamtwert des in der Oberleitung (Fahrdrabt und Trageil) fließenden Traktionsstromes bezogen. Die Abkürzungen bedeuten:

<i>ZSTR</i>	Spezifischer Streckenwiderstand des Gesamtsystems Oberleitung einschließlich Schienen und Rückleiterseilen
<i>IERD</i>	Rückstrom über Erde
<i>O</i>	Strom im Fahrdrabt der Oberleitung
<i>T</i>	Strom in Trageil
<i>R</i>	Strom in rechter Schiene
<i>L</i>	Strom in linker Schiene
<i>Z</i>	Strom im Rückleiterseil
<i>UBEV</i>	Beeinflussungsspannung

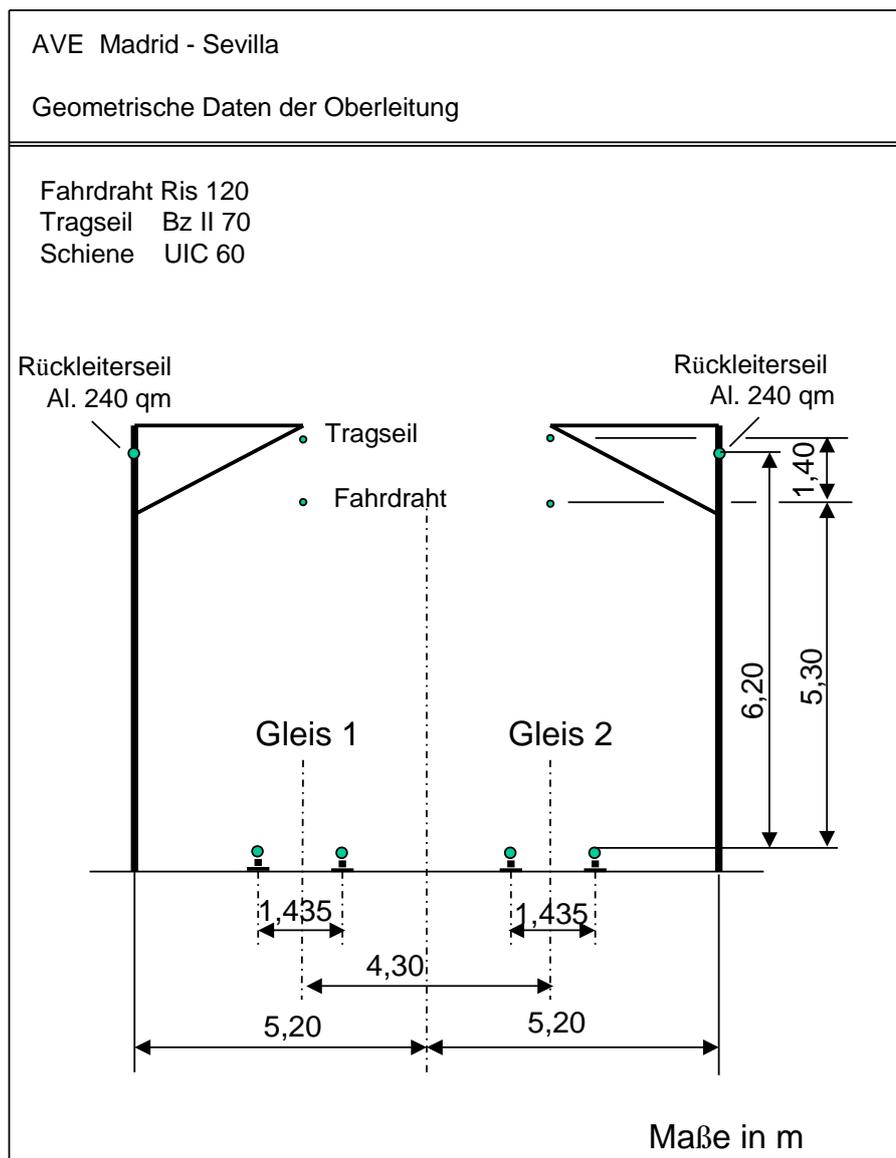


Abbildung 39: Geometrische Daten der Oberleitung

Abbildung 39 und Tabelle 1 können die relevanten Daten für die Oberleitung der Neubau-
strecke AVE Madrid - Sevilla entnommen werden.

Tabelle 1

	Bezeichnung	Querschnitt	Spez. Widerstand
Schiene	UIC 60	St 7690 mm ²	170 Ω mm ² /km
Fahrdrabt	RIS 120	Cu 120 mm ²	21,1 Ω mm ² /km
Tragseil	Bz II 70	Bz 70 mm ²	30,0 Ω mm ² /km
Rückleiterseil	Aluminiumleiter	Al 240 mm ²	29,0 Ω mm ² /km
Alternative: Bänderder	3 mm x 40 mm	Fe 120 mm ²	170 Ω mm ² /km

AVE Madrid - Sevilla, Materialdaten zur Oberleitung

11.4.1 Die induktive Beeinflussung im normalen Betriebsfall

In Abbildung 40 sind die Beeinflussungsverhältnisse für die AVE-Strecke für den Normalfall angegeben. Dieser betrifft die 2-gleisige Strecke mit Regelabstand zwischen beiden Gleisen und eingeschalteter Oberleitung für beide Gleise.

Die Kurve der Beeinflussungsspannung lässt folgende Charakteristik erkennen:

- Flaches Maximum etwa bei 10 m Abstand von der Streckenachse.
- Steiler Abfall in der Nähe der Schienen, die als Reduktionsleiter wirken. (Praktisch kann dieser Abfall bis auf theoretisch 0 nicht genutzt werden, weil der beeinflusste Leiter nicht beliebig nahe an den Reduktionsleiter herangebracht und schon gar nicht quasi in diesen integriert werden kann.)
- Zögernder Abfall rechts und links der Streckenachse mit nennenswerten Beeinflussungsspannungen in Bereichen, die weitab vom Gleis liegen.

Die nähere Untersuchung der Ergebnisse zeigt, dass der Einfluss der sich aus dem Produkt aus Querschnitt und spezifischer Leitfähigkeit der beteiligten Rückleiter (Schienen und Rückleiterkabel) ergebenden Widerstandsbeläge in den Hintergrund tritt gegenüber dem dominierenden Einfluss der geometrischen Lage der Leiter zueinander und der Leiterquerschnitte, letztere im Hinblick auf die sich danach berechnenden Werte der Induktivität der einzelnen Leiter.

Die Schienen wurden in die Berechnung wie runde Leiter gleichen Querschnitts mit einer relativen magnetischen Permeabilität von $\mu = 2,75$ behandelt. Dies ist ein Schätzwert. Auf nennenswert höhere Werte als $\mu = 2,75$ reagieren die berechneten Werte der Beeinflussungsspannung empfindlich im Sinne einer Erhöhung! Welcher genaue Wert bei den geschilderten Annahmen exakt in Ansatz zu bringen ist, kann nur eine nähere Untersuchung und Messung erbringen.

11.4.2 Zweigleisige Strecke mit einer abgeschalteten Oberleitung

In Abbildung 41 sind die Beeinflussungsverhältnisse dargestellt, wenn bei einer zweigleisigen Strecke eine Fahrleitung vorübergehend abgeschaltet wird. Die Beeinflussungsspannungen sind hierfür beträchtlich höher. Für den typischen Maximalwert der Beeinflussungsspannung beträgt die Erhöhung ca. 16 %. Die Aufteilung des Rückstromes auf die verschiedenen Rückleiter verschiebt sich zwischen den beiden Streckengleisen, während der Erdstrom nahezu konstant bleibt. Der Streckenwiderstand wächst fast auf den doppelten Wert an.

11.4.3 Eingleisige Strecke

In Abbildung 42 sind die Verhältnisse für den Fall einer eingleisigen Strecke mit Rückleiterseil nach AVE - Standard dargestellt.

Mit den aufgezeigten Werten kann bei Vergleich mit der zweigleisigen Strecke die Kenntnis und richtige Einschätzung der Zusammenhänge vertieft werden.

Für die richtige Schlussfolgerung darf jedoch nicht übersehen werden, dass der maximale Betriebsstrom nur die Hälfte des Stromes der zweigleisigen Strecke ausmacht.

11.4.4 Der Einfluss des spezifischen Erdwiderstandes

Abbildung 43 vermittelt einen Eindruck, welcher Einfluss davon zu erwarten ist, wenn der tatsächliche spezifische Erdwiderstand geringer ist als $\rho = 100 \Omega \cdot m$.

Für den konkreten Wert von $50 \Omega \cdot m$, also den halben Erdwiderstand, sinkt die Beeinflussungsspannung nur geringfügig ab, der typische Maximalwert z.B. nur um ca. 2 %.

11.4.5 Alternative ohne Rückleiterseil

Abbildung 44 ist einer Ausrüstung der Strecke nach dem Standard der Neubaustrecken(NBS) der Deutschen Bundesbahn(DB) (mit eingepflügtem Bänderder) gewidmet.

Die Beeinflussungsspannungen für diese Alternative sind deutlich höher. Der Unterschied zeigt die deutliche Überlegenheit der für die AVE-Strecke realisierten Lösung mit Rückleiterseil, das im Hinblick auf die Beeinflussung unter den harten Bedingungen einer Frequenz von 50 Hz statt $16\frac{2}{3}\text{ Hz}$ unverzichtbar erscheint.

11.4.6 Der Einfluss der Frequenz

In Abbildung 45 ist schließlich zur Vertiefung des Verständnisses der hypothetische Fall dargestellt, dass bei sonst unveränderten Verhältnissen die AVE-Strecke mit $16\frac{2}{3}\text{ Hz}$ betrieben wird. Das Niveau der Beeinflussungsspannungen sinkt erwartungsgemäß beträchtlich ab. Bei dem Frequenzverhältnis von $1 : 3$ beträgt das Verhältnis der Beeinflussungsspannungen etwa $1 : 2,4$.

11.5 Schlussbetrachtungen

Die Leitung mit Erde als Rückleitung ist vom Standpunkt der Nachrichtentechnik primitiv. Die elektrischen Wechselwirkungen, die damit verbunden sind, haben es aber in sich.

Die vorstehenden Ausführungen sollen dazu dienen, das Problem transparent zu machen und auf Taschenrechnerformat zu reduzieren.

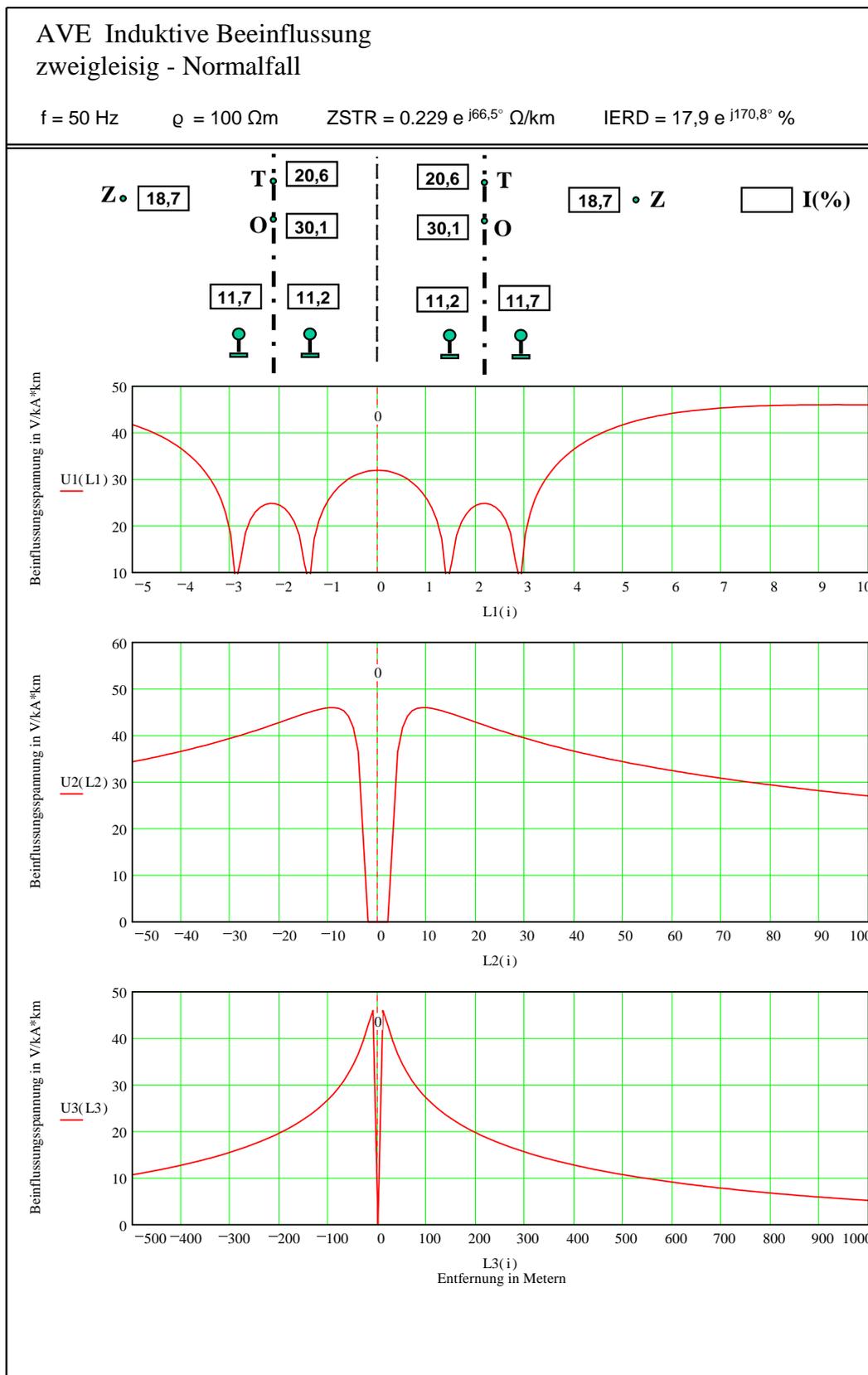


Abbildung 40: Induktive Beeinflussung: Zweigleisige Strecke - Normalfall

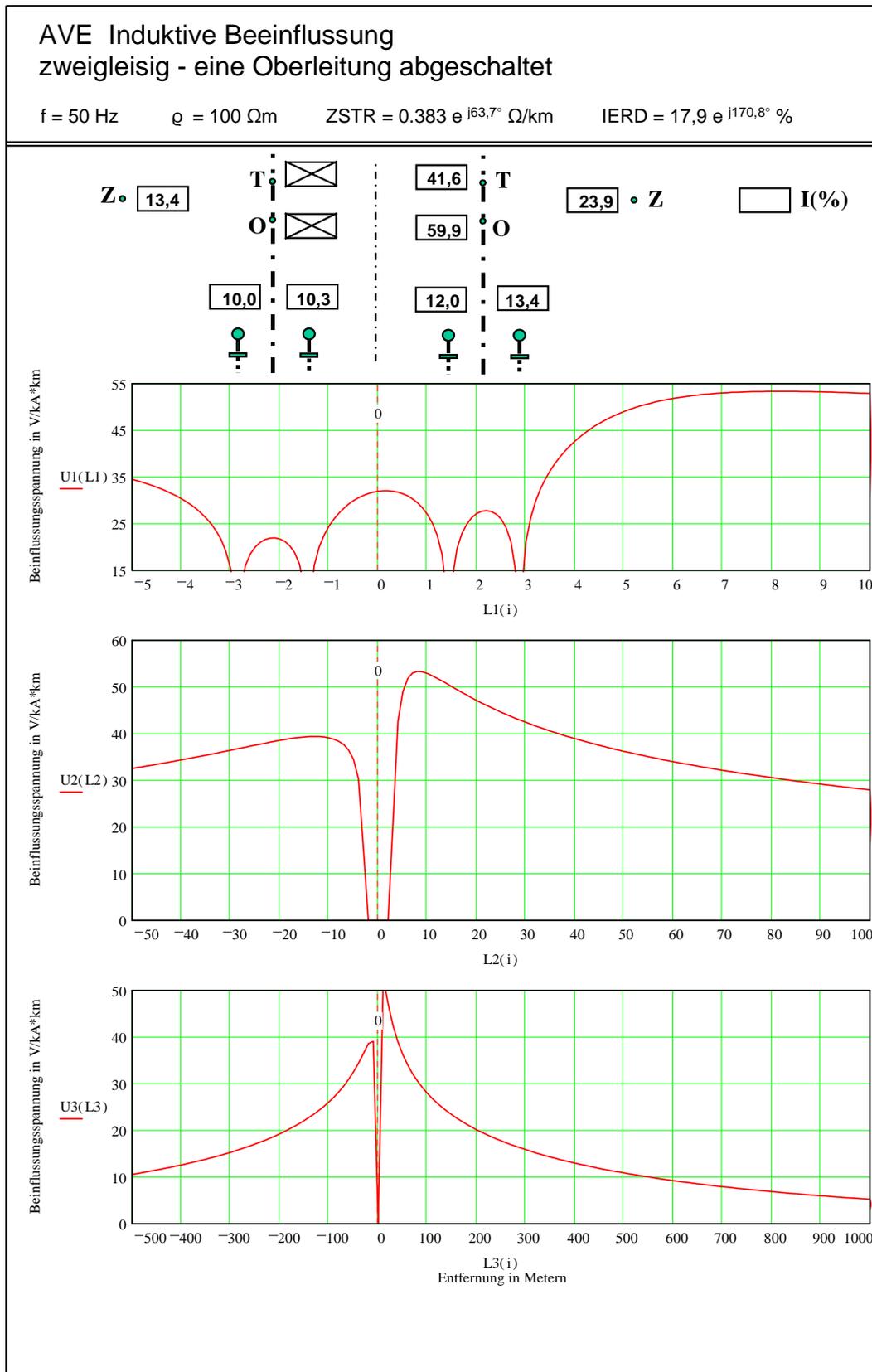
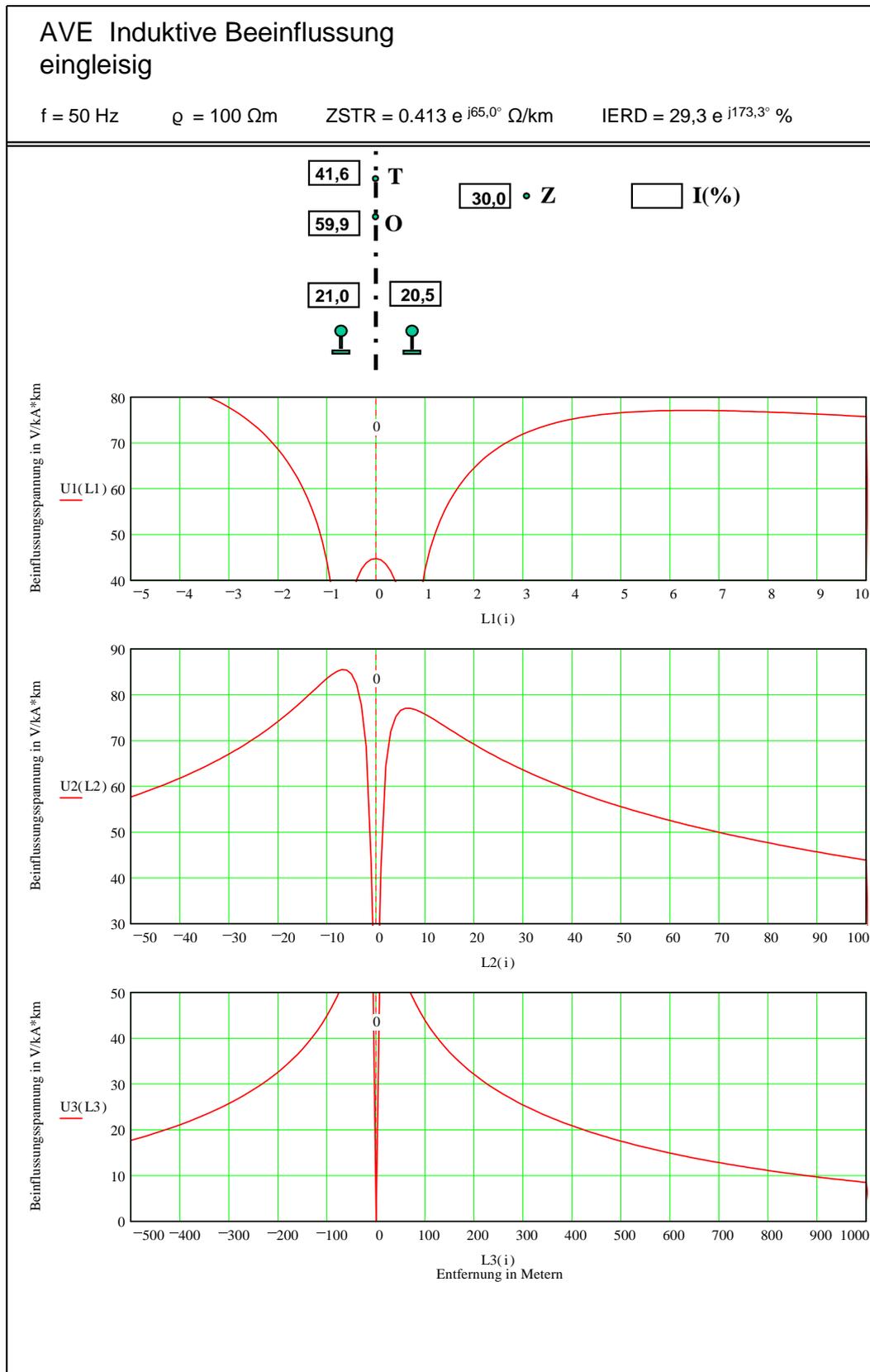


Abbildung 41: Induktive Beeinflussung: zweigleisig - eine Oberleitung abgeschaltet



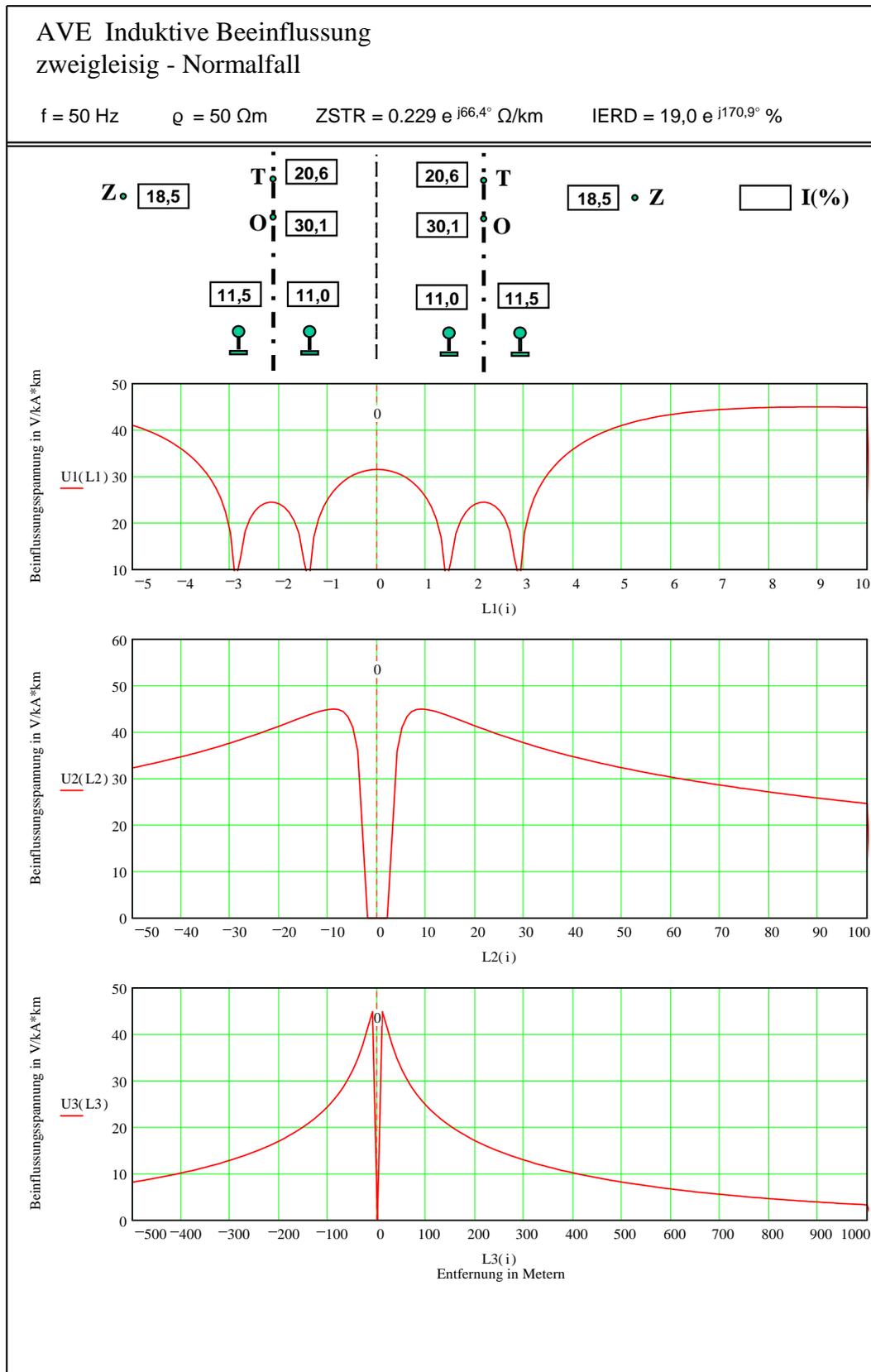


Abbildung 43: Induktive Beeinflussung: zweigleisig - $\rho = 50 \text{ } \Omega\text{m}$

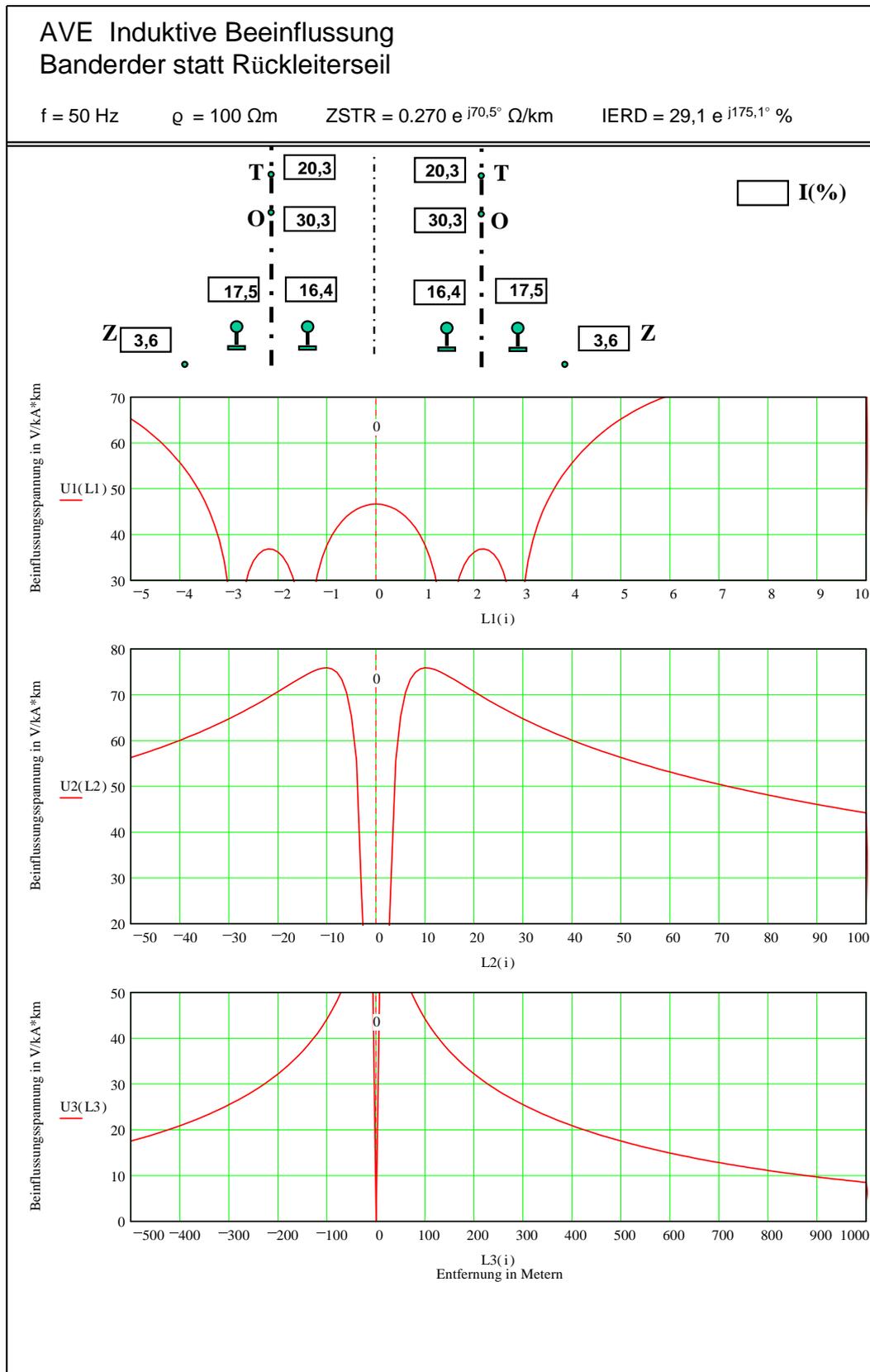


Abbildung 44: Induktive Beeinflussung: zweigleisige Strecke mit Banderder

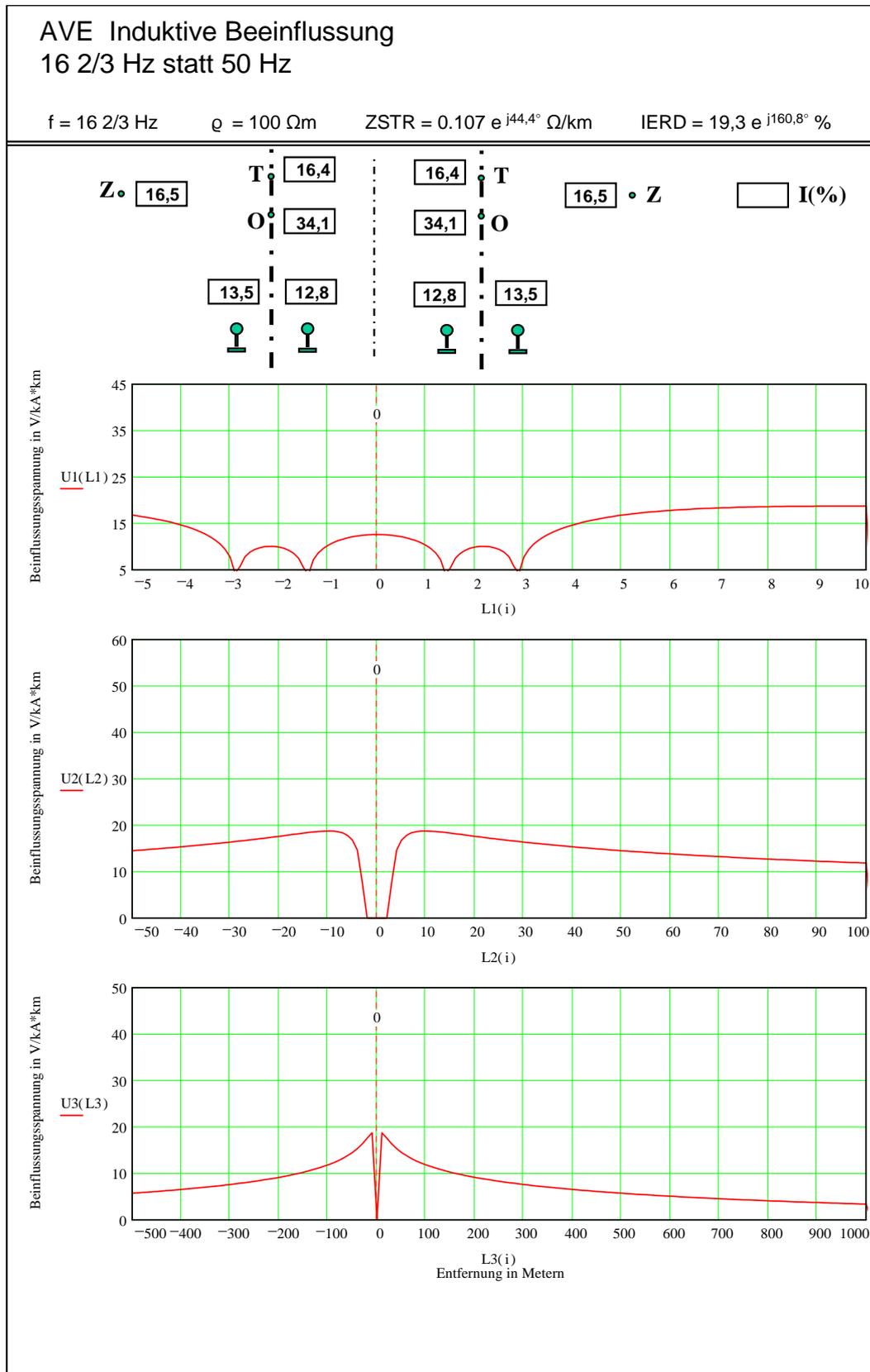


Abbildung 45: Induktive Beeinflussung: zweigleisige Strecke 16 2/3 Hz statt 50 Hz

12 Literaturhinweise

- [1] KÜPFMÜLLER, KARL / KOHN, GERHARD:
Theoretische Elektrotechnik und Elektronik,
14./15. Auflage, Drittes Kapitel, 32. Wirbelströme, Seite 337 ff
- [2] KÜPFMÜLLER, KARL / KOHN, GERHARD:
Theoretische Elektrotechnik und Elektronik,
14./15. Auflage, Erstes Kapitel, 8. Leitungsmechanismen, Seite 72 ff
- [3] EINSTEIN, ALBERT:
„Zur Elektrodynamik bewegter Körper“
Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17, 1905, S. 891-921
- [4] POLLACZEK, F.:
„Über die Induktionswirkung einer Wechselstrom-einfachleitung“
Elektrische Nachrichtentechnik, Heftnr.: 1, Band 4, 18-30, 1927
- [5] DIN VDE 0228 Teil 1, ab 01.04.2013 ersetzt durch DIN VDE 0845-6-1
- [6] CCITT*)
Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electricity lines; Published by the International Telecommunication Union (ITU) Genf; Ausgabe New Delhi 1960, letztmals ergänzt 1982.
- *) Von 1988: Empfehlung der CCITT/ITU :
Protection of telecommunication lines against harmful effects from electric power and electrified railway lines
Von 04/2008: ITU-T Recommendation K.26