

Anhang

zu

„Elektromagnetismus als Phänomen strömender Feinmasse“

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	3
2	Summenbildung elektrischer Größen	3
2.1	<i>Kirchhoffscher</i> Lehrsatz, Energietransport mit strömender Feinmasse	3
2.2	Statisches Feld ohne Energietransport durch strömende Feinmasse	7
3	Feldstärken, <i>Kirchhoffs</i> Gesetz in der Elektrodynamik	9
4	Stromverdrängung	12
5	Fehlerbetrachtung zu den Grundlagen der Feldtheorie	14
6	<i>Hertz</i>scher Dipol, Kritik zu den Ableitungen in [2]	17
7	Feldbetrachtung zur frei fliegenden elektrischen Ladung	21
8	Feldgleichungen und Feldausbreitung um eine Antenne	27
8.1	<i>Hertz</i> scher Dipol – Grundlagen und Ableitungen	27
8.2	Strahlungsdichte	33
8.3	Lichtstrahl - Gesetzmäßigkeiten der Ausbreitung [6]	36
8.4	Elektromagnetische Vorgänge beim Quantensprung und im Feld einer Antenne	39
9	Brechung, Reflexion und Beugung von Lichtstrahlen	40
9.1	Brechung	40
9.2	Reflexion	43
9.3	Beugung und Interferenz	44
10	Additionstheorem	45
10.1	Einführung	45
10.1.1	Bezugssystem	45
10.1.2	Brückenglied zwischen Inertialsystemen	45
10.1.3	Additionstheorem und LORENTZ-Transformation	45
10.1.4	Abhängigkeit zwischen drei Inertialsystemen	45
10.1.5	Kontraktionsfaktor gegenüber dem Bezugssystem	46
10.2	Annahmen und Ableitungen	46
10.3	Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen	51
10.4	Interpretation der Ergebnisse zum Additionstheorem	52
10.5	LORENTZ-Transformation und Additionstheorem im Kontext	55
10.6	Viertes Inertialsystem als Bezugssystem	61
10.7	Überlagerung von Relativgeschwindigkeiten	62
11	Kopie zu [1], [2] und [3] Literaturhinweise	64
12	Literaturhinweise	74

Abbildungsverzeichnis

1	Vereinigung der Ströme	3
2	Addition der Ströme	4
3	Räumliche Aufteilung der Stromdichte	6
4	Addition statischer Feldgrößen	8
5	Feldstärken in der Elektrodynamik	9
6	Feldstärken im statischen Feld	11
7	Frei fliegende elektrische Ladung	22
8	Zylinderkoordinaten	27
9	Zeigerdiagramm der Feldgleichungen	29
10	Brechung des Lichtstrahls	42
11	Inertialsysteme Strand, Schiff und Passagier	46
12	Variationen zur Addition	48
13	Zwei Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit	55
14	LORENTZ-Transformation und Additionstheorem	59

1 Vorwort

Die den 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz kennzeichnende Gesetzmäßigkeit der algebraischen Summenbildung der Ströme wird traditionell als ein Naturgesetz hingenommen, für das es keine weitere Begründung und Erklärung gibt. Im Kontrast hierzu lassen sich jedoch die physikalischen Grundlagen dieser Naturgesetzlichkeit aufzeigen, wie dies in den anschließenden Abschnitten 2 und 3 geschieht.

In einem Strömungsfeld entspricht eine differentiell kleine Raumeinheit einem Knotenpunkt differentiell kleiner Ströme, die den drei Richtungen des Raumes zugeordnet werden. Unter der Bedingung der Quellenfreiheit verlangt der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz, dass die algebraische Summe dieser differentiell kleinen Ströme und damit auch die algebraische Summe der zugehörigen Stromdichten zu Null werden. Die Vektoreigenschaft der Stromdichte steht mit diesem algebraischen Bildungsgesetz im Konflikt. Die Feldgleichungen zur Lösung des Problems des HERTZschen Dipols sind das markante Beispiel für diesen Konflikt. Die vorherrschende Theorie trägt diesem Konflikt nicht Rechnung und ist deshalb fehlerhaft. Die Abschnitte 4 bis 7 beinhalten die Fehleranalyse, Kritik und Richtigstellung dieser Theorie. Dass auch grundsätzliche Gesetzmäßigkeiten der Optik keine „Originale“ darstellen, sondern Ableitungen elektromagnetischer Gesetzmäßigkeiten sind, ist am Schluss in Abschnitt 8 ausgeführt.

2 Summenbildung elektrischer Größen

2.1 Kirchhoffscher Lehrsatz, Energietransport mit strömender Feinmasse

Ein Strom I entspricht der mit Geschwindigkeit v strömenden Feinmasse m , deren Durchsatz $\frac{m}{l}$ auf die Länge l bezogen ist. Dabei gilt die Beziehung

$$I = \sqrt{\frac{m}{l}} v = \sqrt{\frac{mv^2}{l}} = \sqrt{\frac{E}{l}}, \quad (2.1)$$

wobei $E = mv^2$ die strömende Energie repräsentiert. Energieverluste äußern sich in der entsprechenden Abnahme von $\frac{m}{l}$ entlang der Strombahn, verbunden mit einer Steigerung von v^2 im umgekehrt proportionalen Umfang, sodass das Produkt beider Größen $\frac{m}{l} v^2 = I^2$ konstant bleibt. Dieser Zusammenhang ist von grundlegender Bedeutung für die nachfolgenden Ableitungen. Das Quadrat des Stromes $I^2 = \frac{E}{l}$ entspricht also der Energieströmung.

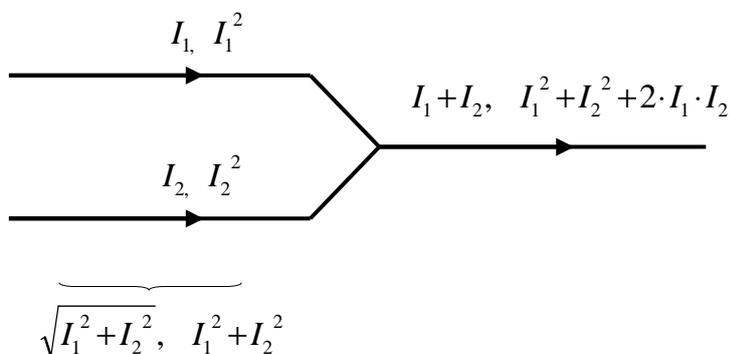


Abbildung 1: Vereinigung der Ströme

Zwei voneinander unabhängige Ströme I_1 und I_2 repräsentieren einen Gesamtenergiefluss von $I_1^2 + I_2^2$, dem ein gedanklicher Gesamtstrom von $\sqrt{I_1^2 + I_2^2}$ entspricht (Abbildung 1).

Dieser gedankliche Ersatz-Gesamtstrom, der sich nach der geometrischen Summenbildung ergibt, gilt freilich nur unter der Voraussetzung, dass I_1 und I_2 unabhängig voneinander in 2 verschiedenen Leitern strömen.

Bei der Vereinigung der Teilströme I_1 und I_2 in einem gemeinsamen Leiter folgt die Addition der Ströme aber der Gesetzmäßigkeit algebraischer Summenbildung, die aus einer doppelten geometrischen Summenbildung hervorgeht.

Um einen Einblick in diesen grundlegenden Zusammenhang zu gewinnen, betrachten wir einen Leiter, der galvanisch mit 2 weiteren Leitern verbunden ist, über die die Teilströme und eingespeist werden (Abbildung 1). Für den ursprünglich in 2 Teilströme I_1 und I_2 aufgeteilten Gesamtstrom I_r kann unabhängig davon, ob die Vereinigung soeben erfolgt oder bereits vollzogen ist, folgende Abhängigkeit festgestellt werden (Abbildung 2):

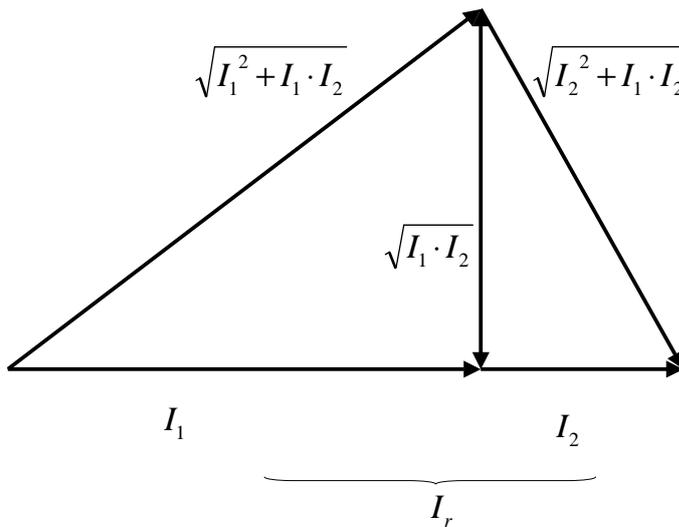


Abbildung 2: Addition der Ströme

Die beiden Teilströme unterliegen aufgrund der Induktion einer naturgesetzlichen Wechselwirkung. Elektrischer Strom ist aber identisch mit dem Elektroimpuls, dem beim Elektromagnetismus die analoge Rolle wie dem mechanischen Impuls zukommt. Im Gegensatz zum mechanischen Impuls wirkt aber der Elektroimpuls stets paarweise. Die zu einem Paar gehörigen, betragsmäßig identischen Elektroimpulse wirken senkrecht zueinander. Bei der Überlagerung zweier gleich gerichteter Elektroimpulse kommt deren senkrecht dazu wirkenden Zwillingenbrüdern die entschei-

dende Rolle bei der Wechselwirkung zu. Diese Wechselwirkung ist identisch mit der Gesetzmäßigkeit der Induktion. Jeder der beiden Teilströme induziert beim Partner eine Komponente

$$I_i = \sqrt{I_1 I_2} \quad (2.2)$$

die dem geometrischen Mittel der Teilströme entspricht. Die resultierenden Teilströme

$$I_{1i} = \sqrt{I_1^2 + I_i^2} = \sqrt{I_1^2 + I_1 I_2} \quad (2.3)$$

und

$$I_{2i} = \sqrt{I_2^2 + I_i^2} = \sqrt{I_2^2 + I_1 I_2} \quad (2.4)$$

ergeben sich unter dem energetischen Gesichtspunkt durch die erste geometrische Summenbildung. Die Zusammenfassung von I_{1i} und I_{2i} zum resultierenden Strom I_r erfolgt ihrerseits ebenfalls unter dem energetischen Gesichtspunkt als geometrische Summe. Diese zweite geometrische Addition ergibt:

$$I_r = \sqrt{I_{1i}^2 + I_{2i}^2} = \sqrt{I_1^2 + I_i^2 + I_2^2 + I_i^2} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2},$$

$$I_r = I_1 + I_2. \quad (2.5)$$

Mit der räumlichen Vereinigung zweier unabhängiger Ströme in einem gemeinsamen Leiter ist eine Verdichtung der Energieströmung von

$$\frac{E_1 + E_2}{l} = I_1^2 + I_2^2 \quad (2.6)$$

auf

$$\frac{E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2}}{l} = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \quad (2.7)$$

verbunden.

Damit ist der physikalische Hintergrund des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes ausgeleuchtet: Er beruht auf der induktiven Wechselwirkung der Teilströme in Verbindung mit der in jedem Falle obligatorischen energetischen Betrachtungsweise. Aus dieser Verbindung zweier physikalischer Grundeigenschaften resultiert eine doppelte geometrische Summenbildung, die ihrerseits in die algebraische Summenbildung nach dem 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz einmündet. Abbildung 2 veranschaulicht die aufgezeigten mathematischen Zusammenhänge an Hand eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $I_r = I_1 + I_2$ und der zugehörigen Höhe $I_i = \sqrt{I_1 I_2}$, die die Hypotenuse in die Abschnitte I_1 und I_2 unterteilt. Im Gegensatz zu vektoriellen Größen können aber I_1 und I_2 sowie deren Summe $I_r = I_1 + I_2$ beliebige gegenseitige Richtungen im Raum annehmen. Die an Hand des rechtwinkligen Dreiecks dargestellten physikalischen Größen dürfen also nicht als Vektoren fehlgedeutet werden, obwohl sie in idealer Weise der geometrischen Summenbildung folgen und deshalb auch mit Pfeilen versehen sind. Bezeichnend ist dabei, dass der der Höhe im rechtwinkligen Dreieck entsprechende Induktionsstrom $I_i = \sqrt{I_1 I_2}$ in dem einen rechtwinkligen Teildreieck von oben nach unten und in dem anderen rechtwinkligen Teildreieck von unten nach oben wirkt, womit die wechselseitige Induktionswirkung zwischen I_1 und I_2 sinnfällig zum Ausdruck kommt.

In Verallgemeinerung gelten alle vorstehend aufgezeigten Gesetzmäßigkeiten unverändert fort, wenn die Darstellung in Abbildung 1 als eine beliebige Verknüpfung dreier Leiter betrachtet wird, bei der unter Beachtung der Richtung der drei beteiligten Ströme, deren algebraische Summe stets zu Null wird. Unter dem Aspekt dieser Verallgemeinerung ist es dann also freigestellt, welche Leiterströme zusammengefasst werden, um daraus jeweils den Betrag des Stromes im verbleibenden dritten Leiter zu bestimmen.

Bei der Betrachtung des physikalischen Hintergrundes des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes anhand der skalaren Werte des Stromes ist es einsichtig, dass Abbildung 2 lediglich eine bildliche Darstellung der wohl begründeten doppelten geometrischen Summenbildung ist und vektorielle Interpretation fehl am Platze wäre. Dieses Grundmerkmal gilt aber nicht nur für die skalaren Werte des Stromes, die aus dem Skalarprodukt von Stromdichte und Durchsatzfläche hervorgehen, sondern auch uneingeschränkt für die Stromdichte selbst als gerichtete Größe im Raum. Denn unabhängig von diesem Vektormerkmal der Stromdichte, bedeutet deren Betrachtung lediglich den Übergang auf die differentiell kleine Raumeinheit. Der Strom ist das Ergebnis der über die (endliche) Durchsatzfläche integrierten Stromdichte. Die Stromdichte nimmt dagegen Bezug auf die differentiell kleine Flächeneinheit. Wenn also für den Strom das 1. KIRCHHOFFSche Gesetz maßgebend ist, so muss es auch uneingeschränkt für alle seine differentiell kleinen Stromfäden, aus denen er sich zusammensetzt, gelten.

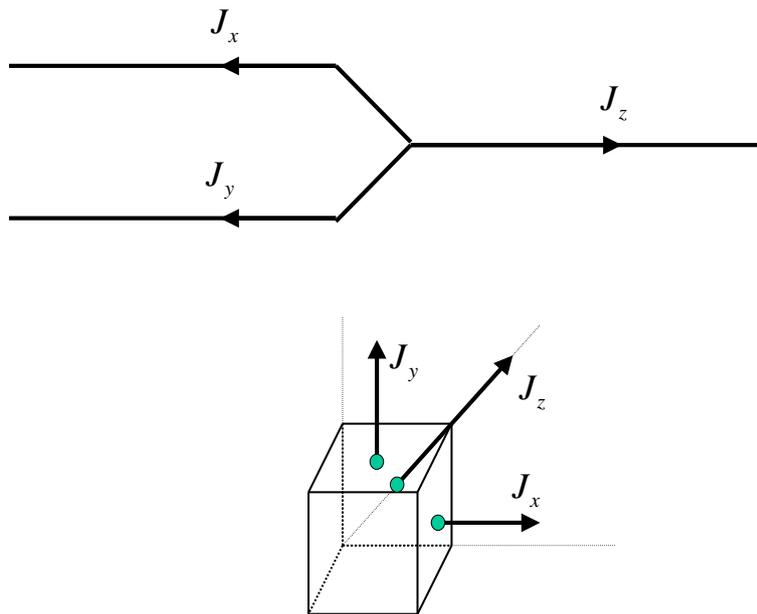


Abbildung 3: Räumliche Aufteilung der Stromdichte

verzerrt) dargestellte Würfel der differentiel kleinen Raumeinheit. Wird nun allein durch den Übergang unserer Betrachtungsweise auf differentiel kleine Raumeinheiten und damit auf differentiel kleine Ströme beziehungsweise Stromdichten der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz außer Kraft gesetzt? – Sicher nicht! Die Versuchung ist zwar riesengroß, für die Vektoren der Stromdichte nach Abbildung 3 auch das Repertoire an vektoriellen Operationen, insbesondere im Hinblick auf Addition und Subtraktion in Anwendung zu bringen. Das wäre aber der untaugliche Versuch, einer physikalischen Gesetzmäßigkeit eine **nicht** adäquate mathematische Gesetzmäßigkeit aufzuzwingen und damit massiv gegen den 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz zu verstoßen. Tatsächlich kann natürlich nie die Mathematik die Physik bestimmen, sondern in jedem Falle hat sich das mathematische Verfahren bedingungslos den Vorgaben der Physik zu unterwerfen. Und das bedeutet für elektromagnetische Strömung in der differentiel kleinen Raumeinheit: Die algebraische Summe der den 3 Richtungen des Raumes zuzuordnenden Stromdichten ist gleich Null, so wie es der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz vorgibt. Gleichwohl ist, wie bereits gesagt, die Versuchung groß, diesen scheinbaren Widerspruch zwischen Physik und Mathematik zu überspielen, um den von der Physik strömender Feinmasse geforderten, aber ungewohnten Umgang mit vektoriellen Größen (algebraische Summenbildung) zu umgehen. Der klassische „Sündenfall“ auf diesem Felde sind, so ungewöhnlich das auch klingen mag, die MAXWELLSchen Feldgleichungen in vektorieller Darstellung. Einerseits sind die physikalischen Kernaussagen dieser Feldgleichungen unbestritten gültig, nämlich die Abbildung von Induktionsgesetz und Durchflutungssatz auf die differentiel kleine Raumeinheit. Wird aber andererseits der Versuch einer allgemeingültigen mathematischen Lösung unternommen, also nicht nur auf Spezialfälle abgestellt, dann ist das übliche Repertoire der Vektoranalysis ein **ungeeignetes** mathematisches Instrumentarium, das nur auf den Pfad von Näherungslösungen führt. Die physikalische Gesetzmäßigkeit des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes kann unter keinen Umständen abgedungen werden, nur weil uns so ein „schönes“ und in sich stimmiges mathematisches Instrument zur Verfügung steht, das aber für das gestellte Problem nicht ausreicht beziehungsweise nur unter Beachtung der physikalisch gebotenen Modifikationen zur Anwendung kommen darf.

Kennzeichnende physikalische Größe eines differentiel kleinen Stromfadens ist aber die Stromdichte, die als Vektor nach Betrag und Richtung definiert ist. Welche Konsequenzen ergeben sich nun daraus, wenn die Verknüpfung dreier Ströme nach Abbildung 1 auf eine differentiel kleine Raumeinheit übertragen wird? Nach Abbildung 3 ist jeder der beteiligten differentiel kleinen Ströme einer der 3 Richtungen des Raumes zugeordnet, und da sie auf differentiel kleine Durchsatzflächen bezogen sind, werden sie folgerichtig durch die maßgebende Stromdichte substituiert.

In Abbildung 3 entspricht der (aus Anschaulichkeitsgründen

Nach Vorstehendem gilt der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz unabhängig davon, in welche Teilströme ein Gesamtstrom gedanklich unterteilt wird. Er gilt deshalb auch für den differentiell kleinen Stromfaden und natürlich auch für jedes differentiell kleine Raumelement bei jeder Art Energie transportierender elektrischer Strömung. Der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz gilt auch unabhängig davon, ob dieser Energietransport leitungsgebunden erfolgt oder in geometrischer Eigengesetzlichkeit sich kanalisiert im Medium fortpflanzt (typischer Vertreter: der Lichtstrahl).

Strömende elektrische Energie ist von Wesensmerkmalen gekennzeichnet, die prinzipiell unabhängig davon sind, ob es sich um leitungsgebundene Ströme im geschlossenen Stromkreis handelt oder um von Punkt zu Punkt gerichtete Strahlung: Strömende elektrische Energie folgt in jedem Raumelement einerseits dem 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz und andererseits der Gesetzmäßigkeit vom Weg des geringsten Widerstandes im Medium. Die elektrischen und geometrischen Eigenschaften des Mediums bewirken Kanalisierung (Beispiel: zylindrischer metallischer Leiter) und dämpfende Wirkung durch elektrischen Widerstand. Die Gesetzmäßigkeit vom Weg des geringsten Widerstandes in jedem Raumelement ist besonders auch bei Wechselstrom das prägende Prinzip. Da aber bei Wechselstrom die induktive Komponente des komplexen Widerstandes stets räumlich variiert, resultiert aus dem genannten Prinzip eine spezifische Verteilung des elektrischen Stromes im Medium mit räumlich variabler Stromdichte. Der Strom tendiert dabei in markanter Weise zur Kanalisierung bis hin zur eigengesetzlichen Begrenzung im an sich homogenen unbegrenzten Medium.

2.2 Statisches Feld ohne Energietransport durch strömende Feinmasse

Zeitlich **unveränderliche** elektrische oder magnetische Felder **ohne** Energietransport werden als statische oder stationäre Felder angesprochen. Da aber der Begriff „stationär“ in der Literatur auch auf stationäre Strömungsfelder angewandt wird, soll nachfolgend als eindeutiges Unterscheidungsmerkmal gegenüber einem Strömungsfeld **mit** Energietransport die Definition „statisches Feld **ohne** Energietransport“ dienen. Nachfolgend werden die Gesetzmäßigkeiten für ein solches Feld am Beispiel einer elektrostatischen Feldgröße dargestellt. Sie gelten für ein magnetisches Feld gleichen Typs in analoger Weise.

Strom I und Spannung U haben im physikalischen Kern $\sqrt{\frac{m}{l}}v$ (Wurzel aus der Feinmasse m pro Längeneinheit l , multipliziert mit der Geschwindigkeit v) eine identische Struktur, da sie sich nach dem Ohmschen Gesetz für strömende elektrische Energie nur durch den konstanten Faktor des elektrischen Widerstandes (gemessen in $\frac{m}{s}$ [Meter pro Sekunde]) unterscheiden. Diese prinzipielle physikalische Struktur behält die Spannung natürlich auch unter der Grenzbedingung der konstanten Spannung im statischen Feld bei. Das zur Spannung U Gesagte gilt analog für die elektrische Feldstärke E . Die Feldgrößen statischer elektrischer Felder folgen deshalb bei ihrer Überlagerung Gesetzmäßigkeiten, die sich einerseits unmittelbar aus den Überlegungen zum 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz ergeben, andererseits ihrer spezifischen Ausrichtung im Raum (gerichtete Größen oder Vektoren) Rechnung tragen.

Im statischen Feld gibt es keine elektrische Energieströmung und damit insbesondere auch **keine** induktive Wechselwirkung derjenigen Komponenten von statischen Feldgrößen, die zusammengefasst werden sollen. Dies ist der entscheidende Unterschied zu einem Feld mit Energieströmung. Dagegen gilt, dass Komponenten statischer Feldgrößen, die sich in einem Raumpunkt überlagern, einer Gesetzmäßigkeit unterworfen sind analog der von **unabhängigen** Teilströmen, also **vor** der Vereinigung. Damit gilt auch für statische Feldgrößen die reine energetische Betrachtungsweise **ohne** irgendwelche Anteile wechselseitiger Induktion. Deshalb bilden die Regeln der Vektoranalysis in vollem Umfang die physikalischen Gegebenheiten statischer Feldgrößen ab. Die vektoriellen Operationen wie Addition und Subtraktion werden der energetischen Betrachtungsweise voll gerecht. Die geometrische Summenbildung

senkrecht zueinander verlaufender Komponenten ist das typische Beispiel. Deshalb kann jeder Feldvektor im statischen Feld in zwei senkrecht aufeinander stehende Komponenten aufgeteilt werden, die dem geometrischen Bildungsgesetz im rechtwinkligen Dreieck folgen.

Die Zahl der möglichen Wertepaare dieser senkrecht aufeinander stehenden Komponenten ist unbegrenzt. Deshalb ist es auch möglich, 2 beliebige sich überlagernde Feldvektoren \vec{E}_1 und \vec{E}_2 im elektrostatischen Feld nach der geometrischen Gesetzmäßigkeit für Vektoren zu addieren.

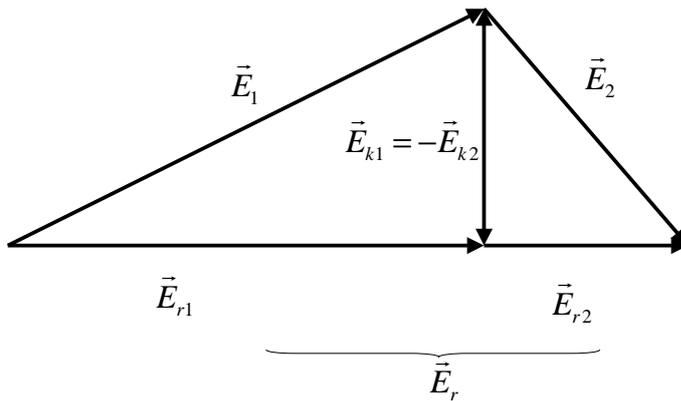


Abbildung 4: Addition statischer Feldgrößen

Nach Abbildung 4 wird jeder der beiden überlagerten Feldvektoren \vec{E}_1 und \vec{E}_2 hierzu in **das** konkrete Wertepaar gedanklich aufgeteilt, bei dem die eine Komponente in die Resultante $\vec{E}_r = \vec{E}_{r1} + \vec{E}_{r2}$ und fällt und die dazu jeweils senkrechte Komponenten von \vec{E}_{k1} und \vec{E}_{k2} sich nach Betrag und Richtung kompensieren.

Das Zusammenwirken elektrodynamischer Feldgrößen einerseits und elektrostatischer Feldgrößen andererseits weist entscheidende Unterschiede auf. Elektrodynamik ist gleichbe-

deutend mit Energietransport im Raum. Das dreidimensionale Raumelement ist die „Bühne für diesen Prozess“. Für jedes Raumelement, und natürlich auch für das differentiell kleine Raumelement, gilt bedingungslos der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz, d.h., die Summe der den 3 Richtungen dieses Raumelementes zuzuordnenden Ströme ist gleich Null. Für das differentiell kleine Raumelement tritt die Stromdichte J an die Stelle des Stromes I . Im elektrostatischen Feld dagegen fließt kein Strom. Jede Feldgröße ist vielmehr der Flächeneinheit, auf der sie senkrecht steht, zuzuordnen. In dieser Flächeneinheit senkrecht zum elektrostatischen Feldvektor gibt es keinen Energietransport und keine wechselseitige Induktion überlagerter Größen. Sich überlagernde Feldgrößen im elektrostatischen Feld addieren sich geometrisch, also als Vektoren. Die direkte Analogie zu mechanischer Kraft und mechanischer Energie ist evident. Mechanische Kräfte beziehen sich wie elektrostatische Feldgrößen immer auf Flächen und werden als Vektoren in geometrischer Addition zusammengefasst. Die Vorstellung der punktförmig wirkenden Kraft ist dabei lediglich eine zweckmäßige Idealisierung für ein besonders praktikables Rechenverfahren. Mechanische Arbeit hat analog elektromagnetischer Arbeit als unverzichtbaren Wirkungsort immer das dreidimensionale Raumelement zur Bezugsgröße.

Die Nahtstelle zwischen elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen ist der Aufbau und Abbau elektrischer und magnetischer Felder. Das Aufladen des Raumes mit elektromagnetischer Energie und deren Abbau erfolgt in der Elektrodynamik in periodischer Schwingung, beim Auf- und Abbau statischer elektrischer und magnetischer Felder dagegen als aperiodisches Einschwingen in den stabilen Zustand.

Analog entspricht natürlich auch der Aufbau und Abbau einer mechanischen Kraft einem Energiefluss in das Medium beziehungsweise aus dem Medium heraus. Die elastische Energie im Medium ist das Ergebnis einer aufgebauten Kraft.

3 Feldstärken, Kirchhoffs Gesetz in der Elektrodynamik

Als direkte Konsequenz aus den Ausführungen zu KIRCHHOFFS Gesetzen in Abschnitt 2 sind nachfolgend bildliche Darstellungen und rechnerische Beziehungen von Feldgrößen dargestellt. Dabei sind die für die Feldgrößen maßgebenden signifikanten Unterschiede zwischen Elektrodynamik und Elektrostatik herausgestellt.

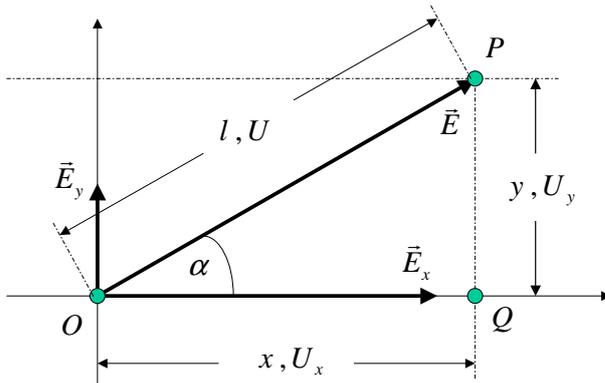


Abbildung 5: Feldstärken in der Elektrodynamik

Wird der Vektor der elektrischen Feldstärke der (herkömmlichen) Dimension V/m in einem Diagramm (Abbildung 5) dargestellt, so unterliegt er zwingend einer Normierung auf eine Wegstrecke, Beispiel: V/m^2 . Diese Normierung kann zwar nach den Gesichtspunkten zweckmäßiger Darstellung frei definiert werden, im Diagramm also: E/l ; Aber eine einmal getroffene Normierung (im Beispiel) auf die Wegstrecke l ist dann für alle Vektoren der Feldstärke, die in gegenseitige Beziehung gebracht werden sollen, obligatorisch. Die nachfolgende Betrachtung bezieht sich auf die Bedingun-

gen strömender elektrischer Energie, die stets den KIRCHHOFFSchen Gesetzen unterworfen ist. Die Gesetzmäßigkeiten der Überlagerung von Feldstärken von statischen Feldern werden später separat beleuchtet. Einheitliche Normierung bedeutet konkret: Auch die in vorstehendem Diagramm parallel zu x -Achse beziehungsweise y -Achse dargestellten Komponenten vom Betrag E_x beziehungsweise E_y müssen zwingend auf l als einheitliche Basis der Normierung bezogen werden.

Ausgehend von dem Diagramm in Abbildung 5 ergibt sich deshalb für das Potential zwischen den Punkten O und P :

$$U = E \cdot l \quad (E = |\vec{E}|) \quad (3.1)$$

und das Potential zwischen den Punkten O und Q als Produkt aus E und der Projektion von x auf E , identisch mit dem Produkt aus x und der Projektion von E auf x :

$$U_x = E \cdot x \cdot \cos \alpha = E \cdot l \cdot \cos^2 \alpha = E_x \cdot l; \quad E_x = E \cdot \cos^2 \alpha. \quad (3.2)$$

Für das Potential zwischen den Punkten Q und P ergibt sich in Analogie:

$$U_y = E \cdot y \cdot \sin \alpha = E \cdot l \cdot \sin^2 \alpha = E_y \cdot l; \quad E_y = E \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.3)$$

Hervorzuheben ist, dass in Abbildung 5 zwar die Abstände x , y und l maßstabsgerecht abgebildet sind und auch die Feldstärken E_x , E_y und E aufgrund der Normierung, aber nicht etwa auch die Potentiale U_x , U_y und U . Für diese ist in der Darstellung allein festgelegt, zwischen welchen räumlichen Punkten O , P und Q das jeweilige Potential gegeben ist. Auf dieser Basis ergibt sich ein übereinstimmendes Potential für die direkte Verbindung von O nach P wie auch für die gebrochene Strecke von O über Q nach P , die elektrisch einer Parallelschaltung entspricht, sodass nach dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz gilt:

$$U = U_x + U_y,$$

$$\frac{U}{l} = \frac{U_x}{l} + \frac{U_y}{l},$$

$$E = E_x + E_y = E \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha). \quad (3.4)$$

E ergibt sich also aus der **algebraischen** Summe seiner Komponenten

$$E_x = E \cdot \cos^2 \alpha \quad \text{und} \quad E_y = E \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.5)$$

So erstaunlich es anmutet, das traditionell in der Wissenschaft geübte Verfahren, eine elektrische Feldstärke auch unter den Bedingungen strömender elektrischer Energie, wie sie in Funkwellen vorliegen, als einen Vektor vom Betrag E_V mit den Komponenten $E_{Vx} = E_V \cdot \cos \alpha$ und $E_{Vy} = E_V \cdot \sin \alpha$ zu behandeln, ist physikalisch unhaltbar und mit dieser Ableitung falsifiziert. Die vorstehende, aus der Ableitung hervorgegangene korrekte Beziehung ist dagegen nicht nur eine zwingende Konsequenz aus dem 2. KIRCHHOFFSchen Satz, sondern in ihr erkennen wir auch die Gesetzmäßigkeit des 1. KIRCHHOFFSchen Satzes. Wir gehen dabei von einem elektrischen Feld mit Energietransport aus, also von strömender elektrischer Energie. An dem Punkt im Raum, für den die elektrische Feldstärke E untersucht wird, existiert in der zugehörigen differentiell kleinen Raumeinheit ein einheitlicher Widerstand Z' , der nach seiner spezifischen Natur die (herkömmliche) Dimension von Ωm besitzt. Z' entspricht also dem Kehrwert der elektrischen Leitfähigkeit und ist je nach Fall rein ohmscher oder auch komplexer Natur. In jedem Fall gilt für die mit den elektrischen Feldstärken korrespondierenden Stromdichten

$$\frac{E}{Z'} = J, \quad \frac{E_x}{Z'} = J_x \quad \text{und} \quad \frac{E_y}{Z'} = J_y$$

also in Übereinstimmung mit dem 1. KIRCHHOFFSchen Satz:

$$J = J_x + J_y. \quad (3.6)$$

Die Stromdichten stehen hier stellvertretend für die Ströme in der differentiell kleinen Raumeinheit. Die Ströme sind dabei in Form der Stromdichten auf ein **einheitliches** Maß der Fläche normiert. In dieser Sicht der Dinge ist dann das **statische** elektrische Feld der Sonderfall, bei dem der spezifische elektrische Widerstand Z' zu Unendlich wird und die Werte der Stromdichten zu Null. Damit ist der Anwendung des 1. KIRCHHOFFSchen Satzes die Basis entzogen. Ein wesentlicher Gesichtspunkt vorstehender Ableitungen für elektrodynamische Verhältnisse, also für **strömende** elektrische Energie, ist die enge Verkopplung der betrachteten Feldgrößen. Das Wort „Verkopplung“ darf durchaus in elektrischer Deutung verstanden werden, denn die beiden Komponenten der differentiell kleinen Ströme beziehungsweise der Stromdichten, die gedanklich zur Resultierenden vereinigt werden, unterliegen einer optimalen Kopplung, die den eigentlichen physikalischen Kern des 1. KIRCHHOFFSchen Satzes ausmacht. Dies ist auch der Grund, dass der 1. KIRCHHOFFSchen Satz nicht als Naturgesetz einfach hingenommen werden muss, sondern seine Konsistenz durch Ableitung (siehe Abschnitt 2) bewiesen werden kann.

Ganz anderer Natur ist dagegen die Überlagerung zweier nach ihrer Quelle **unabhängiger** elektrischer Feldgrößen im statischen Feld zu sehen, die also keinem resultierenden Strömungsfeld zugehören. Für die Ermittlung der Resultierenden aus den unabhängigen Feldgrößen mit den Beträgen E_1 und E_2 sowie von unterschiedlichen Richtungen im Raum, gilt lediglich ein übergeordneter Gesichtspunkt auch im statischen Feld, nämlich die obligatorisch einheitliche Basis für die Normierung des Wertes jeder Feldstärke nach Maßgabe einer Wegstrecke.

Die in diesem Fall gebotene **vektorielle** Summenbildung bei der Verknüpfung der Komponenten E_1 und E_2 mit ihrer Resultierenden E ist dadurch begründet, dass **keine** elektrische Verkopplung der Feldstärken E_1 und E_2 , sondern nur eine Überlagerung ohne resultierende elektrische Energieströmung gegeben ist. Mangels Energietransport im statischen Feld gibt

es keine Ströme oder Stromdichten und deshalb auch keine induktive Interaktion oder Kopplung. Einer Anwendung KIRCHHOFFScher Sätze ist die Basis entzogen. Es gibt eine reine Überlagerung der Feldstärken mit einer bildlichen Darstellung auf der Basis einer einheitlichen Normierung. Aus Abbildung 6 ergeben sich damit die einheitlichen Verknüpfungen der Feldstärken:

$$\frac{E_1}{l_1} = \frac{E_2}{l_2} = \frac{E}{l} = \frac{E_{1x}}{x_1} = \frac{E_{2x}}{x_2} = \frac{E_{1x} + E_{2x}}{l} = \frac{E_{1y}}{y} = \frac{E_{2y}}{y}; \quad (3.7)$$

und daraus folgend:

$$E_{1x} = E_1 \cdot \frac{x_1}{l_1} = E_1 \cdot \sin \alpha, \quad (3.8)$$

$$E_{2x} = E_2 \cdot \frac{x_2}{l_2} = E_2 \cdot \sin \beta \quad (3.9)$$

sowie

$$E_{1y} = E_1 \cdot \frac{y}{l_1} = E_1 \cdot \cos \alpha, \quad (3.10)$$

$$E_{2y} = E_2 \cdot \frac{y}{l_2} = E_2 \cdot \cos \beta, \quad (3.11)$$

$$E_{1y} = E_{2y}. \quad (3.12)$$

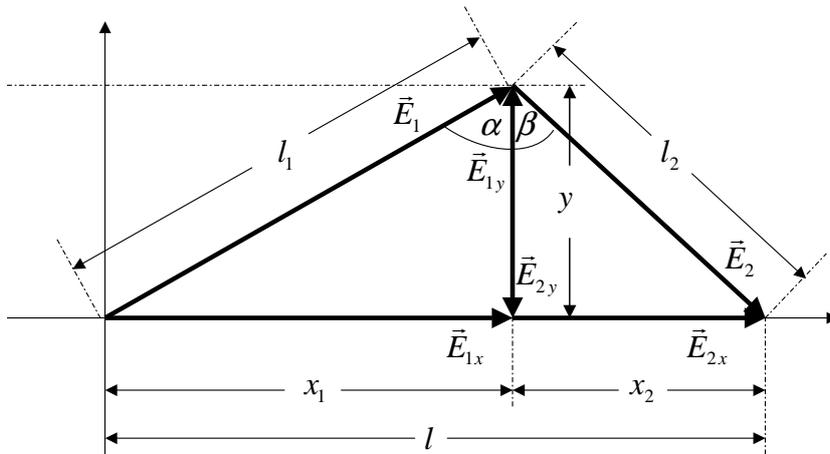


Abbildung 6: Feldstärken im statischen Feld

Der Vergleich der gedanklichen Zerlegung eines Feldvektors unter den Bedingungen strömender elektrischer Energie einerseits und der Überlagerung von zwei Feldvektoren unter den Bedingungen des statischen Feldes weist folgende Unterschiede auf: Während im ersten Fall die Komponenten E_x und E_y in ein und demselben physikalischen Prozess optimal verkoppelt sind und senkrecht zueinander verlaufen, stimmen im zweiten Fall die

zusammenfassenden Komponenten E_{1x} und E_{2x} nach der Richtung überein und sind keiner gegenseitigen Kopplung unterworfen, also nicht von wechselseitiger induktiver Wirkung begleitet. Zu deckungsgleichen Ergebnissen führt eine rein energetische Betrachtungsweise: Statische Feldenergie ist abhängig vom Quadrat des Feldstärkevektors. Sowohl bei der Aufteilung in Komponenten wie auch umgekehrt bei der Zusammenfassung von Komponenten zu einer Resultierenden gilt wegen dieser quadratischen Abhängigkeit die vektorielle Gesetzmäßigkeit. Bei strömender elektrischer Energie gibt es dagegen keine statischen Feldgrößen und auch nicht deren vektorielles Summenbildungsgesetz.

4 Stromverdrängung

Die bekannten Ausführungen zur Theorie der Stromverdrängung in Lehrbüchern (hier konkret in [1], wobei Kopien zu [1] in Abschnitt 11 enthalten sind) werden dem vielschichtigen physikalischen Prozess bei weitem nicht gerecht und münden in Ergebnisse, die paradox sind und keinen physikalischen Sinn ergeben. Insbesondere werden aus Realteil und Imaginärteil zusammengesetzte Werte für elektrische und magnetische Feldstärke ausgewiesen, und zwar **ohne** dass hier Real- und Imaginärteil als wohl vertraute Komponenten sinusförmiger Wechselgrößen vorliegen. Aber allein die Ähnlichkeit zu dem mathematischen Konzept für Wechselgrößen genügt offensichtlich, um diesen eindeutigen Indikator für den falschen Lösungsweg nicht wahrzunehmen.

Am Beispiel von [1] sollen die einzelnen Schritte der Ableitung kritisiert und richtiggestellt werden.

Für die Berechnung der Stromverdrängung im Koaxialkabel ist der Einfluss des induktiven Spannungsabfalls in Kombination mit dem ohmschen Spannungsabfall maßgebend. Die Verknüpfung von ohmschem und induktivem Spannungsabfall bedingt eine zeitliche Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung sowie zwischen den maßgebenden Werten von Stromdichte, elektrischer und magnetischer Feldstärke beziehungsweise magnetischem Fluss.

- Es ist also unrichtig, wenn in [1], Gleichung (1), von Phasengleichheit der Stromdichte und der elektrischen Feldstärke ausgegangen wird, wobei lediglich die spezifische elektrische Leitfähigkeit als Proportionalitätsfaktor steht.
- Ein daraus resultierender weiterer Fehler ist in [1], dass in Gleichung (2) zwischen magnetischer Feldstärke und Stromdichte der Durchflutungssatz so in Ansatz gebracht wird, als bestünde Phasengleichheit zwischen diesen Größen.
- Dritter prinzipieller Fehler in [1] ist das willkürliche Vorgehen beim Differenzieren von Feldstärkewerten nach der Zeit und dem Weg. Alle beteiligten elektrischen Werte von Strom, Stromdichte, elektrischer und magnetischer Feldstärke sowie magnetischem Fluss sind grundsätzlich Wechselstromgrößen, abgebildet allein durch den Betrag (z. B.: $|\underline{H}| = H$), multipliziert mit dem Funktionswert $\sin \omega t$. Das Differenzieren nach der Zeit beschränkt sich auf $\frac{\partial}{\partial t}(\sin \omega t) = \omega \cdot \cos \omega t$, läuft also auf die betragsmäßige Multiplikation $|\underline{H}| \cdot \omega = H \cdot \omega$ hinaus. Dieses Ergebnis durch die Form $\frac{\partial H}{\partial t}$ zu ersetzen und dann, wie in Gleichung(5) von [1] geschehen, dem räumlichen Differentialquotienten gegenüberzustellen:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu \frac{\partial H}{\partial t},$$

stimmt mathematisch und physikalisch mit der Problemstellung in keiner Weise überein.

Der Lösungsansatz geht zweckmäßig von einer Auftrennung nach räumlich variablen, also vom Abstand r zum Mittelpunkt der Koaxialleitung abhängigen Werten (Index v) und räumlich konstanten Werten (Index k) aus. Für die resultierende Stromdichte gilt dann:

$$J = J_k - J_v.$$

Für die mit Stromdichte J_v und Strom I_v korrespondierenden Werte von elektrischer und magnetischer Feldstärke sowie magnetischem Fluss ist weiterhin jeweils nach ohmscher (Index R) und induktiver (Index L) Komponente zu unterscheiden.

Die maßgebende Differentialgleichung, aus der sich die räumliche Abhängigkeit (also abhängig von r) ergibt, ist ihrer Natur nach selektiv auf die räumlich variablen Größen beschränkt.

Deshalb kann zur Vereinfachung auf den Index v für elektrische und magnetische Feldstärke sowie den magnetischem Fluss verzichtet werden.

$$\begin{aligned} E_{vR} &\rightarrow E_R, & E_{vL} &\rightarrow E_L; \\ H_{vR} &\rightarrow H_R, & H_{vL} &\rightarrow H_L; \\ \Phi_{vR} &\rightarrow \Phi_R, & \Phi_{vL} &\rightarrow \Phi_L. \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen können die Gleichungen (1) bis (6) in [1] richtiggestellt werden. Die einander direkt entsprechenden Beziehungen in [1] sowie die korrigierte Version werden entsprechend gekennzeichnet, also wird z. B. aus Gleichung (1) in [1] Gleichung (1k) in der Korrektur.

$$J_v = E_R \cdot \sigma \quad (1k)$$

$$H_R \cdot 2\pi r = k_R \cdot \int_{r_0}^r 2\pi \cdot J_v \cdot r \cdot dr = k_R \cdot \int_{r_0}^r 2\pi \cdot E_R \cdot \sigma \cdot r \cdot dr \quad (2k)$$

$$\frac{\partial H_R}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot H_R = k_R \sigma \cdot E_R \quad (3k)$$

$$\omega \mu \cdot \frac{\partial H_R}{\partial r} + \omega \mu \cdot \frac{1}{r} \cdot H_R = k_R \sigma \omega \mu \cdot E_R$$

$$\Phi_R = \mu l \int_{r_0}^r H_R \cdot dr$$

$$E_R \cdot l = -\frac{\partial \Phi_R}{\partial t} = -\omega \Phi_R$$

$$E_R = -\omega \frac{\Phi_R}{l} = -\omega \mu \int_{r_0}^r H_R \cdot dr$$

$$\frac{\partial E_R}{\partial r} = -\omega \mu \cdot H_R \quad (5k)$$

$$\frac{\partial^2 E_R}{\partial r^2} = -\omega \mu \cdot \frac{\partial H_R}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 E_R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_R}{\partial r} = -k_R \sigma \omega \mu \cdot E_R \quad (6k)$$

Diese Lösung erbringt wie nicht anders zu erwarten ausschließlich reelle Lösungen. Sie bietet in weiterer Ausgestaltung, für die auf [6] verwiesen wird, die für die Diskussion an Hand des Zeigerdiagramms notwendigen Parameter. Für den typischen Idealfall ergibt sich Betragsgleichheit von ohmscher und induktiver Komponente und damit wird $k_R = k_0 = 1/\sqrt{2}$.

Komplexe Zahlenwerte mit räumlichem Argument, wie sie aus (6) in [1] hervorgehen, sind nicht problemadäquat und physikalisch nicht sinnvoll zu interpretieren.

5 Fehlerbetrachtung zu den Grundlagen der Feldtheorie

Ausgangspunkt sind die in den Abschnitten 2 bis 3 dargelegten Gesetzmäßigkeiten für elektrische Feldgrößen. Diese Ausführungen münden in die provozierende These, dass die Grundlagen der elektromagnetischen Feldtheorie, so wie sie in der wissenschaftlichen Literatur allgemein dargestellt werden, korrekturbedürftig sind. Die wesentliche Argumentationslinie dieser Kritik wird zunächst vorangestellt. In der Folge werden an Hand der Feldgleichungen im Allgemeinen und des HERTZschen Dipols im Speziellen die erkannten Fehler und ein Weg zu deren Abhilfe dargestellt.

Eine mechanische Kraft \vec{F} ist eine echte Vektorgröße. Das Zusammenwirken von Kraftkomponenten zu einer resultierenden Kraft folgt bedingungslos dem vektoriellen Bildungsgesetz. Dies ist vielfach durch Experiment und technische Anwendung belegt. Prinzipiell anderer Natur ist eine elektrische Feldstärke \vec{E} im Strömungsfeld! Sie ist **keine** echte Vektorgröße, weil für sie als analoge Größe zur Stromdichte \vec{J} kategorisch der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz gilt. Dieser Lehrsatz verliert seine Gültigkeit auch bei Abbildung auf eine differentiell kleine Raumeinheit nicht. In keinem Experiment wurde jemals für die elektrische Feldstärke im Strömungsfeld ein vektorielles Summenbildungsgesetz nachgewiesen. Das ihr eigene algebraische Summenbildungsgesetz ist dagegen im realen wie im Gedankenexperiment leicht nachzuweisen. Im einfachsten Fall werden drei homogene Leiter quadratischen Querschnitts so zu einem Dreibein vereinigt, dass die Vereinigungsstelle einen Würfel bildet. Speist man in einen Leiter des Dreibeins einen Strom beliebiger Stromstärke ein, muss dieser Strom in den anderen beiden Leitern des Dreibeins seine Fortsetzung (Ausspeisung) finden, wobei die algebraische Summe der beiden Stromkomponenten der Ausspeisung dem eingespeisten Strom entspricht. Fokussiert auf den würfelförmigen Vereinigungspunkt der drei Leiter im Dreibein, ist dies einerseits der Nachweis, dass der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz unabhängig von der räumlichen Richtung der beteiligten Ströme gilt, und andererseits der Beweis, dass es keine vektorielle Aufteilung eines Stromes geben kann. Das Ergebnis dieses Experiments ist unabhängig von der Größe des Querschnitts der beteiligten Leiter und bleibt gleichermaßen gültig für einen differentiell kleinen Querschnitt und Normierung des Stromes auf den Flächendurchsatz, also den Übergang vom Strom zur Stromdichte.

Das algebraische Summenbildungsgesetz des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes steht also der vorbehaltlosen Akzeptanz der elektrischen Feldstärke als Vektorgröße im Wege. Dieser besondere „Vektor“ der elektrischen Feldstärke steht stets unter dem strikten Vorbehalt, dass in keiner Anwendung sein ihm eigenes algebraisches Summenbildungsgesetz verletzt werden darf. Wenn in der wissenschaftlichen Literatur auf diesen entscheidenden Vorbehalt nicht hingewiesen wird und die elektrische Feldstärke als normale Vektorgröße analog einer mechanischen Kraft behandelt wird, bleibt ein Dilemma un aufgelöst. Der latente Fehler bleibt wie ein Zeitzünder über weite Bereiche des wissenschaftlichen Gedankengebäudes ohne unmittelbar erkennbare Auswirkung. Sobald aber ein theoretischer Zusammenhang erfasst und formuliert werden soll, der die „Sollbruchstelle“ des algebraischen Summenbildungsgesetzes belastet, treten die Konsequenzen des Denkfehlers in Erscheinung.

Weshalb können nun aber z.B. im stationären Strömungsfeld der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz (bei Quellenfreiheit)

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (5.1)$$

und der 2. KIRCHHOFFSche Lehrsatz

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (5.2)$$

„ungestraft“ postuliert werden, obwohl \vec{E} und \vec{J} keine echten Vektorgrößen sind? Die Er-

klärung ist einfach: In beiden Fällen werden differentiell kleine Werte von Skalarprodukten gebildet. Für die Richtigkeit des skalaren Wertes ist es aber hinreichend, wenn nur **eine** der beiden skalar zu multiplizierenden Größen echte Vektoreigenschaften besitzt, wie der Vektor $d\vec{A}$ des Flächenelements und $d\vec{s}$ des Wegelements. Denn die skalare Multiplikation entspricht ja der Projektion des Vektors $d\vec{A}$ auf \vec{J} beziehungsweise $d\vec{s}$ auf \vec{E} , wobei die unechten Vektoreigenschaften von \vec{J} und \vec{E} nicht auf die Probe gestellt werden!

Die gleichen Überlegungen gelten für das Summenbildungsgesetz der Divergenz, angewandt für die elektrische Verschiebungsdichte:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (5.3)$$

$d\vec{A}$ hat echte Vektoreigenschaften und das ist hinreichend für ein richtiges Ergebnis von $\operatorname{div} \vec{D}$.

Wie ist nun aber das Bildungsgesetz für den Gradienten

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (5.4)$$

mit

$$d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (5.5)$$

zu beurteilen? Bei dieser Form sind wir immer noch weit entfernt von einer echten „Nagelprobe“, denn auf linker (\vec{E}) und rechter ($-\operatorname{grad} \varphi$) Gleichungsseite liegt ein gleichartiger Fehler vor, nämlich die fälschliche Unterstellung des vektoriellen Bildungsgesetzes. Wir haben es also mit dem Gleichgewicht der Fehler zu tun und die Latenz des Fehlers bleibt gewahrt. Andere Verhältnisse liegen vor, wenn wir uns dem Bildungsgesetz der Rotation zuwenden. Denn hierbei sind alle drei Komponenten des Raumes direkt jeweils miteinander verknüpft. Betrachtet sei dies am Beispiel der Differentialform des Durchflutungssatzes für ein stationäres Strömungsfeld:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (5.6)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \vec{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x, \\ \operatorname{rot}_y \vec{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y, \\ \operatorname{rot}_z \vec{H} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z. \end{aligned}$$

Für ein stationäres Strömungsfeld liegt analog dem Summenbildungsgesetz für den Gradienten ein Gleichgewicht der Fehler vor, weil die fehlerhafte Unterstellung des vektoriellen Summenbildungsgesetzes in gleicher Weise für magnetische Feldstärke und Stromdichte wirkt. Dies verdeutlicht folgende Überlegung: Betrachtet man magnetische Feldstärke H und Stromdichte J in einem Stromfaden, der einen differentiell kleinen kreisförmigen Querschnitt mit Radius dr durchströmt, ergibt sich folgende Gesetzmäßigkeit:

$$\frac{dH}{dr} = \frac{J}{2}.$$

Diese Überlegung kann auf jede der 3 Komponenten des Raumes übertragen werden. Bei der Zerlegung von \vec{J} und \vec{H} nach (5.6) in räumliche Komponenten (und natürlich auch umgekehrt bei der Summenbildung) spielt es offensichtlich keine Rolle, ob nach der **richtigen** Methode der algebraischen Summenbildung oder nach der **falschen** Methode der vektoriellen

Summenbildung vorgegangen wird, weil in jedem Fall das Gleichgewicht zwischen rechter und linker Gleichungsseite gewahrt bleibt.

Bei dem Fortschreiten zu den MAXWELLSchen Feldgleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (5.8)$$

ist verschärfte Beobachtung des prinzipiellen Vorbehalts angezeigt, dass das gebotene algebraische Summenbildungsgesetz nicht verletzt werden darf. Denn der zeitliche Differentialquotient auf der jeweils rechten Gleichungsseite bedingt eine Überführung in den entsprechenden räumlichen Differentialquotienten mit spezifischer Charakteristik. Bei diesem Differentialquotienten ist nämlich die Richtung mit der Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Feldausbreitung vorgegeben. Wenn nun aber auf der rechten Gleichungsseite jede der 3 Raumkomponenten für **eine** konkrete Raumrichtung abgeleitet werden muss und der jeweils korrespondierenden Komponente auf der linken Gleichungsseite gegenübersteht, kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass quasi eine automatische Korrektur stattfindet von auf linker und rechter Gleichungsseite unterlaufener Fehler (aufgrund des nicht korrekten Summenbildungsgesetzes). Wir erkennen jedoch, dass für den trivialen Fall gleichförmiger Ausbreitung, in mathematischer Hinsicht kein echter qualitativer Sprung gegenüber dem differentiellen Durchflutungssatz existiert. Denn für diesen wichtigen Sonderfall pflanzt sich die Strahlung monoton wellenförmig fort mit konstanten Scheitelwerten von elektrischer und magnetischer Feldstärke. Nach der Natur dieses Sonderfalles ist (theoretisch) weder ein Abklingen der Strahlung noch eine (sinnvolle) Zerlegung in räumliche Komponenten zu konstatieren.

Ein Verschiebungsstrom im Freiraum verläuft aber in aller Regel nicht kanalisiert wie ein galvanischer Strom in einem Körper, wobei trotz unterschiedlicher Ausformung des Körpers in jedem differentiellen Raumelement die Linearität des Ohmschen Gesetzes bestimmend ist. Verschiebungsstrom im Freiraum heißt aber dagegen eigengesetzliche Ausbreitung und nicht-lineares Verhalten abhängig vom Weg. Die radiale Feldausbreitung in der Umgebung einer Punktladung ist dabei das Grundmodell. Und das findet natürlich auch in jedem differentiell kleinen Raumelement seinen Niederschlag. Die in Abschnitt 7 dargestellten Feldbetrachtungen für eine frei fliegende elektrische Ladung sind das prägnante Beispiel hierfür.

Überschreiten wir deshalb schließlich die Grenzen des trivialen Falls der gleichförmigen Ausbreitung und betrachten im konkreten Fall die fächerförmige Ausbreitung des HERTZschen Dipols, sprechen endgültig die mathematischen Alarmsignale an. Denn nun kann beim räumlichen Differenzieren mit den Methoden der Vektoranalysis nicht mehr „ungestraft“ das algebraische Summenbildungsgesetz der elektrischen Größen außer Acht gelassen werden. Vielmehr müssen für die drei Richtungen des Raumes getrennte Differentialgleichungen formuliert werden, deren Zusammenklang der Natur des **algebraischen** Summenbildungsgesetzes für elektrische Größen entsprechen muss.

6 Hertzscher Dipol, Kritik zu den Ableitungen in [2]

Zitierte Textstellen sowie die Nummern der zitierten Formeln sind grau hinterlegt

Die Kritik ist an dem Lehrbuch von KÜPFMÜLLER / KOHN „Theoretische Elektrotechnik und Elektronik“, 14./15. Auflage, festgemacht. Die zitierten Stellen sind auf den Seiten 508 ff. nachzulesen. In dem Umfange, wie konkrete Textstellen unmittelbar angesprochen werden, sind sie nachfolgend wiedergegeben und als Zitate gekennzeichnet. Der Einblick in die Gesamtheit der kritisierten Ableitungen nach [2] kann dadurch allerdings nicht ersetzt werden. (Kopien zu [2] der Literaturhinweise sind in Abschnitt 11 enthalten.) Die kritisierte Ableitung ist in der 18. Ausgabe dieses Lehrbuches [4] gestrichen worden. Die historische Aufarbeitung ist gleichwohl angezeigt, um diesem prominenten Thema und dem traditionellen Anspruch dieses Lehrbuches gerecht zu werden.

1.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \vec{E} \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \quad (3)$$

Die Feldgleichungen in der Grundform nach (2) und (3) gelten nur für den Spezialfall der gleichförmigen Feldausbreitung. Sie dürfen keinesfalls als mathematisches Universalwerkzeug missverstanden werden, das unabhängig von den Strukturmerkmalen der betrachteten Feldausbreitung verwendet werden kann. Jede räumliche Struktur, z.B. gleichförmig ohne definierte Quelle, sich aufspreizend wie beim Dipol oder auch die rotierende Form wie im Lichtstrahl [6], verlangt ihre spezifische Ausprägung im mathematischen Ansatz. So sind die Feldgleichungen in der Grundform nach (2) und (3) für das Problem des HERTZschen Dipols mit seiner sich auffächernden Feldausbreitung der ungeeignete und **unrichtige** Ansatz! Alle folgenden Ableitungen wie insbesondere der Umweg über das magnetische Vektorpotential \vec{V} führen in die Irre. Trotzdem wird der weitere Weg kritisch begleitet, um darzulegen, welche weiteren Fehler begangen werden, um den grundsätzlichen Fehler beim Ansatz zu „heilen“ und mindestens in eine gewisse Nähe des richtigen Ergebnisses zu gelangen, wenn auch dem kritischen Betrachter die Unplausibilitäten ins Auge springen. An einen Merksatz, der bereits den Anfängern für das Lösen von Gleichungen an die Hand gegeben wird und auch beim Fortschreiten zur höheren Mathematik kein Quäntchen an Aktualität verliert, muss an dieser Stelle nachdrücklich erinnert werden: „Traue keiner Lösung einer Gleichung, von deren Richtigkeit du dich nicht durch Einsetzen in die Ausgangsbeziehung überzeugt hast.“

Begründende Erklärung zu 1.

In (2) ist die elektrische Feldstärke \vec{E} und damit auch $\operatorname{rot} \vec{H}$ eine proportionale Größe zur Verschiebungsdichte \vec{D} beziehungsweise Stromdichte \vec{J} . Deshalb korrespondiert (2) mit dem Durchflutungssatz in der sogenannten Differentialform

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}.$$

Freilich tritt uns der Durchflutungssatz hier in dem f a l s c h e n Gewande der vektoriellen Darstellung gegenüber. Die vektorielle Aufspaltung aller elektrischen Feldgrößen wie Stromdichte, elektrische Verschiebungsdichte sowie elektrische und magnetische Feldstärke steht nämlich in unauflösllichem Widerspruch zum 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz, der für Aufteilung beziehungsweise Vereinigung von Strömen die algebraische Gesetzmäßigkeit postuliert. Der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz ist ein universelles

Naturgesetz und seine algebraische Summenbildung wird auch in einer differentiell kleinen Raumeinheit nicht außer Kraft gesetzt. Der immanente Widerspruch zur vektoriellen Betrachtungsweise wird bei einer gleichförmigen Feldausbreitung nicht auf die Probe gestellt, er bleibt latent. Werden aber die engen Grenzen des trivialen Falls der gleichförmigen Ausbreitung überschritten, tritt die kategorische Forderung nach der algebraischen Summenbildung des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes voll in Erscheinung. Dies gilt nun speziell für das zu untersuchende Problem der Elementarform der elektromagnetischen Welle beim HERTZschen Dipol. Auf den Punkt gebracht: Soll mit den Feldgleichungen mehr als nur ein Spezialfall abgebildet werden, führt auch für MAXWELL kein Weg vorbei an KIRCHHOFF.

An dieser grundsätzlichen Aussage ist nicht zu rütteln, auch wenn der geschilderte Fehler in allen Lehrbüchern quasi zum Standard erhoben wird und schon bei der Definition des „Alphabets der theoretischen Elektrotechnik“ ganz weit vorne im Lehrbuch einfließt. So wird zu diesem Thema auch bei KÜPFMÜLLER / KOHN nicht konsequent vorgegangen: Im 1. Kapitel unter Punkt 6. „Die Grundgesetze des stationären Strömungsfeldes“ (Seite 59) wird der 1. KIRCHHOFFSche Lehrsatz korrekt zitiert und die algebraische Aufteilung ausgedeutet. (Zitat des ersten Satzes unter Punkt 6: „Die Stromverteilung wird bei räumlicher Ausbreitung durch die gleichen Gesetze bestimmt wie in Widerstandsnetzen.“) Im Kontrast hierzu hat sich aber bereits auf Seite 56 unter Punkt 5., Abb.5.5 „Vektordarstellung der Strömung“, die vektorielle Aufteilung der Stromdichte eingeschlichen. Dieser Gedankenfehler bleibt über weite Strecken unauffällig, hat aber tatsächlich weit reichende Folgen.

2.

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{V} \quad (4)$$

Es ist völlig überflüssig, auf das magnetische Vektorpotential \vec{V} auszuweichen, weil es nach (3) und (4) lediglich eine proportionale Größe zu \vec{E} ist:

$$\vec{V} = \frac{\vec{E}}{-j\omega\mu_0}.$$

Deshalb sollte es in (14) zweckmäßig heißen:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Und natürlich zeichnet sich auch klar ab, dass man es bis hierher mit einer willkürlichen Einengung des Ansatzes auf die einfachste Form der Feldausbreitung, nämlich die gleichförmige Feldausbreitung, zu tun hat. Das magnetische Vektorpotential trägt im Zusammenhang mit dem HERTZschen Dipol nur zu einer Vernebelung der Problematik bei.

Begründende Erklärung zu 2.

Nach (2) und (3) ist zwingend

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{H})$ eine Funktion von \vec{H} und umgekehrt

$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E})$ eine Funktion von \vec{E} .

Wird nach (4)

$\vec{H} = \text{rot } \vec{V}$ als Funktion des Vektorpotentials dargestellt, so stellt die erweiterte Beziehung

$$\vec{H} = \text{rot}(\vec{V} + \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \text{grad } \varphi)$$

eine mathematisch gleichwertige Beziehung dar, wobei φ ein beliebiges skalares Feld ist. Welches skalare Feld φ man auch wählt, die Werte von \vec{H} und $\vec{E}(\vec{H})$ sind davon unabhängig. Das Feld φ ist damit als physikalisch irrelevante Größe identifiziert.

grad φ zu einer künstlichen Eichung von \vec{V} heranzuziehen, ist theoretisch möglich, eine physikalisch sinnvolle Aussage für grad $\varphi \neq 0$ aber nicht ersichtlich.

3.

$$\operatorname{rot}(\underline{\vec{E}} + j\omega\mu_0\underline{\vec{V}}) = 0 \quad (5)$$

Aus

$$\underline{\vec{V}} = \frac{\underline{\vec{E}}}{-j\omega\mu_0}$$

erkennt man sofort, dass (5) eine sinnlose Variante des Typs:

$$\operatorname{rot}(\underline{\vec{E}} - \underline{\vec{E}}) = 0$$

darstellt. Sinnlose Formen sind folgerichtig auch die Gleichungen (6) bis (10) sowie (27), weil sich für $\operatorname{grad} \varphi$, φ , $\operatorname{div} \underline{\vec{V}}$ und $\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\vec{V}}$ jeweils der triviale Wert $= 0$ ergibt! Für eine korrekte Berechnung von $\operatorname{div} \underline{\vec{V}}$ liegt dabei eine Besonderheit vor. Hier besteht keine Dispositionsfreiheit, wahlweise im Sinne partiellen Differenzierens nach Zeit und Weg zu unterscheiden. In dem differentiellen Hüllenintegral müssen aus physikalischen Gründen immer beide Einflussgrößen berücksichtigt werden, um den skalaren Wert von $\operatorname{div} \underline{\vec{V}}$ für einen Raumpunkt zu berechnen. Da aber der Weg $\underline{\vec{R}}$ (Ortsvektor in Ausbreitungsrichtung) und die Zeit t bei der Wellenausbreitung nach (2) bis einschließlich (14) entsprechend

$$\underline{\vec{V}} = \underline{\vec{V}}_0 \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{R}{c} \right) \right]$$

bei der Bildung des Hüllenintegrals in zwingender gegenseitiger Abhängigkeit stehen entsprechend

$$t + \frac{R}{c} = \text{konst.}$$

wird auch der Differentialquotient

$$\operatorname{div} \underline{\vec{V}} = \frac{\partial}{\partial R} \left[\underline{\vec{V}}_0 \cdot \sin(\text{konst.}) \right] = 0$$

zu Null. Dies steht im Einklang mit den sogenannten Kontinuitätsgleichungen. Die mathematischen Werkzeuge der Vektoranalysis dürfen also nicht „blind“ gehandhabt werden, sondern im Einklang mit dem physikalischen Hintergrund. Während bei $\operatorname{div} \underline{\vec{V}}$ beziehungsweise $\operatorname{div} \underline{\vec{E}}$ der in Ansatz gebrachte Durchflutungssatz unter den Bedingungen der Elektrodynamik die Berücksichtigung der gegenseitigen Abhängigkeit von Zeit und Weg erfordert, unterliegt die Anwendung des LAPLACE-Operators auf den Vektor $\underline{\vec{V}}$ oder $\underline{\vec{E}}$ anderen Voraussetzungen: Mit $\Delta \underline{\vec{V}}$ wird mathematisch lediglich die Krümmung der sich ausbreitenden Welle berechnet. Dabei muss alternativ die Zeit „festgehalten“ (Zeitpunkt) und partiell nach dem Weg abgeleitet werden oder umgekehrt der Weg „festgehalten“ (Raumpunkt) und partiell nach der Zeit abgeleitet werden. Man gelangt zu identischen Ergebnissen für beide Alternativen. Nicht zu vergessen ist bei dieser Welle allerdings, dass ihr Ausgangspunkt wie gesagt die willkürliche Einengung auf den Spezialfall der gleichförmigen Ausbreitung ist.

4. Die magnetischen Feldlinien sind aus Symmetriegründen Kreise, deren Mittelpunkte auf der z -Achse liegen. Es muss daher der Vektor $\underline{\vec{V}}$ parallel zur z -Achse gerichtet sein (Zitat Seite 508 unten).

Dass der Vektor $\underline{\vec{V}}$, der wie gesagt eine zu $\underline{\vec{E}}$ proportionale Größe darstellt, unter den Bedingungen des HERTZschen Dipols parallel zur z -Achse gerichtet sei, ist schlicht unrichtig, als Annahme unbewiesen und unbeweisbar.

5.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(rV_z)}{dr^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} V_z \quad (15)$$

Auch wenn an dieser Stelle unmotiviert auf Kugelkoordinaten übergegangen wird, darf keinesfalls bei dem Umgang mit dem LAPLACE-Operator der durch die Krümmung der Koordinaten bedingte Vektor \vec{K} , wie er in Gl. (26.10) auf Seite 307 des gleichen Lehrbuches dargestellt ist, vernachlässigt werden. Diese Vernachlässigung verfälscht (15) zusätzlich.

6.

$$\underline{V}_z = \frac{A}{r} e^{-j\frac{\omega r}{c}} \quad (18)$$

Wenn später ab Gleichung (27) der Versuch unternommen wird, aus dieser Beziehung

$$\underline{V}_z = \frac{A}{r} e^{-j\frac{\omega r}{c}}$$

ein annähernd „brauchbares“ Ergebnis zu destillieren, darf man nicht aus dem Auge verlieren, dass bereits dieses Zwischenergebnis auf mehreren handfesten Fehlern beruht.

7.

$$\frac{dr}{da} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{a}{r} \quad (21)$$

Hier liegt ein elementarer Fehler beim Differenzieren vor, denn der Parameter $z = z(a)$ als (proportional) von a abhängige Größe (siehe Abb. 44.1 in [2]), kann beim Differenzieren nicht wie eine Konstante behandelt werden. Man erzielt durch diesen Fehler den Kehrwert des richtigen Wertes.

Begründende Erklärung zu 7.

Die Physik bestimmt die dazu passende Mathematik! Das von einem Dipol ausgehende Feld breitet sich strahlenförmig nach allen Richtungen des Raumes aus. Physikalisch vorgegeben ist demgemäß also die geradlinige Fortpflanzung auf einem beliebigen Strahl, wie er in Abb. 44.1 beispielhaft durch den Winkel δ definiert ist. Für jeden Raumpunkt dieses Strahls mit dem Ortsvektor r gilt:

$$\sin \delta = \frac{a_n}{r_n} = \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{r_{n+1} - r_n} = \frac{\Delta a}{\Delta r} = \frac{da}{dr}.$$

Für den Differentialquotienten $\frac{dr}{da}$ gilt demgemäß:

$$\frac{dr}{da} = \frac{r}{a}.$$

8.

$$\operatorname{div} \underline{V}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (28)$$

Hier wird analog 7. erneut auf der Basis falschen Differenzierens operiert. Was man aus einer Größe $\operatorname{gr} \operatorname{div} \underline{\vec{V}}$, die auf der Basis der Feldgleichungen nach (2) und (3) unabweisbar

$$\operatorname{gr} \operatorname{div} \underline{\vec{V}} = 0.$$

gesetzt werden muss, in der Folge alles an „Ergebnissen“ herausgeholt werden kann, wenn die mathematischen Regeln mehrfach gezielt manipuliert worden sind, ist mehr oder weniger ein Spiel von Versuch und Irrtum.

9.

$$\underline{E}_r = \underline{E}_z \cos \delta + \underline{E}_a \sin \delta \quad (37)$$

$$\underline{E}_\delta = -\underline{E}_z \sin \delta + \underline{E}_a \cos \delta \quad (38)$$

Die vektorielle Aufteilung ist, wie mehrfach ausgeführt, unzulässig.

10.

$$\underline{E}_r = \frac{2A \cos \delta}{j\omega \varepsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c}\right) e^{-j \frac{\omega r}{c}} \quad (40)$$

$$\underline{E}_\delta = \frac{A \sin \delta}{j\omega \varepsilon_0 r^3} \left[1 + j \frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2\right] e^{-j \frac{\omega r}{c}} \quad (41)$$

Da in (40) und (41) die Kreisfrequenz auf Grund der fehlerhaften Ableitung im Nenner auftaucht, entarten deren Ergebnisse für $\omega \rightarrow 0$ nach Unendlich: $\underline{E}_r, \underline{E}_\delta \rightarrow \infty$. Weshalb sie angeblich laut nachfolgender Textstelle für $\omega \rightarrow 0$ in Gleichung (43.39) beziehungsweise (43.40) übergehen sollen, ist allein deshalb (aber nicht nur deshalb) nicht nachvollziehbar. Zu (43.39) und (43.40) ist nachfolgend unter Abschnitt 7. Näheres ausgeführt.

7 Feldbetrachtung zur frei fliegenden elektrischen Ladung

Die Nummern zitierter Formeln und Bilder aus [2] sind auch in diesem Abschnitt grau hinterlegt.

Der Hinweis in [2] auf die Beziehungen (43.39) und (43.40) und deren Verwandtschaft mit dem Thema „HERTZscher Dipol“ erregt nach allem bisher Dargelegten hinreichend Verdacht, dass auch hierbei dem 1. KIRCHHOFFSchen Gesetz nicht Rechnung getragen wird und abseits des korrekten Weges „Ersatzlösungen“ gesucht werden. Die angesprochenen Beziehungen (43.39) und (43.40) sind den Feldbetrachtungen in der Umgebung einer mit konstanter Geschwindigkeit frei fliegenden Ladung gewidmet [3]. (Kopien zu [3] des Literaturhinweise sind in Abschnitt 11 enthalten.) Diese Feldbetrachtungen sind ein prägnantes Beispiel, wie im Zusammenspiel mehrerer Fehler ein scheinbar stimmiges Ergebnis erzielt werden kann, im vorliegenden Fall quasi als Nebeneffekt der Versuch einer physikalischen Begründung der AMPÈRESchen Formel. Der „Erfolg“ beruht aber tatsächlich auf folgendem „wohl abgestimmten“ Fehlertripel:

1. Fehlerhafte Unterstellung des vektoriellen Bildungsgesetzes für die elektrische Feldstärke E und die Stromdichte J . Beispiel: $E_x = E \cdot \cos \alpha$, $E_y = E \cdot \sin \alpha$. Richtig muss es für die bewegte Ladung aber heißen: $E_x = E \cdot \cos^2 \alpha$, $E_y = E \cdot \sin^2 \alpha$.

2. Fehler beim Differenzieren (Siehe auch nachstehende Abbildung 7):

In jedem Moment sind die Linien gleichen Potentials Kreise um den aktuellen Standort der Ladung. Für die Ermittlung einer von der Geschwindigkeit der Ladung abhängigen Feldstärke als Potentialdifferenz ist beim Differenzieren das Fortschreiten auf dem radialen Ortsvektor r maßgebend. Soll nun aber in Richtung der x -Komponente, die gegen den Ortsvektor r den Winkel α einnimmt, differenziert werden, muss das von Winkel α abhängige Verhältnis $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ in die Berechnung einfließen. Zu differenzieren ist gleichwohl die resultierende Feldstärke E . Dass das Differenzieren der elektrischen Feldstärke der Ermittlung der von der Geschwindigkeit der Ladung abhängigen Verschiebungsstromdichte J dient, sei der Vollständigkeit halber erwähnt.

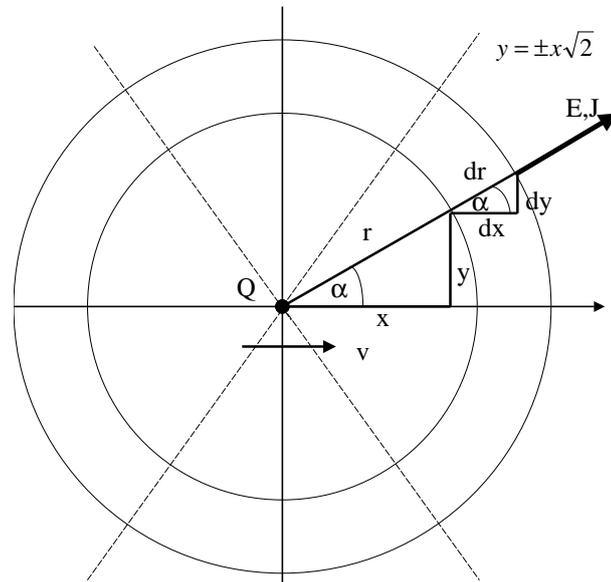


Abbildung 7: Frei fliegende elektrische Ladung

3. Fehler bei der Ermittlung der magnetischen Feldstärke H mit Hilfe des Durchflutungssatzes. Die in (43.42) angegebene Integration beschränkt sich auf J_x , also nur eine Komponente der Stromdichte J . Dass die andere Komponente J_y ebenfalls ihren Anteil zur magnetischen Feldstärke H beiträgt, wird völlig außer Acht gelassen.

Die korrekte Ableitung ergibt sich wie folgt: Im Umfeld einer Ladung folgt die elektrische Feldstärke folgender Gesetzmäßigkeit:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}. \quad (7.1)$$

Die Linien gleichen Potentials sind Kreise mit der Ladung im Mittelpunkt. Die Ladung Q bewegt sich geradlinig auf der x -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v . Die Potentialdifferenz für das Wegelement dx entspricht dem Skalarprodukt

$$E \cdot \cos \alpha \cdot dx.$$

Für die Richtigkeit dieses Zwischenergebnisses genügt es, wenn allein dem Wegelement echte Vektoreigenschaft zukommt. Die Bewegung der Ladung auf ihrer Flugbahn um dx entspricht also einer Änderung der elektrischen Feldstärke um

$$dE = \frac{\partial}{\partial x}(E \cdot \cos \alpha) \cdot dx. \quad (7.2)$$

Es muss beim Differenzieren stets die resultierende Feldstärke E betrachtet werden, denn x - und y -Komponente sind für jeden Ortspunkt stets in fester gegenseitiger Zuordnung und nur die Resultierende bestimmt die Potentialdifferenz. Die gedankliche Einbeziehung der dritten Dimension im Raume erfordert lediglich die Substitution von y durch $\sqrt{y^2 + z^2}$. Die später angesprochenen Geraden mit $y = \pm x\sqrt{2}$ als Scheidelinien gehen dann in Kegelmäntel der Beziehung $\sqrt{y^2 + z^2} = \pm x\sqrt{2}$ über. (Wenn in [3] unzulässigerweise separat nach x - und y -Komponente differenziert wird, stellt sich die Frage, weshalb dann die dritte Dimension nicht betrachtet worden ist.)

Die von der Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ abhängige Verschiebungsstromdichte J ergibt sich daraus mit:

$$J = -\varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} = -\varepsilon_0 v \cdot \frac{dE}{dx} \quad (7.3)$$

Der gesamte Raum mit der Ladung im Mittelpunkt wird gedanklich in 2 Halbräume aufgeteilt, deren Trennebene durch die y -Achse geht und senkrecht auf der x -Achse steht. Für den positiven Halbraum mit $x \geq 0$ kommt in dem negativen Vorzeichen der rechten Gleichungsseite von (7.3) zum Ausdruck, dass zwar die elektrische Feldstärke längs der x -Achse, also in Richtung von v abnimmt, aber bezogen auf einen festen Ortspunkt auf Grund der mit Geschwindigkeit v herannahenden Ladung im Zeitintervall $dt = \frac{dx}{v}$ zunimmt und damit die Richtung von J , projiziert auf die x -Achse, mit der Richtung von v übereinstimmt. Für den negativen Halbraum mit $x \leq 0$ gelten für einen Ortspunkt genau die umgekehrten Verhältnisse: Die elektrische Feldstärke nimmt in Richtung von v zu und die Ladung entfernt sich. Deshalb errechnet sich für positiven wie negativen Halbraum in gleicher Weise aus (7.3) mit (7.2) und (7.1):

$$J = -\varepsilon_0 v \cdot \frac{\partial}{\partial x}(E \cdot \cos \alpha) = -\varepsilon_0 v \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{r} \right) = -\frac{Qv}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Schließlich ergibt sich durch Differenzieren:

$$J = \frac{Qv}{4\pi} \cdot \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (7.4)$$

Also genau die Funktion, die in [3] in fehlerhafter Weise allein der x -Komponente zugeordnet wird, entspricht in Wirklichkeit dem resultierenden Wert der von v abhängigen Verschiebungsstromdichte J . J ist für jeden Standort der Flugbahn der Ladung immer nur radial mit Bezug auf die Ladung gerichtet. Es gibt also keine geschlossenen Feldlinien der Stromdichte im Umfeld einer mit konstanter Geschwindigkeit fliegenden Ladung, wie es in fehlerhafter Weise aus Abb. 43.8 in [3] hervorgeht. Gäbe es die in Abb. 43.8 dargestellten Wirbelströme, hätte das natürlich weitergehende Implikationen, die dann nicht einfach schweigend übergangen werden dürften. Da wir die Geschwindigkeit v als äußerst gering gegenüber der Lichtgeschwindigkeit annehmen, sind die durch v ausgelösten Verschiebungsstromdichten immer nur überlagerte Effekte, deren Richtung durch die normalen radial gerichteten Feldlinienbahnen der „ruhenden“ Ladung vorgezeichnet sind. Natürlich ist dieser überlagerte Effekt gleichwohl ortsabhängig, also abhängig vom jeweiligen Abstand des betrachteten Ortes gegenüber der Ladung und dessen Winkel gegen die x -Achse. Die Geraden

$$y = \pm\sqrt{2},$$

stellen Scheidelinien dar. Im positiven Halbraum strömt in Flugrichtung vor der Scheidelinie J von der Ladung weg, in Flugrichtung hinter der Scheidelinie strömt J auf die Ladung zu. Im negativen Halbraum sind die Verhältnisse genau umgekehrt. Der Durchflutungssatz,

angewandt auf J , also wohlgermerkt x - und y -Komponente von J einbeziehend, die ja beide senkrecht zur magnetischen Feldstärke H verlaufen, führt zu folgender Gleichung:

$$2\pi y \cdot H = \int_0^y J \cdot 2\pi \cdot dy \quad (7.5)$$

Dass auch die y -Komponente von J einen Beitrag zur magnetischen Feldstärke leistet, ist zunächst einsichtig. Allerdings muss hierbei der Durchflutungssatz auf den Strom beziehungsweise die zugehörige magnetische Feldstärke in einer geometrischen Konstellation angewandt werden, die vom vertrauten „Normalfall“ abweicht. Während die kreisförmige Linie des Linienintegrals der magnetischen Feldstärke im „Normalfall“ den zugehörigen Strom in seiner radialen Ausdehnung umschlingt und eingrenzt, wird der zur radial verlaufenden y -Komponente der Stromdichte gehörige Strom in seiner Strömungsbahn in Strömungsrichtung durch die Kreislinie mit Radius y begrenzt, über die das Linienintegral der magnetischen Feldstärke gebildet wird. Beide betrachteten Anwendungsfälle haben aber das entscheidende Merkmal gemeinsam: Stromdichte und magnetische Feldstärke verlaufen senkrecht zueinander. Maßgebender Querschnitt, für den der Stromdurchsatz durch Integration ermittelt wird, ist die Kreisfläche mit dem Radius y , die senkrecht zur x -Achse steht und deren Mittelpunkt in die x -Achse fällt. x - und y -Komponente der Stromdichte werden über die gleiche senkrecht auf der x -Achse stehende Kreisfläche integriert. Die Berechtigung dieser Vorgehensweise erkennt man, wenn man berücksichtigt, dass der Durchflutungssatz unabhängig davon gilt, unter welchem Schnittwinkel ein Strom die durch das Linienintegral der magnetischen Feldstärke festgelegte Fläche durchströmt, in unserem konkreten Fall also die Kreisfläche mit dem Radius y , die senkrecht zur x -Achse steht und deren Mittelpunkt in die x -Achse fällt. In dieser Sicht der Dinge ist die y -Komponente von J lediglich der Grenzfall, bei dem der Winkel der Stromdichte gegen die durchströmte Kreisfläche auf Null geschrumpft ist. Integriert wird für einen diskreten Wert von x , während y die Integrationsvariable darstellt. Die Integration bedeutet algebraische Addition differentiell kleiner ringförmiger Teilströme. Das ist an sich nichts Ungewöhnliches. Dagegen tritt in prägnanter Form die Besonderheit in Erscheinung, dass jedem dieser differentiellen Teilströme eine andere Richtung im Raum zukommt abhängig vom Verhältnis von x zu y beziehungsweise vom Winkel α . Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich mit (7.4) eingesetzt in (7.5) nach Integration:

$$H = \frac{Qv}{4\pi} \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qv}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2}. \quad (7.6)$$

Diese Form entspricht der Gesetzmäßigkeit für die magnetische Feldstärke nach BIOT und SAVART sowie AMPÈRE. Die mit gleichförmiger Geschwindigkeit fliegende Ladung ist der aperiodische Sonderfall, bei dem in Flugrichtung vor der Ladung ein magnetisches Feld aufgebaut wird und hierzu der entsprechende Widerstand überwunden werden muss. Der Abbau des magnetischen Feldes hinter der Ladung und damit die der Ladung vermittelte Schubkraft ist das genaue Spiegelbild des für den Aufbau geschilderten Vorgangs. Der Gesamtprozess ist durch Gleichgewicht gekennzeichnet. Ein Abbremsen der Ladung und elektromagnetische Energieabgabe an das Umfeld findet nicht statt! (Die Abwesenheit eines Fremdfeldes wird unterstellt.) Nachdem nun die elektromagnetischen Verhältnisse im Umfeld einer mit konstanter Geschwindigkeit v fliegenden elektrischen Ladung aufgeklärt sind, lässt sich in eleganter Weise der Übergang zu der Alternative der schwingenden Ladung entsprechend dem HERTZschen Dipol herstellen.

Zwischen dem Produkt $I \cdot l$ in der nachfolgend unter Punkt 8.1 in (8.23) abgeleiteten Beziehung und $Q \cdot v$ in (7.6) gilt die einfache Beziehung:

$$I \cdot l = Q \cdot v.$$

Dies gilt, weil für $l = \Delta l$ eine sehr kleine Ausdehnung angenommen wird und v sich aus

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

ergibt. Damit ist:

$$I \cdot \Delta l = Q \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

oder

$$I = \frac{Q}{\Delta t}.$$

Aus dieser Form erkennen wir die korrekte Verknüpfung von Strom und bewegter Ladung. Die von der Bewegung einer Ladung ausgelöste magnetische Feldstärke folgt prinzipiell immer der gleichen, der AMPÈRESchen Formel entsprechenden Gesetzmäßigkeit. Bei einer sinusförmig schwingenden Ladung kommt diese Wirkung in analog schwingender Form zur Geltung, wobei lediglich zusätzlich eine zeitliche Verzögerung auftritt. Diese Verzögerung entspricht dem mit Lichtgeschwindigkeit zurückgelegten Laufweg zwischen Ladung und betrachtetem Ort. Unter diesen Vorgaben stimmen die Formel (8.23) für den HERTZschen Dipol und Formel (7.6) für die gleichförmige Bewegung der Ladung ideal überein. (Die unterschiedliche Bezeichnung R beziehungsweise r für den für beide Fälle identischen Ortsvektor ist natürlich physikalisch ohne Bedeutung. Lediglich unterschiedliche Bezeichnungen liegen auch für $H_\alpha = H$ und $\delta = a$ vor.)

Die nach der sinus-Funktion schwingende magnetische Feldstärke ist nun aber zwingend mit der senkrecht zu ihr verlaufenden elektrischen Feldstärke E entsprechend (8.20) in diesem Aufsatz verbunden. Weitere Einzelheiten sind den Ableitungen unter Punkt 8.1 zu entnehmen. Die Betrachtungen zu gleichförmig sich bewegender elektrischer Ladung einerseits und schwingender Ladung andererseits geben aber auch noch Anlass, sich kritisch mit speziellen Behauptungen zu elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten in Lehrbüchern auseinanderzusetzen, und zwar im Hinblick auf die Vermittlung von Grundwissen zur Kernphysik. So heißt es irreführend in [5]: „Aus der Elektrizitätslehre wissen wir, dass gleichförmig bewegte Elektronen in ihrer Umgebung ein konstantes Magnetfeld erzeugen, wie wir dies vom Gleichstrom her kennen; ferner wissen wir, dass ungleichförmig bewegte Elektronen, ebenso wie z. B. ein Wechselstrom, in ihrer Umgebung ein veränderliches Magnetfeld hervorbringen, das in seiner Umgebung ein weiteres veränderliches elektrisches Feld schafft usw. (S. 625). Diese Felder breiten sich im Raum aus. Da aber elektrische und magnetische Felder Energie enthalten, müsste jedes den Kern umkreisende Elektron laufend Energie verlieren, so dass es sich auf spiralförmigen Bahnen um den Kern bewegt und schließlich in diesen hineinfällt (Abb.747.2).“ Tatsächlich aber entsprechen die elektromagnetischen Verhältnisse im Umfeld eines Elektrons, das einen Atomkern umkreist, in weitgehender Übereinstimmung dem, was für die mit konstanter Geschwindigkeit fliegende Ladung dargelegt wurde. Trotz gekrümmter Umlaufbahn gilt, dass auch hier ein charakteristischer Prozess permanenten Gleichgewichts abläuft. Was in Flugrichtung vor dem Elektron an Energie in den Raum investiert und an Widerstand überwunden werden muss, wird hinter dem Elektron „in gleicher Münze zurückgezahlt“, so dass der resultierende Widerstand zu Null wird. Energieverlust findet nicht statt.

Für das Abgeben von elektromagnetischer Energie muss ein Ladungsträger zwingend einen mit dem Quantensprung korrespondierenden Potentialsprung im Mikrokosmos erfahren. Dieser Potentialsprung ist abhängig von äußerer Anregung. Solange ein Elektron bei seinem Umlauf um den Atomkern keinen Wechsel des Energieniveaus durch Springen in eine andere Umlaufbahn oder Elektronenschale erfährt, wäre es gegen die elektromagnetische Gesetzmäßigkeit, dass in irgendeiner Form Energie abgegeben oder aufgenommen wird. Wechselspannung an einer Antenne bedeutet dagegen im Kontrast hierzu gezielte Anregung zum Potentialsprung im Leitungsband.

Nach den bekannten Gesetzen des Elektromagnetismus muss also im Atom weder das Ausbremsen des Elektrons noch sein Absturz in den Kern befürchtet werden. Dass diese schlichte Aussage zunächst auf dem Idealfall des autarken, unbeeinflussten Atoms fußt, mindert nicht die Aussagekraft dieser prinzipiellen Feststellung. Dass so ein Elektron in seiner Atomheimat aber auch unter dem Druck der Nachbaratome und $-$ elektronen überlebensfähig bleibt, dazu bedarf es aber ebenfalls keiner Verabschiedung von den elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten. Die im Mikrokosmos in den Vordergrund des Interesses tretende Quantisierung der Energie darf dabei nicht als Gegensatz zu diesen Gesetzmäßigkeiten gewertet werden, sondern als deren fundamental wichtiger Teil. Es ist also nicht zu befürchten, dass die elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten beim geistigen Vordringen in den Mikrokosmos frühzeitig ihre Gültigkeit verlieren. Deswegen ist auch die Absorption beziehungsweise Emission elektromagnetischer Strahlung keinesfalls als mit den „normalen“ elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten unvereinbarer Prozess zu betrachten. Vielmehr ist mit dem Quantensprung ja ein Wechsel der Umlaufbahn und der $-$ geschwindigkeit des Elektrons verbunden. Der Verlauf dieses „Sprungs“ ist zwar weder beobachtbar noch messbar. Wir dürfen uns von der einprägsamen Begriffswahl „Sprung“ aber nicht verleiten lassen, hier einen physikalischen Vorgang abseits aller elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten und quasi ohne Zeitbedarf anzunehmen. Zu einem Sprung gehört immer auch ein Schwung und das zum Wesen einer Schwingung gehörige Anschwellen und Abklingen der Wirkung (wie beim Dipol). Im Mikrokosmos haben wir es zwar mit einem „elektrischen Mechanismus“ zu tun, in dem ein permanenter Austausch von „Paketen“ zwischen den „Akteuren“ stattfindet. Diese „Pakete“ repräsentieren Information und Energie im Verbund und lösen an den „Stromkreisen“ entsprechende „Schaltungsänderungen“ mehr oder weniger großen Umfangs aus. Das elektromagnetische Gesamtgebilde ist quasi ständig in Umbau begriffen und der theoretische Aufwand zur Abbildung dieses Prozesses steigt lawinenartig an. Im Mikrokosmos können Effekte erkannt werden, die im Makrokosmos keine unmittelbar zuordenbare Wirkung auslösen. Aber anzunehmen, dass umgekehrt elektromagnetischen Gesetzmäßigkeiten, die aus unserer makroskopischen Erfahrungswelt abgeleitet sind, kein geeignetes Instrument bei Beurteilung von Vorgängen im Mikrokosmos seien, besteht keine Ursache. Dass an der Nahtstelle zwischen Makro- und Mikrokosmos keine Brüche im System physikalischer Naturgesetzmäßigkeiten zu erwarten sind, darauf deutet alles hin, was wir über den drahtlosen Informations-/Energieaustausch wissen. Die in Abschnitt 8.3 aufgezeigte Feinstruktur elektromagnetischer Strahlung ist dabei ein kompatibler Baustein, der in dieses Bild passt.

8 Feldgleichungen und Feldausbreitung um eine Antenne

8.1 Hertzscher Dipol – Grundlagen und Ableitungen

Die Annahmen zum gewählten Koordinatensystem sind der nebenstehenden Abbildung 8 zu entnehmen.

Die nachfolgend angesprochenen physikalischen Größen sind:

J ... Stromdichte

E ... Elektrische Feldstärke

H ... Magnetische Feldstärke

ε_0 ... Elektrische Feldkonstante

μ_0 ... Magnetische Feldkonstante

t Zeit

ω Kreisfrequenz

c Lichtgeschwindigkeit

In ihrer allgemein üblichen Form lauten die Feldgleichungen im nicht leitfähigen Medium, also im Freiraum:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Diese in die mathematische Formelsprache der Vektoranalysis eingebetteten partiellen Differentialgleichungen sind durch das Strukturmerkmal einer gleichförmigen Fortpflanzung der Strahlung im Raum gekennzeichnet, d.h., sie gelten nur unter der Voraussetzung dieses Strukturmerkmals. Zu lösen ist aber das Problem der sich auffächernden Feldausbreitung im Umfeld einer Antenne, in der eine punktförmige Ladung auf differentiell kleinem Weg zeitlich sinusförmig schwingt (HERTZscher Dipol). Als erste grundsätzliche Aussage ist deshalb hervorzuheben, dass die Feldgleichungen nach (8.1) und (8.2) als Ansatz für das zu lösende Problem **ungeeignet** sind! Wohl aber können sie als Ausgangspunkt dienen, um durch zielgerichtete Modifikationen **strukturadäquate** Differentialgleichungen abzuleiten. Die Lösung dieser auf die 3 Dimensionen des Raumes und die Zeit abgestellten partiellen Differentialgleichungen nach (8.1) und (8.2) ist eine Funktion des Typs:

$$\vec{E} = \vec{E}(R, t) = \vec{E}(R) \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{R}{c} \right) \right] \quad (8.3)$$

beziehungsweise

$$\vec{H} = \vec{H}(R, t) = \vec{H}(R) \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{R}{c} \right) \right] \quad (8.4)$$

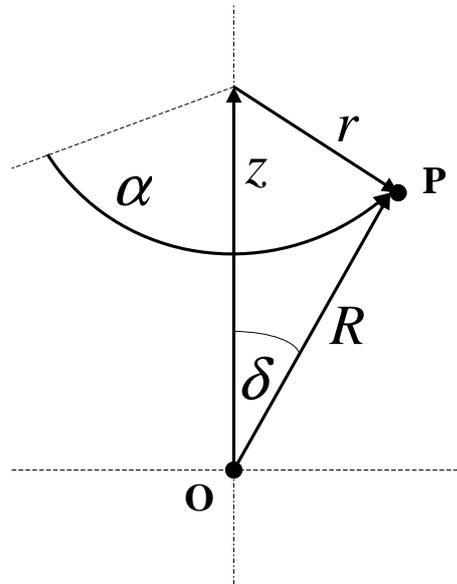


Abbildung 8: Zylinderkoordinaten

mit

$$\begin{aligned}\vec{E}(R) &= \vec{E}_0 \cdot f(R), \\ \vec{H}(R) &= \vec{H}_0 \cdot f(R).\end{aligned}$$

Dabei steht R für den Ortsvektor in Ausbreitungsrichtung und damit stellvertretend für alle 3 Dimensionen des Raumes. Solange diese Voraussetzung erfüllt ist, ist die Abhängigkeit von der Struktur auf die Funktionen $E(R)$ und $H(R)$ eingegrenzt und die folgenden, auf dieser Basis abgeleiteten Beziehungen bis einschließlich (8.22) sind unabhängig von der Struktur, wobei die Strukturmerkmale natürlich nicht vernachlässigt werden, sondern implizit in $E(R)$ und $H(R)$ berücksichtigt sind. Der Einfachheit halber wird in der Folge, solange eine Aufspaltung in die 3 Komponenten des Raumes unterbleibt, auf den (einen Vektor kennzeichnenden) Pfeil über dem Symbol von E und H verzichtet. In der vorliegenden Form nach (8.3) und (8.4) ist der Zusammenhang zwischen dem rein raumabhängigen Teil $E(R)$ und $H(R)$ einerseits und dem frequenzabhängigen Teil $\sin\left[\omega\left(t + \frac{R}{c}\right)\right]$ andererseits dargestellt. Nur auf der Basis dieses Lösungsansatzes kann der räumliche Differentialquotient ($\text{rot } \vec{H}, \text{rot } \vec{E}$) raumdeckend mit dem zeitlichen Differentialquotienten ($\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$) übereinstimmen, wenn von dem negativen Vorzeichen von $-\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ zunächst einmal abgesehen wird. Dabei gilt die Voraussetzung, dass der Differentialquotient

$$-\frac{\partial R}{\partial t} = c$$

eine Konstante darstellt, die im Freiraum identisch mit der Lichtgeschwindigkeit c ist. Einerseits besteht also Proportionalität zwischen zeitlicher Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ und räumlicher Ableitung $\frac{\partial}{\partial R} = -\frac{\partial}{\partial t \cdot c}$, andererseits ist es markantes Merkmal, dass beim Übergang von zeitlicher auf räumliche Ableitung und umgekehrt stets der Vorzeichenwechsel zu beachten ist. Nur auf der Basis dieser Grundvoraussetzung weisen der Ortsvektor R und der Zeitpfeil gleichgerichtet aus dem Ursprung der elektromagnetischen Strahlung in die Richtung der Feldausbreitung. Damit ist

$$\int \partial t = -\frac{1}{c} \cdot \int \partial R$$

oder

$$t + \frac{R}{c} = \text{konst.}$$

Deshalb ist es zulässig, eine Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\partial}{\partial t} [E(R, t)] \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial t} [H(R, t)]$$

durch eine Ableitung nach dem Weg

$$-c \cdot \frac{\partial}{\partial R} [E(R, t)] \quad \text{beziehungsweise} \quad -c \cdot \frac{\partial}{\partial R} [H(R, t)]$$

zu substituieren. Beim zeitlichen oder räumlichen Differenzieren von $E(R, t)$ und $H(R, t)$ ist zu unterscheiden zwischen dem von der Frequenz (also von der Schwingung) **unabhängigen**, nur von R abhängigen Teilglied $E(R)$ beziehungsweise $H(R)$ einerseits und dem frequenzabhängigen Teilglied

$$\sin\left[\omega\left(t + \frac{R}{c}\right)\right]$$

andererseits. Das Teilglied $E(R)$ beziehungsweise $H(R)$ kann für sich getrennt räumlich abgeleitet werden. Das frequenzabhängige Teilglied $\sin\left[\omega\left(t + \frac{R}{c}\right)\right]$ wird dagegen bei dieser Auftrennung wegen der Bedingung: $t + \frac{R}{c} = \text{konst.}$ mathematisch wie ein konstantes Glied behandelt. Mit der Beziehung

$$t + \frac{R}{c} = \text{konst.}$$

wird die feste Zuordnung von Raum und Zeit im Sinne eines Koordinatensystems festgelegt. Als Konsequenz der geschilderten Auftrennung kann nun umgekehrt der **frequenzunabhängige** Teil wie ein konstantes Glied behandelt werden, dagegen der **frequenzabhängige** Teil auf der Basis von $t + \frac{R}{c} = \text{konst.}$ zeitlich oder räumlich abgeleitet werden. Davon wird in der Folge Gebrauch gemacht und so ergibt sich zunächst:

$$\frac{\partial E(R, t)}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial E(R, t)}{\partial R},$$

$$\frac{\partial H(R, t)}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial H(R, t)}{\partial R}.$$

Die komplexe Zahlenebene bietet die adäquate Form der Abbildung elektromagnetischer Wechselgrößen nach Betrag und Phase. Deshalb ergeben sich aus (8.3) und (8.4) die gleichwertigen Beziehungen:

$$\underline{E} = \underline{E}(R, t) = \underline{E}(R) \cdot e^{j\omega(t + \frac{R}{c})}, \quad (8.5)$$

$$\underline{H} = \underline{H}(R, t) = \underline{H}(R) \cdot e^{j\omega(t + \frac{R}{c})} \quad (8.6)$$

Die Feldgleichungen werden ebenfalls in die komplexe Schreibweise überführt, wobei das bereits angesprochene Vorzeichenproblem noch ungelöst bleibt:

$$\text{rot } \underline{H} = j\omega\varepsilon_0 \underline{E},$$

$$\text{rot } \underline{E} = -j\omega\mu_0 \underline{H}.$$

Dies entspricht noch streng der Originalform der Feldgleichungen nach (8.1) und (8.2).

Der physikalische Prozess der Feldausbreitung ist in Abbildung 9 in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Dabei bildet sich besonders anschaulich ab, aber, wie nachfolgend gezeigt wird, durchaus in Übereinstimmung mit der abstrakten Formelsprache, dass die Originalform der Feldgleichungen einen Vorzeichenfehler enthält! Und zwar ist die elektrische Feldstärke \underline{E} in den beiden Feldgleichungen nach der Originalform in einer **nicht übereinstimmenden** Bedeutung in Anspruch genommen. Die erste Feldgleichung $\text{rot } \underline{H} = j\omega\varepsilon_0 \underline{E}$

hat den Durchflutungssatz für die differentielle Raumeinheit zum Gegenstand und \underline{E} verläuft in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. \underline{E} entspricht dem auf die Längeneinheit bezogenen Spannungsabfall (nach Maßgabe des Wellenwiderstandes).

Die zweite Feldgleichung

$$\text{rot } \underline{E} = -j\omega\mu_0 \underline{H}$$

hat dagegen das Induktionsgesetz zum Gegenstand, aus dem bekanntlich **nicht** ein

Spannungsabfall hervorgeht, sondern die eingepreßte Spannung im Sinne einer Stromquelle, also (bezogen auf die Längeneinheit) **nicht** \underline{E} , sondern $-\underline{E}$!

Das Beispiel einer Gleichspannungsquelle, an die ein Belastungswiderstand angeschlossen ist,

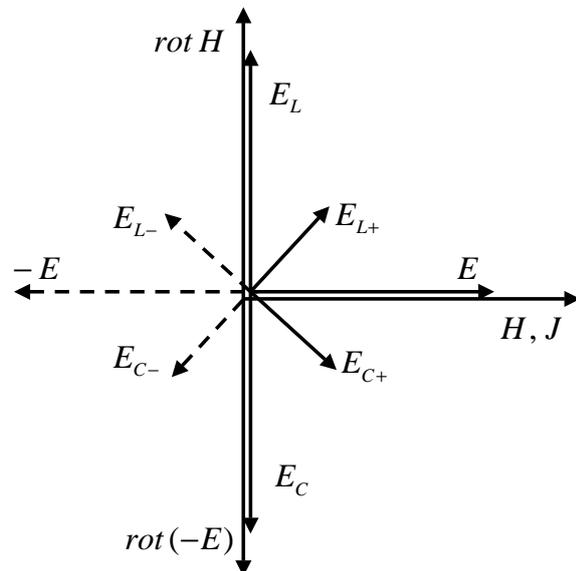


Abbildung 9: Zeigerdiagramm der Feldgleichungen

verdeutlicht die Verhältnisse: Im Belastungswiderstand stimmt die Richtung von Strom und Spannungsabfall überein, in der Stromquelle ist dagegen die „eingepögte“ Spannung der Stromrichtung, also auch dem Spannungsabfall im Lastwiderstand entgegengesetzt, wie es dem 2. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz entspricht.

Die Beseitigung dieses Vorzeichenfehlers führt zu folgender Form der Feldgleichungen:

$$\operatorname{rot} \underline{H} = j\omega\varepsilon_0 \underline{E},$$

$$\operatorname{rot}(-\underline{E}) = -j\omega\mu_0 \underline{H}.$$

Daraus ergeben sich letztlich strukturgleiche Beziehungen für \underline{E} und \underline{H} :

$$\operatorname{rot} \underline{H} = j\omega\varepsilon_0 \underline{E}, \quad (8.7)$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = j\omega\mu_0 \underline{H}. \quad (8.8)$$

Unter den vorstehend angegebenen Voraussetzungen können nun $\operatorname{rot} \underline{H}$ und $\operatorname{rot} \underline{E}$ als räumliche Differentialquotienten (Ableitung nach Parameter R in Ausbreitungsrichtung) dargestellt und dann in zeitliche Ableitungen überführt werden. Deshalb ergibt sich:

$$\operatorname{rot} \underline{H} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial R} = \frac{\partial \underline{H}}{\partial t \cdot c} = \underline{H} \cdot \frac{j\omega}{c} = j\underline{J} = j\omega\varepsilon_0 \underline{E}, \quad (8.9)$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{E}}{\partial R} = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t \cdot c} = \underline{E} \cdot \frac{j\omega}{c} = j\underline{J} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = j\omega\mu_0 \underline{H}. \quad (8.10)$$

Der räumliche Differentialquotient $-\frac{\partial H}{\partial R} = \operatorname{rot} H$ beziehungsweise $-\frac{\partial E}{\partial R} = \operatorname{rot} E$ ergibt sich für den der Ableitung zugrundegelegten und vorstehend beschriebenen Spezialfall, dass der Feldvektor vom Betrag H beziehungsweise E in die auf dem Ortsvektor R senkrecht stehende Ebene fällt. Vektoriell kommt jedem der 3 Elemente

- ∂H beziehungsweise ∂E ,
- ∂R und
- $-\frac{\partial H}{\partial R} = \operatorname{rot} H$ beziehungsweise $-\frac{\partial E}{\partial R} = \operatorname{rot} E$

eine definierte Richtung zu. Die 3 möglichen Richtungen stehen im Sinne eines Koordinatensystems aufeinander senkrecht.

$\operatorname{rot} \underline{H}$ und $\operatorname{rot} \underline{E}$ werden in (8.9) und (8.10) aber insbesondere in zeitlicher Ableitung dargestellt, projiziert auf die komplexe Zahlenebene bedeutet dies Multiplikation von \underline{H} beziehungsweise \underline{E} mit j und Drehung des Zeigers **gegen** den Uhrzeigersinn. Räumliche Ableitung, die später ab Gleichung (8.34) zur Anwendung kommt, bedeutet dagegen Multiplikation mit $-j$ und Drehung **im** Uhrzeigersinn.

Aus (8.9) und (8.10) errechnet sich:

$$\underline{E} = \underline{H} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 c} = \underline{H} \cdot \mu_0 c = \underline{J} \cdot \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \quad (8.11)$$

mit

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c} = \mu_0 c = Z_0, \quad (8.12)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad (8.13)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (8.14)$$

c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit, also die Lichtgeschwindigkeit, und Z_0 ist der Wellenwiderstand. Weiterhin ergibt sich:

$$\frac{1}{\omega\varepsilon_0} = \omega\mu_0 \cdot \frac{c^2}{\omega^2} = Z_0 \cdot \frac{c}{\omega} \quad (8.15)$$

und umgeformt:

$$\frac{1}{\omega\varepsilon_0 \cdot \frac{c}{\omega}} = \omega\mu_0 \cdot \frac{c}{\omega}. \quad (8.16)$$

Der spezifische induktive Widerstand, der aus den Feldgleichungen nach (8.15) hervorgeht und mit dem spezifischen kapazitiven Widerstand korreliert, beträgt:

$$\underline{R}_L' = j\omega\mu_0 \cdot \frac{c^2}{\omega^2}.$$

Der spezifische kapazitive Leitwert beträgt:

$$\underline{G}_C' = j\omega\varepsilon_0.$$

Der auf die einheitliche Basis der Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\omega}$ bezogene induktive Widerstand beträgt:

$$\underline{R}_L = \underline{R}_L' \cdot \frac{\omega}{c} = j\omega\mu_0 \cdot \frac{c}{\omega}.$$

Der kapazitive Leitwert auf dieser Bezugsbasis beträgt:

$$\underline{G}_C = \underline{G}_C' \cdot \frac{c}{\omega} = j\omega\varepsilon_0 \cdot \frac{c}{\omega}.$$

Induktiver Widerstand \underline{R}_L und kapazitiver Widerstand $\frac{1}{\underline{G}_C}$ sind betragsgleich und in der komplexen Zahlenebene gegeneinander gerichtet:

$$\frac{1}{\underline{G}_C} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0 \cdot \frac{c}{\omega}} = -\underline{R}_L = -j\omega\mu_0 \cdot \frac{c}{\omega}.$$

Die induktive Komponente der Feldstärke

$$\underline{E}_L = j\omega\mu_0 \cdot \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \underline{J} = \underline{J} \cdot \underline{R}_L'$$

und die kapazitive Komponente der Feldstärke

$$\underline{E}_C = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \cdot \underline{J} = \frac{\underline{J}}{\underline{G}_C'} = -\underline{J} \cdot \underline{R}_L'$$

sind deshalb ebenfalls betragsgleich und gegeneinander gerichtet.

Der physikalische Prozess der Feldausbreitung ist durch innige Verkopplung des induktiven und des kapazitiven Elementes gekennzeichnet. Deshalb löschen sich \underline{E}_L und \underline{E}_C in Abbildung 9 nicht etwa wirkungslos gegenseitig aus, sondern rufen die in der komplexen Zahlenebene senkrecht zu \underline{E}_L und \underline{E}_C gerichtete Feldstärke \underline{E} hervor mit dem Wert:

$$\underline{E} = \sqrt{\underline{E}_L \cdot \underline{E}_C} = \sqrt{\frac{\underline{R}_L'}{\underline{G}_C'}} \cdot \underline{J} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{c}{\omega} \cdot \underline{J} = \underline{J} \cdot Z_0 \cdot \frac{c}{\omega}. \quad (8.17)$$

Zu einem identischen Ergebnis kommt man, wenn \underline{E}_L und \underline{E}_C nach Abbildung 9 in je 2 betragsgleiche, senkrecht aufeinander stehende Komponenten \underline{E}_{L+} und \underline{E}_{L-} beziehungsweise \underline{E}_{C+} und \underline{E}_{C-} zerlegt und die **algebraische** Summe

$$\underline{E} = \underline{E}_{L+} + \underline{E}_{C+} \quad (8.18)$$

gebildet wird, deren Richtung mit der Senkrechten zu \underline{E}_L und \underline{E}_C übereinstimmt.

Allgemein harmoniert die komplexe Zahlenebene und das räumliche Koordinatensystem, wenn die mit dem Ortsvektor R vorgegebene Achse des Koordinatensystems der Richtung der Feldausbreitung entspricht und mit der Achse der reellen Zahlen der komplexen Zahlenebene unter Deckungsgleichheit der Nullpunkte zusammenfällt. Jeder Zeiger in der komplexen Zahlenebene markiert einen Punkt mit reeller und imaginärer Komponente. Die Projektion dieses Punktes auf die Achse der reellen Zahlen bestimmt den aktuellen Funktionswert der Wechselgröße nach Betrag und Vorzeichen. Unbeschadet dessen gilt aber bei der Zusammenfassung von Wechselgrößen prioritär das maßgebende physikalische Gesetz, also bei strömender elektrischer Energie die **algebraische** Summenbildung nach dem 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatz. Räumlich steht die Feldstärke \underline{E} senkrecht auf der Richtung der Feldausbreitung. Die räumliche Gegenrichtung mit $-\underline{E}$ entspricht der zeitliche Gegenphase. Auch dieser Wert

$$-\underline{E} = \underline{E}_{L-} + \underline{E}_{C-} \quad (8.19)$$

in Abbildung 9 ist physikalisch relevant. $-\underline{E}$ entspricht nämlich der durch Induktion eingepprägten Feldstärke, wie es in der Definition von $\text{rot}(-\underline{E})$ zum Ausdruck kommt. Diese eingepprägte Feldstärke $-\underline{E}$ kompensiert die Feldstärke \underline{E} , die zur Überwindung des Wellenwiderstandes Z_0 aufgebracht werden muss.

Weiterhin ergibt sich sowohl aus Gleichung (8.9) wie auch aus (8.10), jeweils in Verbindung mit (8.11) und (8.12) die Proportionalität von elektrischer und magnetischer Feldstärke zu:

$$\underline{E} = \underline{H} \cdot Z_0. \quad (8.20)$$

Diese Form steht in direkter Analogie zum Ohmschen Gesetz. Durch Verknüpfung von (8.9) mit (8.10) ergeben sich schließlich auch die ergänzenden Beziehungen:

$$\text{rot } \underline{E} = \text{rot } \underline{H} \cdot Z_0 \quad (8.21)$$

und

$$\frac{\text{rot } \underline{E}}{\text{rot } \underline{H}} = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = Z_0. \quad (8.22)$$

Bis hierher ist durchgehend ein Lösungsweg beschrritten worden, der konsequent auf Feldgrößen abhebt, die exklusiv in die Ebene senkrecht zum Ortsvektor der Ausbreitungsrichtung fallen. Das in (8.1) und (8.2) angelegte vektorielle Summenbildungsgesetz muss also an keiner Stelle belastet, will heißen: in **uneingeschränkter** Form in Anspruch genommen werden. Und dies aus gutem Grund, denn vektorielles Summenbildungsgesetz und 1. KIRCHHOFFScher Lehrsatz sind nur für diesen Spezialfall vereinbar. Jetzt ist der entscheidende Punkt der Ableitung erreicht, an dem die bis hierher unterstellte Beschränkung auf den Spezialfall der gleichförmigen Fortpflanzung der Strahlung im Raum verlassen werden kann. Freilich sind mit der gewählten Form der Ableitung bereits in idealer Weise die Voraussetzungen für die weitere mathematische Operation geschaffen, die das bereits Abgeleitete nicht hinfällig macht, sondern hinsichtlich der Abhängigkeit vom Ortsvektor R erweitert. Die für den HERTZschen Dipol maßgebenden Beziehungen für die Feldausbreitung haben wir aber am Beispiel des frei fliegenden Elektrons schon aufgezeigt, und wir können unmittelbar auf die Beziehung (7.6)

$$H = \frac{Q \cdot v}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2} = \frac{I \cdot l}{4\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2}.$$

zurückgreifen. Die Anpassung der Parameter verlangt:

$$H \rightarrow \left| \vec{H}(R) \right| = H_\alpha, \quad \alpha \rightarrow \delta \quad \text{und} \quad r \rightarrow R$$

Mit den angepassten Parametern ergeben sich schließlich für den Antennenstrom I , der sich geradlinig auf der sehr kleinen Wegstrecke l fließt, folgende Beziehungen:

$$H_\alpha = \frac{I \cdot l \cdot \sin \delta}{4\pi R^2} \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{R}{c} \right) \right], \quad (8.23)$$

$$E_{R\perp} = \frac{I \cdot l \cdot Z_0 \cdot \sin \delta}{4\pi R^2} \cdot \sin \left[\omega \left(t + \frac{R}{c} \right) \right], \quad (8.24)$$

$$E_r = E_{R\perp} \cdot \cos^2 \delta, \quad (8.25)$$

$$E_z = E_{R\perp} \cdot \sin^2 \delta. \quad (8.26)$$

\vec{H}_α steht auf Ortsvektor \vec{R} , und $\vec{E}_{R\perp}$ steht senkrecht auf Ortsvektor \vec{R} und \vec{H}_α . Natürlich ergibt sich das gleiche Ergebnis, wenn bei dieser Definition die Rollen von \vec{H}_α und $\vec{E}_{R\perp}$ getauscht werden. Die konsequente physikalische Ausdeutung geht aber noch weiter und kann sich nicht allein auf die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung beschränken, in der nach elektrischer Feldstärke $\vec{E}_{R\perp}$ und magnetischer Feldstärke \vec{H}_α unterschieden wird, deren Richtungen zueinander senkrecht stehen. Vielmehr ist jeder dieser beiden Größen der jeweils gleich große Partner \vec{E}_R beziehungsweise \vec{H}_R zuzuordnen. \vec{E}_R und \vec{H}_R haben gleiche Richtung, weisen in Ausbreitungsrichtung und stehen somit sowohl senkrecht auf $\vec{E}_{R\perp}$ wie auch auf \vec{H}_α . Das Produkt ihrer Beträge ist identisch mit dem Betrag des POYNTINGSchen Vektors:

$$S_R = E_R \cdot H_R.$$

Das ist der Hintergrund der üblicherweise in vektorieller Schreibweise angegebenen Beziehung:

$$\vec{S}_R = \vec{E}_{R\perp} \times \vec{H}_\alpha. \quad (8.27)$$

Einzelheiten hierzu sind im folgenden Abschnitt abgehandelt.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass bei der elektromagnetischen Feldausbreitung elektrische und magnetische Feldstärke konforme Größen ein und desselben physikalischen Prozesses darstellen. Jede dieser beiden Größen tritt immer nur als Paar gleich großer, senkrecht zueinander wirkender Partner auf. Einer der beiden Partner der elektrischen Feldstärke stimmt hinsichtlich Richtung mit einem der beiden Partner der magnetischen Feldstärke überein und weist in die Ausbreitungsrichtung. Die verbleibenden beiden Partner verlaufen sowohl senkrecht zueinander wie auch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

8.2 Strahlungsdichte

Die Energie im elektromagnetischen Feld weist eine Dichte auf von:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (8.28)$$

Durch Differenzieren der Energiedichte nach der Zeit errechnet sich:

$$\frac{dw}{dt} = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (8.29)$$

Besonders übersichtliche Verhältnisse ergeben sich, wenn die elektrische Feldstärke \vec{E} im kartesischen Koordinatensystem in die x -Achse fällt und die dazu senkrechte magnetische Feldstärke \vec{H} in die y -Achse.

Für den Wellenwiderstand gilt nach (8.20):

$$Z_0 = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (8.30)$$

Deshalb lässt sich (8.29) unter Rückgriff auf (8.12) umformen:

$$\frac{dw}{dt} = \epsilon_0 Z_0 \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{Z_0} \cdot \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t \cdot c} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t \cdot c}. \quad (8.31)$$

Daraus lässt sich mit $\partial t \cdot c = \partial z$ (Der Vorzeichenwechsel zwischen räumlicher und zeitlicher Ableitung ist in der weiteren Ableitung implizit enthalten und darf hier noch unberücksichtigt bleiben.) unmittelbar die Beziehung ableiten:

$$\frac{dw}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}. \quad (8.32)$$

Differenziert werden hierbei \vec{E} und \vec{H} nach der Richtung der Ausbreitung, also nach der z -Achse, die senkrecht auf \vec{E} und \vec{H} steht.

Für $\frac{\partial \vec{H}}{\partial z}$ und $\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$ kann unter den gewählten Annahmen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} &= \text{rot } \vec{H}, \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} &= \text{rot } \vec{E} \end{aligned}$$

gesetzt werden. Damit ergibt sich:

$$\frac{dw}{dt} = \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} + \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E}. \quad (8.33)$$

Bis hierher beschränkt sich die Betrachtung auf das „Innenleben“ einer Raumeinheit, wobei folgende Gesetzmäßigkeiten maßgebend sind:

- Jeder der beiden Feldvektoren \vec{E} und \vec{H} steht auf dem jeweils anderen senkrecht.
- Die Richtung der beiden Feldvektoren \vec{E} und \vec{H} weist aus der betrachteten Raumeinheit heraus.
- Schließlich besteht in dieser räumlichen(!) Betrachtung auch Übereinstimmung dahingehend, dass $\text{rot } \vec{E}$ in gleicher Weise auf \vec{E} senkrecht steht wie $\text{rot } \vec{H}$ auf \vec{H} .

Der entscheidende Unterschied ist aber letztlich, dass wohl die Richtung von \vec{H} und $\text{rot } \vec{E}$ übereinstimmt, dagegen **nicht** von \vec{E} und $\text{rot } \vec{H}$. Damit sind zwar die Beträge der Skalarprodukte $\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E}$ und $\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}$ identisch, aber nicht deren Vorzeichen.

Der Energiefluss aus der Raumeinheit heraus, also die Divergenz muss daher zu Null werden. Dies kann auch nicht anders erwartet werden, denn das elektromagnetische Feld im Umfeld eines Dipols ist quellenfrei und für das Raumelement gilt, dass die Summe der hinein- und herausfließenden Energie gleich Null sein muss.

Mathematisch kommt der geschilderte Sachverhalt dadurch zum Ausdruck, dass $\frac{dw}{dt}$ als Energiedichte pro Zeiteinheit unmittelbar in die äquivalente Form als Divergenz der Strahlungsdichte \vec{S}' dargestellt werden kann:

$$\frac{dw}{dt} = \text{div } \vec{S}' = \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} + \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = 0. \quad (8.34)$$

Wegen der festen Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{H} nach (8.30) und $\operatorname{div} \vec{S}' = 0$ gilt weiterhin die Gleichheit der Teilterglieder entsprechend:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial z} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \quad (8.35)$$

und

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \mu_0 H^2. \quad (8.36)$$

Elektrisches und magnetisches Feld sind also gleichwertige Ausprägungen im elektromagnetischen Prozess.

Die Betragsgleichheit der Skalarprodukte $\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}$ und $\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}$ bietet eine elegante Möglichkeit, sich aus der auf die Raumeinheit fixierten Betrachtung zu lösen und den Wert der Strahlungsdichte zu ermitteln, der die Raumeinheit **durchströmt**. Dazu ermitteln wir einen Vektor \vec{S} der Strahlungsdichte, wobei die betrachtete Raumeinheit wie eine Strahlungsquelle betrachtet wird. Dazu wird bei einem der beiden betragsgleichen skalaren Werte, deren Addition $\operatorname{div} \vec{S}'$ ergibt, nämlich bei $\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}$ das Vorzeichen gewechselt. Damit errechnet sich:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}. \quad (8.37)$$

Es gilt die mathematische Beziehung

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}. \quad (8.38)$$

Nach POYNTING wird deshalb für den den Vektor der Strahlungsdichte gesetzt:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (8.39)$$

Das Vektorprodukt $\vec{E} \times \vec{H}$ stellt die allgemeine Form dar, die nicht nur einem isolierten Wertepaar \vec{E}, \vec{H} mit seiner gegenseitigen Beziehung gerecht wird, sondern auch einem beliebigen Kollektiv unterschiedlicher Wertepaare gleicher physikalischer Qualität, aber jeweils unterschiedlicher, also abweichender Ausrichtung im Raum.

Der POYNTINGSCHER Vektor repräsentiert in prägnanter Form die Doppelnatur strömender elektromagnetischer Energie. Elektrische und magnetische Feldstärke sind die beiden Aspekte desselben physikalischen Prozesses. Für den Grundfall ohne Überlagerung von zwei oder mehreren elektromagnetischen Energieströmungen stehen elektrische und magnetische Feldstärke aufeinander senkrecht. An diesem Grundfall wird besonders deutlich, dass für die Feldvektoren unabdingbar das 1. KIRCHHOFFSche Gesetz gelten muss. Die Zusammenfassung von Komponenten eines Feldvektors zum resultierenden Feldvektor unterliegt zwingend dem **algebraischen** Additionsgesetz. Wird gedanklich der Feldvektor \vec{E} in der Ebene senkrecht zu Feldvektor \vec{H} in zwei beliebige Komponenten \vec{E}_1 und \vec{E}_2 zerlegt, die ihrerseits aufeinander senkrecht stehen, so gilt bei beliebigem Winkel α :

$$|\vec{E}| = E = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| = E \cdot \sin^2 \alpha + E \cdot \cos^2 \alpha. \quad (8.40)$$

Nur unter dieser Voraussetzung ergibt sich nämlich:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = \operatorname{div} (\vec{E}_1 \times \vec{H}) + \operatorname{div} (\vec{E}_2 \times \vec{H}). \quad (8.41)$$

Dies entspricht dem Energieerhaltungssatz, angewandt auf die Raumeinheit, die von elektromagnetischer Energie durchströmt wird.

Energieerhaltungssatz, 1. KIRCHHOFFSches Gesetz und POYNTINGSCHER Vektor stehen im Einklang. Die Allgemeingültigkeit beanspruchende vektorielle Darstellung in MAXWELLS Feldgleichungen ist dagegen ein physikalischer Irrtum, dem nur durch Beschränkung auf den Spezialfall senkrecht aufeinander stehender Feldvektoren und strikte Beachtung des 1. KIRCHHOFFSchen Gesetzes abgeholfen werden kann.

8.3 Lichtstrahl - Gesetzmäßigkeiten der Ausbreitung [6]

Beim Lichtstrahl liegt der wichtige Sonderfall der gleichförmigen Ausbreitung in einem zylinderförmig abgegrenzten Bereich vor, in dem die elektromagnetischen Feldgrößen radialsymmetrisch auftreten [6]. Die nachstehend in (8.42) und (8.43) angegebenen Feldgleichungen sind die geeigneten Ausgangsbeziehungen hierfür. Auf die direkte Verwandtschaft von Funkwellen und Lichtstrahlen wird später noch eingegangen. Auslöser des Lichtstrahls ist der Quantsprung des Elektrons, der eine elektromagnetische Welle entgegen der Bewegungsrichtung des Elektrons auslöst. Diese Bewegungsrichtung hat also als Bezugs- und Ausgangspunkt den zugehörigen Atomkern und verläuft in radialer Richtung.

Die Ausbreitungsrichtung des zylinderförmigen Lichtstrahls, als der sich die elektromagnetischen Feldgrößen präsentieren, soll im Zylinder-Koordinatensystem mit der z -Koordinate vorgegeben sein. Der radialen Ausbreitung des Lichtstrahls kommt die r -Koordinate zu. Wie bereits für die Lösung der Feldgleichungen ausgeführt, gilt der markante Zusammenhang zwischen räumlicher Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}$ und zeitlicher Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \cdot c$. Der Wechsel des Vorzeichens zwischen räumlicher und zeitlicher Ableitung betrifft aber jetzt zusätzlich zur z -Koordinate auch die r -Koordinate des Zylinder-Koordinatensystems.

Feldgleichungen und abgeleitete Formen:

Zeitliche Ableitung:

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_0 \underline{\vec{E}}, \quad (8.42)$$

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}}. \quad (8.43)$$

$$\frac{\text{rot } \underline{\vec{H}}}{\underline{\vec{H}}} \cdot \frac{\text{rot } \underline{\vec{E}}}{\underline{\vec{E}}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.44)$$

$$\frac{\text{rotrot } \underline{\vec{H}}}{\underline{\vec{H}}} = \frac{\text{rotrot } \underline{\vec{E}}}{\underline{\vec{E}}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad (8.45)$$

Räumliche Ableitung:

$$\text{rotrot } \underline{\vec{H}} = \text{graddiv } \underline{\vec{H}} - \Delta \underline{\vec{H}} \quad (8.46)$$

$$\text{graddiv } \underline{\vec{H}} = 0 \quad (8.47)$$

(Forderung nach der sogenannten Kontinuitätsgleichung)

$$\text{rotrot } \underline{\vec{H}} = -\Delta \underline{\vec{H}} \quad (8.48)$$

$$\text{rotrot } \underline{\vec{E}} = -\Delta \underline{\vec{E}} \quad (8.49)$$

Für die Ermittlung des LAPLACE-Operators $\Delta \underline{\vec{H}}$ beziehungsweise $\Delta \underline{\vec{E}}$ ergibt sich aus der vorgegebenen gegenseitigen Abhängigkeit von zeitlicher und räumlicher Ableitung eine Besonderheit. Prinzipiell ist der LAPLACE-Operator eines Vektorfeldes ein Produkt aus dem Skalarwert in Form der zweiten Ableitung (im konkreten Fall: $-\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \underline{\vec{H}} \right) \right] \right\}$ für $\Delta \underline{\vec{H}}$ und $-\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial r} \right) \right]$ für $\Delta \underline{\vec{E}}$) und dem Einheitsvektor (hier: e_α für $\Delta \underline{\vec{H}}$ und e_z für $\Delta \underline{\vec{E}}$). Dieser Einheitsvektor muss aber eine Vorzeichenumkehr erfahren, wenn $\text{rotrot } \underline{\vec{H}}$ auf zeitlicher Ableitung entsprechend (8.45) beruht und $\Delta \underline{\vec{H}}$ deshalb entsprechend von räumlicher auf zeitliche Ableitung angepasst werden muss. Gleiches gilt für $\text{rotrot } \underline{\vec{E}}$ und $\Delta \underline{\vec{E}}$.

Grundannahmen für die Ausbreitung, dargestellt mit Zylinderkoordinaten:

Einzelheiten hierzu sind in [6] angegeben. Dies gilt insbesondere hinsichtlich der kompletten Abbildung (mit allen Teilaspekten) des 1. KIRCHHOFFSchen Lehrsatzes auf die differentielle Raumeinheit. Nachfolgend sind demgemäß lediglich resultierende Größen dargestellt. Der Mittelpunkt des zylinderförmigen Lichtstrahls soll in die z -Achse fallen.

Die Wirkung des elektrischen Stromes äußert sich stets in einem Paar identischer Elektropulse, die senkrecht zueinander wirken. Einer von beiden ist allerdings dadurch ausgezeichnet, dass er in Richtung des Stromes wirkt. Diese paarweise Erscheinungsform gilt prinzipiell auch für elektrische und magnetische Feldstärke. Von dieser Eigenschaft wird nachfolgend Gebrauch gemacht und die Feldgrößen in Richtung des Einheitsvektors e_z für \vec{E} und e_α für \vec{H} in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit untersucht. Die Berechnung ist also exklusiv auf e_z und e_α abgestellt; damit wird die Abhängigkeit von $E = E(r)$ und $H = H(r)$ exklusiv von Parameter r , also der dritten Dimension im Koordinatensystem dargestellt.

Die Abhängigkeit von der Richtung der Ausbreitung, also vom Parameter z hängt allein von dem Teilglied $e^{j\omega(t+\frac{z}{c})}$ ab, was einer ungedämpften Welle und sinusförmiger Schwingung entspricht. Für die nachfolgende partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial r}$ ist dieses Teilglied wegen $t + \frac{z}{c} = konst.$ wie eine Konstante zu behandeln und die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial z}$ wird zu Null.

$$\vec{H} = H \cdot e^{j\omega(t+\frac{z}{c})} \cdot e_\alpha \quad H = H(r) \quad (8.50)$$

$$\vec{E} = E \cdot e^{j\omega(t+\frac{z}{c})} \cdot e_z \quad E = E(r) \quad (8.51)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \cdot e_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial r} \cdot e^{j\omega(t+\frac{z}{c})} \cdot e_\alpha \quad (8.52)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\text{rotrot } \vec{E}}{j\omega\mu_0} \quad (8.53)$$

$$\vec{H} = \frac{j \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \cdot e_\alpha}{\omega\mu_0} = \frac{j \cdot \frac{\partial E}{\partial r} \cdot e^{j\omega(t+\frac{z}{c})} \cdot e_\alpha}{\omega\mu_0} \quad (8.54)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{j \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}}{\omega\mu_0} \right) \right] \cdot e_z \quad (8.55)$$

$$\text{rotrot } \vec{H} = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{j \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial r}}{\omega\mu_0} \right) \right] \right\} \cdot e_\alpha \quad (8.56)$$

$$\vec{E} = \underline{E} \cdot e_z = E \cdot e^{j\omega(t+\frac{z}{c})} \cdot e_z \quad E = E(r) \quad (8.57)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \cdot e_\alpha \quad (8.58)$$

$$\text{rotrot } \vec{E} = -\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial r} \right) \right] \cdot e_z \quad (8.59)$$

Bei Berücksichtigung der typischen Vorzeichenumkehr beim Übergang von zeitlicher auf räumliche Ableitung gelten mit (8.45) zusammenfassend folgende **Differentialgleichungen**:

$$\operatorname{rotrot} \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{E} : \quad \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dE}{dr} \right) \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot E \quad (8.60)$$

$$\operatorname{rotrot} \vec{H} = -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \vec{H} : \quad \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dE}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{\omega^2}{c^2} \cdot E \right\} \quad (8.61)$$

Die Berechnung des LAPLACE-Operators nach (8.48) beziehungsweise (8.49) führt bei der Ableitung nach der Variablen r unter den vorgenannten Voraussetzungen zu einem mit (8.60) beziehungsweise (8.61) übereinstimmenden Ergebnis für die elektrische Feldstärke \vec{E} . Dagegen führt die partielle Ableitung nach der Variablen z für einen festen Zeitpunkt $t = t_0$ zu einer reinen Sinusfunktion entsprechend der ungedämpften Wellenausbreitung. Elektrischer Strom ist identisch mit dem Elektroimpuls, der stets nur als Paar gleich großer, senkrecht zueinander wirkender Partner auftritt. Dieses Charakteristikum gilt prinzipiell auch für elektrische und magnetische Feldstärke. Konkret bedeutet dies:

$$E_z = E_r,$$

$$H_\alpha = H_z.$$

Für die Berechnung des POYNTINGSchen Vektors wird das Vektorprodukt der Feldgrößen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gebildet:

$$\vec{S}_z = \vec{E}_r \times \vec{H}_\alpha. \quad (8.62)$$

Damit übereinstimmend gilt für das skalare Produkt:

$$S_z = E_z \cdot H_z.$$

Lösung der Differentialgleichungen:

$$E = E(r) = E(s) = E_0 \cdot e^{g(s)} \quad (8.63)$$

$$e^{g(s)} = \sum_{v=0}^{v \rightarrow \infty} \frac{(-1)^v}{(v!)^2} \cdot (\tau \cdot s)^{2v} \quad \tau = 1, 202 \, 412 \, 778 \, 85. \dots \quad (8.64)$$

$$s = \frac{r}{D} \quad D = \text{Radius Elementarwelle} \quad (8.65)$$

$$\frac{2\tau}{D} = \frac{\omega}{c} \quad s = \frac{r}{2\tau} \cdot \frac{\omega}{c} \quad (8.66)$$

$$H = H(r) = H(s) = \frac{dE(s)}{ds} \cdot \frac{1}{\omega\mu_0} \cdot \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{\omega}{c} \quad (8.67)$$

$$H = H_0 \cdot \frac{d}{ds} [e^{g(s)}] \cdot \frac{1}{2\tau} \quad H_0 = \frac{E_0}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\omega}{c} = \frac{E_0}{Z_0} \quad (8.68)$$

$$\frac{d}{ds} [e^{g(s)}] = \sum_{v=1}^{v \rightarrow \infty} \frac{(-1)^v}{(v!)^2} \cdot (\tau \cdot s)^{2v} \cdot \frac{2v}{s} \quad (8.69)$$

Die vorstehend gewählte kompakte Form der Darstellung beschränkte sich erneut zunächst auf nur je eine Komponente im Raum, für magnetische und elektrische Feldstärke. Aber natürlich sind auch unter den Bedingungen des Lichtstrahls sowohl für die magnetische wie auch für die elektrische Feldstärke alle 3 Richtungen im Raum für die physikalische Interpretation relevant. Es gilt weitgehende Analogie zu den Ausführungen zum HERTZschen Dipol nach Punkt 8.1. So gilt für jede der unter Punkt 8.1 bereits angesprochenen Größen, dass eine Komponente in Ausbreitungsrichtung existiert und der Partner senkrecht dazu, also in der kreisförmigen Schnittebene des zylinderförmigen Lichtstrahls.

8.4 Elektromagnetische Vorgänge beim Quantensprung und im Feld einer Antenne

Bei einem die Emission von Strahlung auslösenden Quantensprung bewegt sich das Elektron von einem Ort höheren Potentials zu einem Ort niedrigeren Potentials. Der hypothetisch lineare Übergang der Geschwindigkeit entsprechend einer gebrochenen Geraden geht durch sinusförmige Überlagerung in einen Prozess ohne Unstetigkeit über. Diese Überlagerung entspricht sinusförmiger Gesetzmäßigkeit von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Mit diesem Quantensprung, der also elektrisch einer Sinuswelle entspricht, gibt der Verbund aus Atomkern und Elektron ein Energiequant ab, also ein definiertes Quantum an Energie beziehungsweise Feinmasse. Diese Energie oder Feinmasse pflanzt sich als Lichtstrahl in Gegenrichtung der Bewegung des Elektrons fort. Diese Abtrennung eines Energiequants unterliegt einerseits dem Impulssatz und andererseits der Gesetzmäßigkeit für das PLANCKSche Wirkungsquantum. Für die sinusförmige Bewegung der Elektronen in einer Antenne sind vorstehend unter Punkt 8.1 die Gesetzmäßigkeiten für die räumliche Ausbreitung dargestellt. Der dabei unterstellte gleichförmig schwingende Bewegungsablauf in der Antenne ist im Sinne eines statistischen Mittelwertes korrekt. Im Hinblick auf den Mikrokosmos gilt aber auch für die schwingenden Elektronen in einer Antenne die Gesetzmäßigkeit der Quantisierung der Energie. Die einzelnen Elektronen erfahren bei der Abgabe von Energie wie beim Quantensprung einen sprunghaften Bewegungsablauf, der einem Stoßvorgang entspricht. Diese Quantensprünge im Leitungsband sind freilich nicht mehr an den Atomkernen orientiert, sondern in ihrer Bewegungsrichtung von der sich in der Antenne ergebenden Feinverteilung des Potentials gesteuert. Die räumliche Ausbreitung elektromagnetischer Schwingungen im Umfeld einer Antenne ist daher als Ausbreitung eines Kollektivs von zylinderförmig sich fortpflanzenden Elementarwellen aufzufassen, die den unter Punkt 8.3 dargestellten Gesetzmäßigkeiten folgen. Gesamtheitlich erfüllt dieses Kollektiv zylindrischer Elementarwellen die vorstehend unter Punkt 8.1 für den Dipol dargelegten Gesetzmäßigkeiten der Ausbreitung. Die zugehörigen elektrischen Größen ermitteln sich durch Superposition der Elementarwellen. Dieses Kollektiv von Elementarwellen, die unter variablem Winkel den gesamten Raum überstreichen, löst sich mit fortschreitender Ausbreitung auf. Es erreicht schließlich einen Grad der Auflösung, bei dem nur noch die einzelnen Elementarwellen für sich fortpflanzungsfähig sind und keine weitere Aufteilung, die ja der Quantisierung der Energie widersprechen würde, mehr zulässt.

9 Brechung, Reflektion und Beugung von Lichtstrahlen

9.1 Brechung

Bei der Brechung eines Lichtstrahls mit der Frequenz f an der Grenzfläche zwischen einem optisch dünneren Medium 1 und einem optisch dichteren Medium 2 sind für den Verlauf des Lichtstrahls die nachfolgend dargelegten Gesetzmäßigkeiten maßgebend.

Aus dem Elektromomentensatz ergibt sich die Betragsgleichheit des Elektromomentes in Medium 1 mit dem Elektromoment im Medium 2:

$$\sqrt{\frac{m_1}{\lambda_1}} \cdot v_1 = \sqrt{\frac{m_2}{\lambda_2}} \cdot v_2. \quad (9.1)$$

Aus der im Lichtstrahl im Vakuum geltenden Beziehung der Quantisierung

$$m \cdot \lambda = \frac{h}{c}$$

ergibt sich die erweiterte allgemeine Beziehung für beliebige optische Medien 1, 2:

$$m_1 \cdot \lambda_1 = m_2 \cdot \lambda_2 = \frac{h}{c}. \quad (9.2)$$

Aus (9.2) ergibt sich:

$$m_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{h}{c} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{h}{c}.$$

Eingesetzt in (9.1) ergibt sich:

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \cdot \frac{h}{c} \cdot v_1^2 = \frac{1}{\lambda_2^2} \cdot \frac{h}{c} \cdot v_2^2$$

oder:

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} = f, \quad (9.3)$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (9.4)$$

Für das Vakuum mit der elektrischen Feldkonstanten ε_0 gelten mit

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_c = \frac{1}{c^2} \quad \text{und} \quad \mu_0 \rightarrow \mu_c = 1$$

folgende Beziehungen für einen Lichtstrahl:

$$\text{Wellenwiderstand :} \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu_c}{\varepsilon_c}} = c \quad (9.5)$$

$$\text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit :} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_c \varepsilon_c}} = c = Z_F \quad (9.6)$$

$$\text{Wellenlänge :} \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad (9.7)$$

$$\text{Durchmesser } d_L \text{ (} D_F = \text{Radius} = \text{Eindringtiefe) :} \quad d_L = 2D_F = \frac{2\tau}{\pi} \cdot \lambda \quad (9.8)$$

$$\text{Stromstärke :} \quad I = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot c \quad (9.9)$$

$$\text{Wellenspannung } U \text{ (Spannung für die Welle der Länge } \lambda \text{) :} \quad U = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot c^2 \quad (9.10)$$

$$\text{Elektrische Feldstärke :} \quad E = \frac{U}{\lambda} = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot f \cdot c \quad (9.11)$$

Für einen Lichtstrahl in einem optischen Medium n mit der Dielektrizitätskonstanten ε_n gelten bei Vernachlässigung der Dämpfung die analogen Beziehungen:

$$\text{Wellenwiderstand :} \quad Z_n = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_n}} \quad (9.12)$$

$$\text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit :} \quad v_n = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_n}} = Z_n \quad (9.13)$$

$$\text{Effektive Wellenlänge :} \quad \lambda_n = \frac{v_n}{f} = \lambda \cdot \frac{v_n}{c} \quad (9.14)$$

Sowohl die mit $v_n < c$ von λ auf λ_n verkürzte Wellenlänge [λ ist die Wellenlänge nach (9.7)] als auch der von d_L auf d_n vergrößerte Durchmesser des Lichtstrahls erklärt sich aus folgendem Zusammenhang: Die Atome beziehungsweise Moleküle des Mediums lenken den Lichtstrahl in einer definierten Weise von seiner geradlinigen Fortpflanzung ab. Diese Ablenkung, deren Gesetzmäßigkeit im Mikrokosmos hier nicht näher dargelegt wird, kann durch ein Ersatzbild beschrieben werden, wobei der zylinderförmige Lichtstrahl der Länge $k \cdot \lambda$ mit dem Durchmesser d_L als Bündel unendlich vieler, differentiell kleiner Stäbe aufgefasst wird. Jeder dieser differentiell kleinen Stäbe wird in eine Spiralförmigkeit überführt und das Bündel als Ganzes erfährt eine Stauchung. Dabei wird die ursprüngliche Länge $k \cdot \lambda$ des Zylinders auf die Länge $k \cdot \lambda_n$ nach der Stauchung reduziert. Der äußeren Begrenzung des gestauchten Zylinders entspricht der gegenüber d_L vergrößerte Durchmesser d_n , der als effektiver Durchmesser des Lichtstrahls im Medium angesprochen werden soll. d_L beziehungsweise d_n errechnen sich aus dem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten aus Wellenlänge λ beziehungsweise λ_n und dem durch den Durchmesser d_L beziehungsweise d_n bestimmten Umfang $\pi \cdot d_L$ beziehungsweise $\pi \cdot d_n$. Dabei entspricht die Hypotenuse der Schraubenlinie auf dem (in die Ebene ausgerollten) Zylindermantel des Lichtstrahls, entlang der sich die Feinmasse in schraubenförmiger Bewegung fortpflanzt. Die Länge dieser Schraubenlinie $\sqrt{\lambda^2 + \pi^2 \cdot d_L^2}$ ist die konstante Größe, die auch keiner Änderung unterliegt, wenn dem Lichtstrahl im Mikrokosmos die (idealisierte) Form eines Bündels von Spiralen aufgezwungen wird. Mit der konstanten Hypotenuse $\sqrt{\lambda^2 + \pi^2 \cdot d_L^2}$ und der variablen effektiven Wellenlänge $\lambda_n = \lambda \cdot \frac{v_n}{c}$ ergibt sich der effektive Durchmesser des Lichtstrahls im Medium zu:

$$\text{Effektiver Durchmesser :} \quad d_n = \sqrt{d_L^2 + \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cdot \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right)} \quad (9.15)$$

$$\text{Stromstärke :} \quad I_n = \sqrt{\frac{m_n}{\lambda_n}} \cdot v_n = I = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot c \quad (9.16)$$

$$\text{Wellenspannung :} \quad U_n = \sqrt{\frac{m_n}{\lambda_n}} \cdot v_n^2 = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot c \cdot v_n = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot f \cdot c \cdot \lambda_n \quad (9.17)$$

$$\text{Elektrische Feldstärke :} \quad E_n = \frac{U}{\lambda_n} = \sqrt{\frac{m_n}{\lambda_n}} \cdot f \cdot v_n = E = \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \cdot f \cdot c \quad (9.18)$$

Die Stromstärke im Lichtstrahl ist unabhängig von der Eigenschaft des Mediums; dagegen ist die auf die für eine komplette Wellenlänge gültige Wellenspannung direkt proportional zu dieser Wellenlänge. Die elektrische Feldstärke ist wie die Stromstärke ebenfalls unabhängig vom Medium.

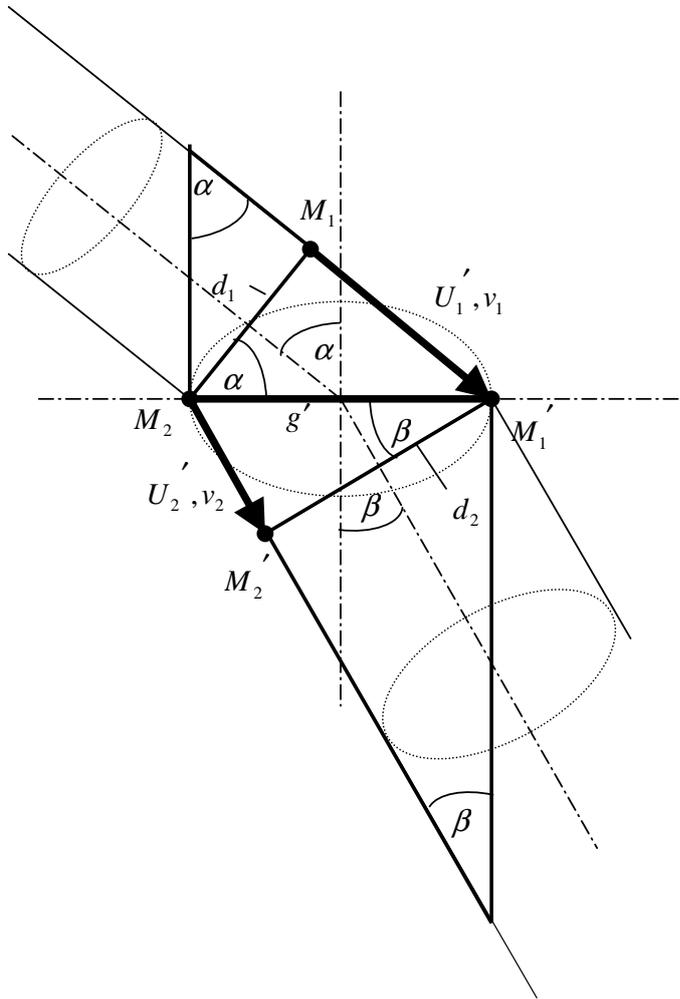


Abbildung 10: Brechung des Lichtstrahls

Die gemeinsame Grenze zweier optischer Medien mit $v_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}}$ und $v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2}}$ soll eine plane Fläche (Ebene) sein. Verläuft ein Lichtstrahl im Medium 1 in Richtung Grenzfläche und hat einen Winkel α gegen das Lot auf die Grenzfläche, so ist β der Winkel gegen dieses Lot nach dem Übergang in das Medium 2, wobei der Lichtstrahl an der Grenzfläche gebrochen wird. Der Lichtstrahl in Medium 1, repräsentiert durch seine Zylinderachse und den Durchmesser d_1 , das Lot und der Lichtstrahl in Medium 2, repräsentiert durch seine Zylinderachse und den Durchmesser d_2 , gehören der gleichen Ebene an, die durch die Fortpflanzungsrichtung des Lichtstrahls bestimmt ist und auf der Grenzfläche senkrecht steht (siehe Abbildung 10). Die Schnittfigur des zylindrischen Lichtstrahls mit der Grenzfläche ist eine Ellipse. Der (doppelte) Wert der langen Achse der Ellipse entspricht der Strecke g' in Abbildung 10 und ist für den Lichtstrahl in Medium 1 und Medium 2 identisch. Der (doppelte) Wert der kurzen Achse entspricht dem jeweiligen Durchmesser d_1 beziehungsweise d_2 des Lichtstrahls. Dass die beiden für Medium 1 beziehungsweise Medium 2 maßgebenden Ellipsen

nicht voll deckungsgleich sind (nur hinsichtlich der langen Achsen), muss nicht überraschen, wenn wir in Erinnerung rufen, welcher Natur die Durchmesser d_1 beziehungsweise d_2 sind, nämlich nur Ersatzbilder des durch Atome oder Moleküle von der geradlinigen Fortpflanzung abgelenkten Lichtstrahls, dessen „Original“-Durchmesser d_L sich nach (9.8) bestimmt.

Das zylindrische Teilstück des Lichtstrahls in Medium 1, das durch die im Bild dargestellte Mantellinie $M_1 - M_1'$ definiert ist, wird von der Grenzfläche in zwei identische Hälften aufgeteilt. Nur die dem Medium 1 zugehörige Hälfte ist in Abbildung 10 dargestellt und für die anschließenden Potentialbetrachtungen relevant. Diese Überlegung gilt in analoger Weise für Medium 2 mit der Mantellinie $M_2 - M_2'$. In Medium 1 besteht kein Potentialunterschied zwischen Punkt M_1 und M_2 . Der Potentialunterschied U_1' entlang der Mantellinie zwischen M_1 und M_1' ist identisch mit dem Potentialunterschied entlang der Strecke g' zwischen M_2 und M_1' . Die Richtung der in beiden Medien betragsgleichen elektrischen Feldstärke E stimmt in Medium 1 mit der Mantellinie zwischen M_1 und M_1' überein. Deshalb kann der Potentialunterschied U_1' durch die Multiplikation der Feldstärke E mit dem Wert der senkrechten Projektion der Strecke g' auf die Richtung der Feldstärke E , nämlich $g' \cdot \sin \alpha$ bestimmt werden:

$$U_1' = E \cdot g' \cdot \sin \alpha.$$

Analog gilt:

$$U_2' = E \cdot g' \cdot \sin \beta.$$

Aus den Gleichungen (9.4) oder (9.14) sowie (9.17) ergibt sich eine Proportionalität in der Form:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (9.19)$$

Deshalb kann zu der für beide Medien identischen Strecke g' eine Strecke g konstruiert werden, für die gilt:

$$g = \frac{\lambda_1}{\sin \alpha}$$

und

$$U_1 = E \cdot g \cdot \sin \alpha = E \cdot \lambda_1. \quad (9.20)$$

Analog gilt:

$$g = \frac{\lambda_2}{\sin \beta}$$

und

$$U_2 = E \cdot g \cdot \sin \beta = E \cdot \lambda_2. \quad (9.21)$$

Mit (9.20) und (9.21) kann deshalb (9.19) in die erweiterte Form

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (9.22)$$

überführt werden. Beschränkt man (9.22) auf das Verhältnis der Geschwindigkeiten, so ergibt sich:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (9.23)$$

Das ist die bekannte Gesetzmäßigkeit der Optik für die Brechung. Der wesentliche Unterschied ist jedoch darin zu sehen, dass dieser Gesetzmäßigkeit in der Optik traditionell der Charakter eines „Originals“ zugewiesen wird. Aus der Sicht vorstehender Ableitung ist es aber lediglich eine Teilaspekt übergeordneter Gesetzmäßigkeiten des Elektromagnetismus.

9.2 Reflektion

Für die Paarung der Medien 1 und 2 mit $\lambda_1 > \lambda_2$, $v_1 > v_2$ und $\alpha > \beta$ gibt es für das optisch dünnere Medium 1 mit der Wellenlänge λ_1 den Grenzfall des Einfallswinkels $\alpha = 90^\circ$ mit $\sin \alpha = 1$. Dieser leicht nachvollziehbare Fall betrifft den Grenzfall, dass der Lichtstrahl parallel zur Grenzfläche der Medien verläuft. Daraus errechnet sich aber auch der Grenzfall des Winkels $\beta_{\text{grenz}} = \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ im optisch dichteren Medium 2, der nicht überschritten werden kann, wenn ein Lichtstrahl die Grenze zwischen beiden Medien überschreiten soll. Trifft deshalb im optisch dichteren Medium ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche unter einem Winkel, der $\beta_{\text{grenz}} = \arcsin\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ überschreitet, so wird seine Bahn zwar gebrochen, aber er überschreitet nicht die Grenze zwischen beiden Medien sondern wird total reflektiert. Alle zur Brechung des Lichtstrahls beim Übergang zwischen zwei Medien gemachten Überlegungen

gelten sinngemäß weiter. Für die Darstellung in Abbildung 10 muss der Bildanteil oberhalb der Grenzlinie in den Bereich unterhalb der Grenzlinie geklappt werden. Aufgrund der identischen Medieneigenschaften vor und nach der Brechung des Lichtstrahls ergibt sich mit

$$v_1 = v_2$$

als Spezialfall von (9.23) unmittelbar:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Deshalb gilt:

$\alpha = \beta$	(9.24)
------------------	--------

also, der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallwinkel. Diese für die Totalreflexion im optisch dichteren Medium dargestellte Gesetzmäßigkeit gilt für jede Brechung eines Lichtstrahls an einer reflektierenden Fläche, wenn sich der Lichtstrahl vor und nach der Reflektion im gleichen Medium fortpflanzt.

9.3 Beugung und Interferenz

Ein Lichtstrahl ist in aller Regel keine kontinuierliche Abfolge von Wellenzügen; vielmehr ist die Wellenzahl $n = 1$ charakteristisch. Der Lichtstrahl der charakteristischen Wellenzahl $n = 1$ entspricht einem Photon. Es tut quantenmechanischer Gesetzmäßigkeit keinen Abbruch, dass in diesen Photonen elektromagnetische Eigenschaften immanent bleiben und bei Interaktion mit elektromagnetischen Feldern im atomaren Bereich ihre Wirkung zeigen.

Photonen oder Energiequanten unterliegen als Kollektiv Verteilungsgesetzen, verlieren aber nicht ihre durch die Phasenlage bestimmte Orientierung gegenüber Nachbarphotonen. Bei der Superposition von Photonen im engen Umfeld von Atomen wirken sich diese eingepprägten Eigenschaften als überlagerter Effekt zusätzlich zum atomaren Feldeinfluss aus und beeinflussen die daraus resultierende Verteilung des Kollektivs. Aus dieser Perspektive sind die Eigenschaften des Lichts bei Beugung oder Interferenz zu erklären.

10 Additionstheorem

10.1 Einführung

10.1.1 Bezugssystem

Addition von Geschwindigkeiten bedeutet immer, dass neben 2 Inertialsystemen (im nachfolgenden Beispiel: Schiff und Passagier) mit gegenseitiger Relativgeschwindigkeit, ein weiteres Inertialsystem (im Beispiel: der Strand) als Bezugssystem existiert. Addiert wird die Relativgeschwindigkeit des Inertialsystems 1 (im Beispiel: Schiff) gegenüber dem Bezugssystem zu der Relativgeschwindigkeit des Inertialsystems 2 (im Beispiel: Passagier) gegenüber dem Inertialsystem 1. Die resultierende Geschwindigkeit stellt sich zwischen Inertialsystem 2 und Bezugssystem ein.

10.1.2 Brückenglied zwischen Inertialsystemen

Die aus der Addition von Geschwindigkeiten hervorgehende resultierende Kontraktion in Form des Kontraktionsfaktors entspricht dem Produkt zweier identischer Teilkontraktionen. Dieses Produkt stimmt mit dem Ergebnis des Additionstheorems überein. Für diese Kontraktion in zwei gleichen Teilschritten dient gedanklich als Brückenglied zwischen Bezugssystem und Inertialsystem 2 ein weiteres Inertialsystem, das gegenüber dem Bezugssystem eine Relativgeschwindigkeit aufweist, die dem geometrischen Mittel der beiden Geschwindigkeiten, die zusammengefasst werden sollen, entspricht. Einzelheiten ergeben sich nachfolgend aus dem Vergleich der Beziehungen (10.4) und (10.13) sowie deren Ableitungen.

Das für die Addition von Geschwindigkeiten Beschriebene gilt analog für die Subtraktion von Geschwindigkeiten, wobei in diesem Fall Dehnung statt Kontraktion resultiert.

10.1.3 Additionstheorem und Lorentz-Transformation

Die Ableitung des Additionstheorems basiert einerseits auf den Gleichungen der LORENTZ-Transformation, andererseits sind die Ergebnisse des Additionstheorems ein wichtiger Prüfstein für den theoretischen Ansatz der LORENTZ-Transformation. Dieses Prüfkriterium gibt in der Folge den Anstoß, um den theoretischen Ansatz der LORENTZ-Transformation zu analysieren und die Darstellung auf den Kern der physikalischen Aussage zu verdichten. Diese Kernaussage ist dann im Kontext mit dem Additionstheorem einer zusammenfassenden Interpretation zugänglich.

10.1.4 Abhängigkeit zwischen drei Inertialsystemen

Das nachfolgend beschriebene Beispiel belegt, dass alle Überlegungen zum Additionstheorem, wie gesagt, die Abhängigkeiten zwischen **drei** Inertialsystemen zum Gegenstand haben. Zur Veranschaulichung des Additionstheorems wird als Beispiel ein Schiff gewählt, das sich vom Strand mit Relativgeschwindigkeit v_1 entfernt. Ein Passagier an Bord des Schiffes soll sich dabei in gleicher Richtung wie v_1 mit Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem Schiff bewegen und erreicht damit eine Relativgeschwindigkeit v_2 gegenüber dem Strand. Gegenstand des Additionstheorems sind die mathematischen Beziehungen zwischen den drei Geschwindigkeiten v_1 , v_2 und v unter Berücksichtigung der speziellen Relativitätstheorie in Form der LORENTZ-Transformation. Die LORENTZ-Transformation wird angewandt auf die Beziehungen zwischen Inertialsystem 1 (Schiff) und Inertialsystem 2 (Passagier).

10.1.5 Kontraktionsfaktor gegenüber dem Bezugssystem

Die Geschwindigkeit eines Körpers (Beispiel: v_1 des Schiffes) und seines Inertialsystems, in dem er ruht (also im Beispiel: Inertialsystem 1), bestimmt sich in Relation zum Bezugssystem (also im Beispiel: gegenüber dem Strand). Maßgebend für die Definition des Messwertes von v_1 ist aber der Kontraktionsfaktor $f(v_1)$, der in dem Inertialsystem herrscht, das die Geschwindigkeit v_1 aufweist (also im Beispiel: das Inertialsystem 1). Für den Messwert von v_1 und den daraus ermittelten Kontraktionsfaktor $f(v_1)$ ist dann also der Gang der Uhr in Inertialsystem 1 maßgebend, nicht etwa der Gang der Uhr im Inertialsystem „Strand“. Diese Rollenverteilung zwischen Bezugssystem einerseits und dem Inertialsystem, dessen Geschwindigkeit betrachtet wird, andererseits, ist das markante Merkmal des Additionstheorems. Bei alle weiteren Betrachtungen darf dieses Merkmal nicht aus den Augen verloren werden.

In diesem Merkmal ist gleichzeitig ein zu Missverständnissen Anlass gebender Konflikt angelegt, der auf EINSTEIN und dessen Niederschlag in der wissenschaftlichen Literatur zurückgeht. Danach basiert in der LORENTZ-Transformation die Relativgeschwindigkeit v auf den Parametern des unkontrahierten Bezugssystems und dem Gang seiner Uhr. Im Additionstheorem wird dagegen erneut mit einer Relativgeschwindigkeit v operiert, deren Definition dann aber zwingend an die Parameter des mit v bewegten Inertialsystems und dem Gang seiner Uhr gebunden ist. v in der LORENTZ-Transformation hat also eine andere physikalische Qualität als v im Additionstheorem.

Wie sich die vergleichbaren Verhältnisse bei der LORENTZ-Transformation darstellen und in welcher Form Additionstheorem und LORENTZ-Transformation in Einklang stehen, wird später noch abzuhandeln sein.

10.2 Annahmen und Ableitungen

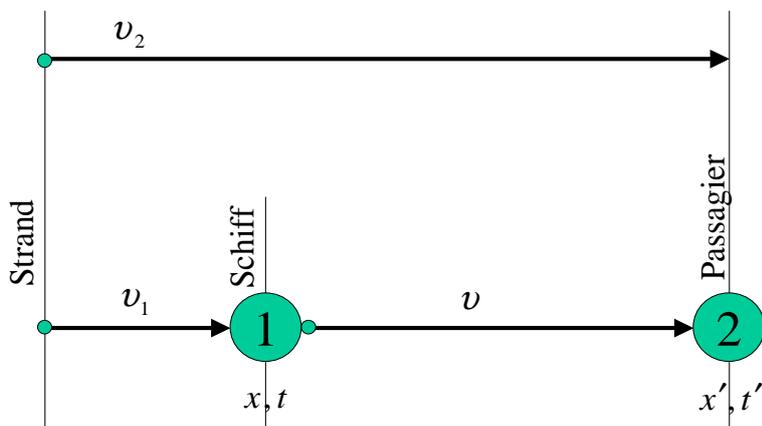


Abbildung 11: Inertialsysteme Strand, Schiff und Passagier

In Abbildung 11 sind die Annahmen dargestellt. Im Inertialsystem 1 gelten die Variablen x und t für Weg und Zeit, im Inertialsystem 2 dagegen x' und t' . Für das Inertialsystem 1 errechnet sich die Relativgeschwindigkeit v_1 gegenüber dem Strand, basierend auf den Variablen x und t , als Quotient aus Wegabschnitt Δx und korrespondierendem Zeitabschnitt Δt : $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Das Verhältnis $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ und damit der Wert von v_1 definiert den Bezug zum dritten Inertialsystem, dem Strand. Für Inertialsystem 2 gilt das Gesagte analog mit $v_2 = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. Die Parameter x', t' tragen, wie aus der LORENTZ-Transformation bekannt, die Kennzeichnung mit dem Strich, für v_2 kann auf diese Kennzeichnung verzichtet werden.

Mit den Variablen x, t beziehungsweise x', t' ist allerdings nur die vom Kontraktionsfaktor abhängige Eichung für die Messung von Weg und Zeit vorgegeben. Der in den Wert des

Differentialquotienten von v_1 beziehungsweise v_2 jeweils einfließende Wegabschnitt gegenüber dem Bezugssystem „Strand“ ist jedoch eine **unkontrahierte** Größe, die aber auf Basis des **kontrahierten** Eichmaßes bewertet wird.

Aus der LORENTZ-Transformation entwickelt sich folgender mathematischer Zusammenhang:

$$\Delta x = \frac{\Delta x' - v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x + v \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.1)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' - \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.2)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \qquad \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}} \qquad (10.3)$$

$$v_1 = \frac{v_2 - v}{1 - \frac{v_2 v}{c^2}} \qquad v_2 = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1 v}{c^2}} \qquad (10.4)$$

$$\left(1 - \frac{v_2 v}{c^2}\right) \cdot v_1 = v_2 - v \qquad \left(1 + \frac{v_1 v}{c^2}\right) \cdot v_2 = v_1 + v \qquad (10.5)$$

$$v \cdot \left(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) = v_2 - v_1 \qquad v_1 \cdot \left(1 - \frac{v_2 v}{c^2}\right) = v_2 - v \qquad (10.6)$$

$$v = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} \qquad v_1 = \frac{v_2 - v}{1 - \frac{v_2 v}{c^2}} \qquad (10.7)$$

Das auf den ersten Blick irritierende Vorzeichen von v in (10.1) und (10.2) ist dadurch begründet, dass die Geschwindigkeiten $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ und $v_2 = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ der Inertialsysteme 1 und 2 (Schiff und Passagier) jeweils auf das externe Inertialsystem „Strand“ bezogen sind.

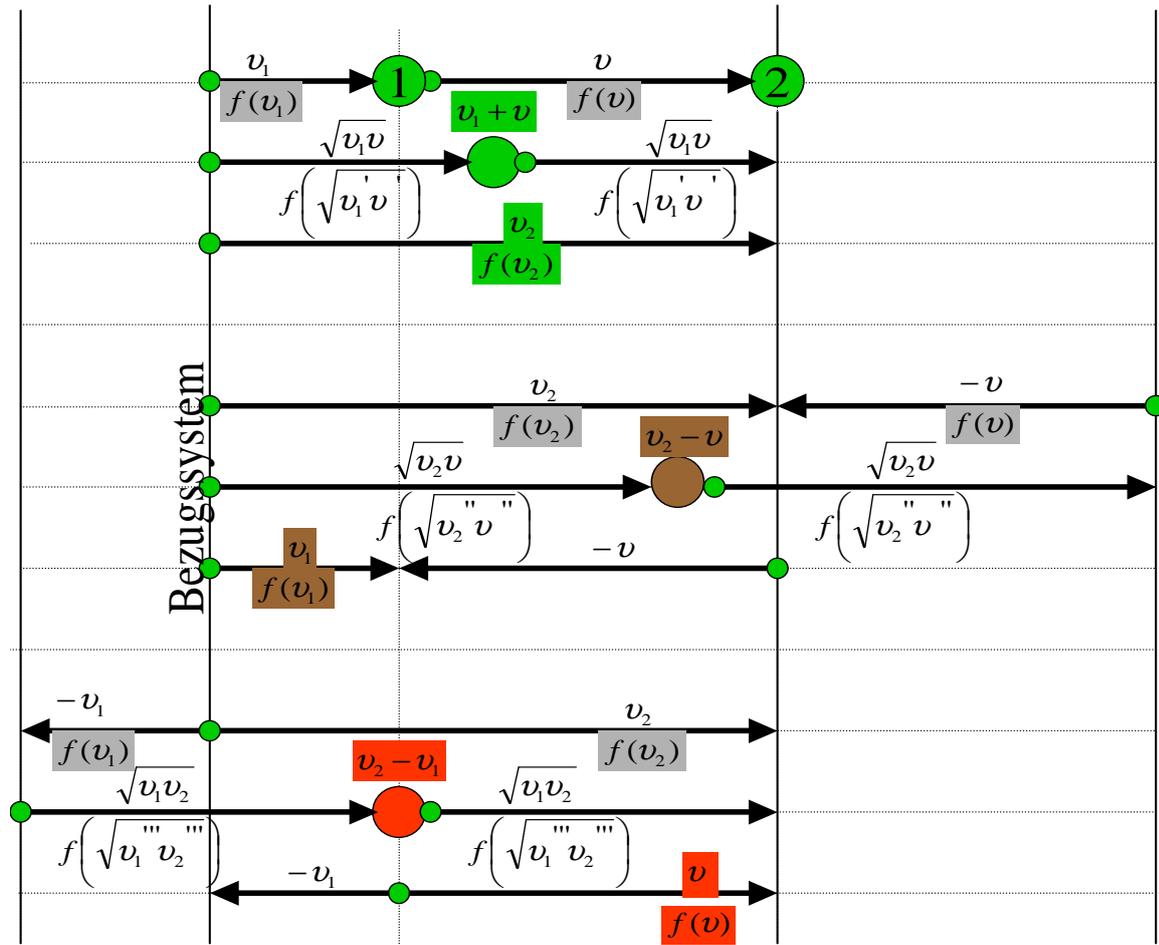


Abbildung 12: Variationen zur Addition

In Abbildung 12 sind die physikalisch gleichwertigen Varianten der Wechselbeziehungen zwischen 3 Inertialsystemen dargestellt. Darauf bezugnehmend ergeben sich folgende Ableitungen:

$v_1 + v$:

$$f(v_1) = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

$$f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{v_1'v'}}{\sqrt{v_1v}}$$

$$\sqrt{v_1'v'} = \sqrt{v_1v} \cdot f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)$$

$$f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) = \sqrt{1 - \frac{v_1v \cdot [f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)]^2}{c^2}}$$

$$f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v_1v}{c^2}}}$$

$v_2 - v$:

$$f(v_2) = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} \tag{10.8}$$

$$f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{10.9}$$

$$\frac{v_2''}{v_2} = \frac{v''}{v} = \frac{\sqrt{v_2''v''}}{\sqrt{v_2v}} \tag{10.10}$$

$$\sqrt{v_2''v''} = \sqrt{v_2v} \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) \tag{10.11}$$

$$f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) = \sqrt{1 + \frac{v_2v \cdot [f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)]^2}{c^2}} \tag{10.12}$$

$$f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_2v}{c^2}}} \tag{10.13}$$

$v_2 - v_1$:

$$f(v_1) = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \quad (10.14)$$

$$f(v_2) = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} \quad (10.15)$$

$$\frac{v_1'''}{v_1} = \frac{v_2'''}{v_2} = \frac{\sqrt{v_1'''v_2'''}}{\sqrt{v_1v_2}} \quad (10.16)$$

$$\sqrt{v_1'''v_2'''} = \sqrt{v_1v_2} \cdot f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) \quad (10.17)$$

$$f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) = \sqrt{1 + \frac{v_1v_2 \cdot [f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right)]^2}{c^2}} \quad (10.18)$$

$$f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_1v_2}{c^2}}} \quad (10.19)$$

 $v_1 + v$:

$$v_2 = \frac{v_1 + v}{1 + \frac{v_1v}{c^2}} = (v_1 + v) \cdot \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \right]^2$$

$$v_2 = v_1 + \frac{v_1 + v - v_1 \left(1 + \frac{v_1v}{c^2}\right)}{1 + \frac{v_1v}{c^2}}$$

$$v_2 = v_1 + \frac{v \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{v_1v}{c^2}}$$

$$v_2 = v_1 + v \cdot \left[f(v_1) \cdot f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \right]^2$$

$$v_2 = v_1 \cdot \left[f(v) \cdot f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \right]^2 + v$$

$$v_2 + \frac{v_1v_2v}{c^2} = v_1 + v$$

 $v_2 - v$:

$$v_1 = \frac{v_2 - v}{1 - \frac{v_2v}{c^2}} = (v_2 - v) \cdot \left[f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) \right]^2 \quad (10.20)$$

$$v_1 = v_2 + \frac{v_2 - v - v_2 \left(1 - \frac{v_2v}{c^2}\right)}{1 - \frac{v_2v}{c^2}}$$

$$v_1 = v_2 - \frac{v \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v_2v}{c^2}}$$

$$v_1 = v_2 - v \cdot \left[f(v_2) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) \right]^2 \quad (10.21)$$

$$v_1 = v_2 \cdot \left[f(v) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) \right]^2 - v \quad (10.22)$$

$$v_1 - \frac{v_1v_2v}{c^2} = v_2 - v \quad (10.23)$$

 $v_2 - v_1$:

$$v = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1v_2}{c^2}} = (v_2 - v_1) \cdot \left[f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) \right]^2 \quad (10.24)$$

$$v = v_2 + \frac{v_2 - v_1 - v_2 \left(1 - \frac{v_1v_2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v_1v_2}{c^2}}$$

$$v = v_2 - \frac{v_1 \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v_1v_2}{c^2}}$$

$$v = v_2 - v_1 \cdot \left[f(v_2) \cdot f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) \right]^2 \quad (10.25)$$

$$v = v_2 \cdot \left[f(v_1) \cdot f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) \right]^2 - v_1 \quad (10.26)$$

$$v - \frac{v_1v_2v}{c^2} = v_2 - v_1 \quad (10.27)$$

Aus (10.19) mit (10.20) ergibt sich:

$$f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_1v_2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{(v_1+v)v_1}{\left(1 + \frac{v_1v}{c^2}\right) \cdot c^2}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_1v}{c^2}}{1 + \frac{v_1v}{c^2} - \frac{v_1^2}{c^2} - \frac{v_1v}{c^2}}} \quad (10.28)$$

$$f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_1v_2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{(v_2-v)v_2}{\left(1 - \frac{v_2v}{c^2}\right) \cdot c^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_2v}{c^2}}{1 - \frac{v_2v}{c^2} - \frac{v_2^2}{c^2} + \frac{v_2v}{c^2}}} \quad (10.29)$$

$v_1 + v :$

$v_2 - v :$

$$f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) = \frac{1}{f(v_1) \cdot f(\sqrt{v_1'v'})} \quad f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) = \frac{1}{f(v_2) \cdot f(\sqrt{v_2''v''})} \quad (10.30)$$

Aus (10.13) mit (10.20) ergibt sich:

$$f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v_1v}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(v_2-v)v}{\left(1 - \frac{v_2v}{c^2}\right) \cdot c^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_2v}{c^2}}{1 - \frac{v_2v}{c^2} + \frac{v_2v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.31)$$

$$f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v_2v}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{(v_1+v)v}{\left(1 + \frac{v_1v}{c^2}\right) \cdot c^2}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_1v}{c^2}}{1 + \frac{v_1v}{c^2} - \frac{v_1v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.32)$$

$v_1 + v :$

$v_2 - v :$

$$f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) = \frac{1}{f(v) \cdot f(\sqrt{v_2''v''})} \quad f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) = \frac{1}{f(v) \cdot f(\sqrt{v_1'v'})} \quad (10.33)$$

Aus (10.30) errechnet sich:

$$\frac{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)}{f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} = \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} = \frac{f(v_2)}{f(v_1)}$$

Mit (10.13) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} &= \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{v_1v}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v_2v}{c^2}\right)} \\ \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} &= \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{v}{c^2} \left[v_1 - v_2 - \frac{v_1v_2v}{c^2}\right]} \end{aligned}$$

Mit Einsetzen von (10.23) errechnet sich:

$$\begin{aligned} \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} &= \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{v}{c^2} [v_1 - (v_1 + v)]} \\ \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} &= \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \cdot f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} &= \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot f(v) \\ \frac{f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)}{f\left(\sqrt{v_2''v''}\right)} &= \left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right)\right]^2 \cdot f(v) = \frac{f(v_2)}{f(v_1)} \end{aligned}$$

Daraus erhält man unter Einschluss von (10.30) und (10.33) sowie (10.20) und (10.24):

$$\left[f\left(\sqrt{v_1'v'}\right) \right]^2 = \frac{f(v_2)}{f(v_1) \cdot f(v)} = \frac{v_2}{v_1 + v} \quad (10.34)$$

$$\left[f\left(\sqrt{v_2''v''}\right) \right]^2 = \frac{f(v_1)}{f(v_2) \cdot f(v)} = \frac{v_1}{v_2 - v} \quad (10.35)$$

$$\left[f\left(\sqrt{v_1'''v_2'''}\right) \right]^2 = \frac{f(v)}{f(v_1) \cdot f(v_2)} = \frac{v}{v_2 - v_1} \quad (10.36)$$

Nach Umformung ergeben sich schließlich die klar strukturierten Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen:

$$\frac{v_2}{f(v_2)} = \frac{v_1 + v}{f(v_1) \cdot f(v)} \quad (10.37)$$

$$\frac{v_1}{f(v_1)} = \frac{v_2 - v}{f(v_2) \cdot f(v)} \quad (10.38)$$

$$\frac{v}{f(v)} = \frac{v_2 - v_1}{f(v_1) \cdot f(v_2)} \quad (10.39)$$

In Abbildung 12 sind die Ergebnisse nach (10.37) - (10.39) mit ihren maßgebenden Faktoren dargestellt und farblich gekennzeichnet.

10.3 Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen

An dieser Stelle ist eine Erläuterung zur prinzipiellen Natur von Relativgeschwindigkeiten zwischen Inertialsystemen angebracht.

In der LORENTZ-Transformation sind die Relativgeschwindigkeiten v_1 , v_2 und v in jedem Fall **spezifische**, auf das jeweilige Inertialsystem mit seinem Kontraktionsfaktor bezogene Werte. Der Kontraktionsfaktor kontrahiert Weg und Zeit in gleicher Weise, so dass Geschwindigkeiten, die als Quotient von Wegabschnitt und korrespondierendem Zeitabschnitt gebildet werden, **innerhalb** eines Inertialsystems von diesem Kontraktionsfaktor nicht betroffen sind. Das bei Weitem wichtigste Beispiel hierfür ist die Lichtgeschwindigkeit c , die deshalb in jedem Inertialsystem gleich ermittelt wird. Das Gegenbeispiel ist die Geschwindigkeit **zwischen** Inertialsystemen, weil Wege und Wegabschnitte **zwischen** Inertialsystemen prinzipiell **keiner** Kontraktion unterliegen. Dieser markante physikalische Unterschied kann in Anwendung und Interpretation der LORENTZ-Transformation nicht unberücksichtigt bleiben.

Eine Geschwindigkeit wird wie üblich als Quotient von differentiellem Wegabschnitt ds und differentiellem Zeitabschnitt dt gebildet. Dabei unterliegen Wege s und Wegabschnitte ds **innerhalb** eines Inertialsystems sowie Zeiten t und Zeitabschnitte dt dem gleichen, von der Relativgeschwindigkeit v abhängigen Kontraktionsfaktor $f(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. D. h. bildlich, Wege und Zeiten sind **innerhalb** eines Inertialsystems in gleicher Weise kontrahiert und einem verkürzten Eichmaß der Länge $s \cdot f(v)$ beziehungsweise $ds \cdot f(v)$ steht ein entsprechend verkürztes Eichmaß der Zeit $t \cdot f(v)$ beziehungsweise $dt \cdot f(v)$ gegenüber.

Zwar steht im Zähler des Quotienten einer Geschwindigkeit der maßgebende Wegabschnitt ds sowohl bei Lichtgeschwindigkeit c wie auch bei der Relativgeschwindigkeit v dem gleichen

verkürzten Eichmaß der Länge $ds \cdot f(v)$ gegenüber, aber nur der Wegabschnitt des Lichtstrahls **innerhalb** eines Inertialsystems ist effektiv durch Kontraktion entsprechend verkürzt, der Wegabschnitt der Relativgeschwindigkeit v dagegen **nicht**.

Im Nenner von Lichtgeschwindigkeit und Relativgeschwindigkeit ist übereinstimmend und ohne Besonderheit das verkürzte Eichmaß der Zeit maßgebend. Diese Gegebenheiten und den markanten physikalischen Unterschied erkennt man zusammenfassend in dem nachfolgenden mathematischen Ansatz:

$$v = \frac{ds(v)}{dt(v) \cdot f(v)} \qquad c = \frac{ds(c) \cdot f(v)}{dt(c) \cdot f(v)} = \frac{ds(c)}{dt(c)}$$

Die Lichtgeschwindigkeit c **innerhalb** eines Inertialsystems ist deshalb jeweils eine konstante und bezogen auf das Inertialsystem **unspezifische** Größe, die Relativgeschwindigkeit **zwischen** Inertialsystemen stets eine **spezifische**, vom Kontraktionsfaktor des Inertialsystems abhängige Größe. Deshalb kann auch der im Formelansatz der LORENTZ-Transformation angegebene Wert von v immer nur für eines der beiden verknüpften Inertialsysteme gelten, nämlich das **nicht** kontrahierte, wie später noch gezeigt wird.

10.4 Interpretation der Ergebnisse zum Additionstheorem

Um einen Einblick in die Ergebnisse dieser vorstehenden Beziehungen zu gewinnen, sind beispielhaft für Gleichung (10.34) die errechneten Zahlenwerte für $[f(\sqrt{v_1'v'})]^2$ in nachfolgender Tabelle dargestellt.

$\frac{v_2}{c}$	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
0,01	1	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,994	0,993	0,992	0,991	0,99
0,1	1,009	1	0,99	0,98	0,97	0,96	0,949	0,939	0,929	0,919	0,91
0,2	1,04	1,021	1	0,979	0,958	0,938	0,917	0,896	0,875	0,854	0,835
0,3	1,096	1,066	1,033	1	0,967	0,934	0,901	0,868	0,835	0,802	0,773
0,4	1,186	1,143	1,095	1,048	1	0,952	0,905	0,857	0,81	0,762	0,719
0,5	1,327	1,267	1,2	1,133	1,067	1	0,933	0,867	0,8	0,733	0,673
0,6	1,553	1,469	1,375	1,281	1,188	1,049	1	0,906	0,812	0,719	0,634
0,7	1,947	1,824	1,686	1,549	1,412	1,275	1,137	1	0,863	0,725	0,602
0,8	2,756	2,556	2,333	2,111	1,889	1,667	1,444	1,222	1	0,778	0,578
0,9	5,216	4,789	4,316	3,842	3,368	2,895	2,421	1,947	1,474	1	0,574
0,99	49,75	45,28	40,30	33,33	30,35	25,38	20,40	15,43	10,45	5,48	1
$\frac{v_1}{c}$											

Tabelle 1: $[f(\sqrt{v_1'v'})]^2$

Die Interpretation der in dieser Tabelle enthaltenen Zahlenwerte stellt uns drastisch vor Augen, dass immer dann, wenn „vollständig“ von einer kontrahierten Länge oder einem kontrahierten Eichmaß für Länge und Zeit die Rede ist, bescheidener und physikalisch treffender davon gesprochen werden muss, dass das Eichmaß dieses Inertialsystems **in Relation zu einem Bezugssystem kontrahiert erscheint**. Gegenüber einem anderen Bezugssystem dagegen erscheinen Weg und Zeit ein und desselben Inertialsystems **in anderer Weise kontrahiert**. Nach der Natur des Additionstheorems haben aber nicht alle drei nach (10.34) bis

(10.36) miteinander verknüpften Inertialsysteme das gleiche Bezugssystem. Im Beispiel sind die Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 auf das gleiche Bezugssystem „Strand“ abgestellt, die Relativgeschwindigkeit v des Passagiers gegenüber dem Schiff hat aber eben das Schiff, nicht etwa den Strand zur Bezugsbasis. Damit fehlt systemimmanent das einheitliche Bezugssystem und deshalb sind nicht nur die Relativgeschwindigkeiten bezugssystemabhängige, relative Werte sondern auch die aus ihnen abgeleiteten Werte des Kontraktionsfaktors. Die Annäherung an den Zahlenwert 1 erkennen wir nach den Tabellenwerten nur unter spezifischen Bedingungen, insbesondere für die Annäherung an den Grenzfall von $v_1 = v_2$. Aus den Ergebnissen nach (10.37) bis (10.39) lassen sich folgende grundsätzliche Erkenntnisse gewinnen.

- In einem Kollektiv von Inertialsystemen kommt jedem Paar von Inertialsystemen mit gegenseitiger Relativgeschwindigkeiten v_i ein individueller Kontraktionsfaktor $f(v_i) = \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}$ zu.
- Um die Geschwindigkeit eines Körpers berechnen oder messen zu können, bedarf es eines Bezugssystems. In diesem Sinne ist jede Geschwindigkeit eine Relativgeschwindigkeit. Deshalb sind sowohl mechanischer Impuls und kinetische Energie wie auch der Kontraktionsfaktor relative, vom Bezugssystem abhängige Größen.
- Alle Gesetzmäßigkeiten zu den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen lassen sich aus den Ergebnissen des Additionstheorems für 3 Inertialsysteme darstellen und für beliebig viele weitere Inertialsysteme analog anwenden.
- Zwischen den 3 Inertialsystemen gibt es 3 Relativgeschwindigkeiten und die jeweils dazugehörigen Kontraktionsfaktoren.
- Jedem der 3 Inertialsysteme kann willkürlich die Rolle des Bezugssystems mit dem Kontraktionsfaktor $f(v_B) = 1$, also ohne Kontraktion, zugewiesen werden. In Abbildung 12 ist die Rolle des Bezugssystems dem Strand zugeordnet. Damit entfernt sich Inertialsystem 1 (Schiff) mit Relativgeschwindigkeit v_1 sowie Kontraktionsfaktor $f(v_1)$ gegenüber dem Strand und Inertialsystem 2 (Passagier) mit Relativgeschwindigkeit v_2 sowie Kontraktionsfaktor $f(v_2)$. Alternativ kann auch Inertialsystem 1 oder Inertialsystem 2 die Rolle des Bezugssystems zugewiesen werden. Dann entfernt sich das Inertialsystem „Strand“ mit Relativgeschwindigkeit v_1 sowie Kontraktionsfaktor $f(v_1)$ von Inertialsystem 1 weg beziehungsweise mit Relativgeschwindigkeit v_2 sowie Kontraktionsfaktor $f(v_2)$ von Inertialsystem 2.
- Bei allen 3 Alternativen gelten die gleichen wechselseitigen Beziehungen nach (10.37) und (10.39). Der Quotient aus jeweils einer Geschwindigkeit und ihrem zugehörigen Kontraktionsfaktor ist dabei jeweils betragsgleich mit dem Quotienten aus der Summe beziehungsweise Differenz der beiden anderen Geschwindigkeiten im Zähler und dem Produkt der beiden zugehörigen Kontraktionsfaktoren im Nenner. Dieses Produkt ist identisch mit dem Quadrat des geometrischen Mittelwertes dieser beiden Kontraktionsfaktoren.
- Bei einem Kollektiv von Inertialsystemen, bei denen keines mit einem anderen zusammenfällt, bei dem also bei jeder Konstellation von 2 Inertialsystemen eine Relativbewegung existiert, ist es ausgeschlossen, dass 2 Inertialsysteme einen identischen Kontraktionsfaktor aufweisen. Ausgenommen ist der Sonderfall des spiegelbildlichen Verhältnisses der beiden Inertialsysteme hinsichtlich Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Bezugssystem.

- Ein Inertialsystem ist ein gedankliches Konstrukt, in dem gedanklich ein Körper ruht, der abhängig von einer zu definierenden Geschwindigkeit physikalische Wirkungen in Form einer Kontraktion erfährt. Das Inertialsystem nimmt diese Eigenschaft des Körpers in Form von Geschwindigkeit und Kontraktion an und bildet sie ab.
- Das spezielle Inertialsystem, in das weder gedanklich ein Körper eingebracht wird noch dessen Eigenschaften einfließen, entspricht quasi dem Zustand vor dem Schöpfungsakt und weist die originäre Eigenschaft des ruhenden Bezugssystems auf ohne jede Geschwindigkeit und Kontraktion.
- Für jedes Inertialsystem mit Relativgeschwindigkeit v_i zu einem anderen Inertialsystem im Kollektiv existiert eine definierte individuelle Relativgeschwindigkeit v_n zum originären ruhenden Bezugssystem und ein zugehöriger Kontraktionsfaktor $f(v_n)$. Gilt für das Inertialsystem 1 die Relativgeschwindigkeit v_1 und für das Inertialsystem 2 die Relativgeschwindigkeit v_2 gegen das originäre ruhende Bezugssystem, sind diese Geschwindigkeitswerte nach den Gleichungen (10.37) bis (10.39) für die wechselseitigen Beziehungen von Inertialsystemen explizit verknüpft. Dass wir diese definierten individuellen Geschwindigkeiten nicht experimentell bestimmen können, liegt in der Natur der Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen, die einerseits die Existenz des ruhenden Bezugssystems voraussetzen, ohne andererseits seine Parameter zu definieren.
- In Verkettungen von Inertialsystemen gibt es nur Kontraktionswerte $f(v_i) \leq 1$ unabhängig vom Vorzeichen von v_i . Diese Kontraktion bezieht sich auf das Inertialsystem an der Spitze des dargestellten Vektors v_i gegenüber dem Inertialsystem am Schaft von v_i .
- Wenn wie in Abbildung 12 das Inertialsystem 1 mit seiner Relativgeschwindigkeit v_1 gegenüber dem Bezugssystem die Richtung vorgibt, und die Relativgeschwindigkeit v des Inertialsystems 2 gegenüber Inertialsystem 1 mit dieser Richtung übereinstimmt, liegt der Grundfall vor. Dabei sind Inertialsystem 1 und 2 bezogen auf das Bezugssystem kontrahiert, aber auch Inertialsystem 2 bezogen auf Inertialsystem 1. Es gibt also eine Beschränkung auf Kontraktion.
- Die Natur der Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen enthält aber auch das Gegenstück zu der Beschränkung der Betrachtung auf Werte der Kontraktion. Dieses Gegenstück ist unmittelbar in den Wechselbeziehungen angelegt, wenn man mathematisch nicht mit Kontraktionsfaktoren operiert, sondern mit deren Kehrwerten und damit exklusiv mit Faktoren der Dehnung. Wie sich diese physikalische Gegebenheit in der LORENTZ-Transformation abbildet, wird später noch näher erläutert.
- Der Wechsel der Richtung des Vektors einer Relativgeschwindigkeit entspricht dem Vorzeichenwechsel dieser Relativgeschwindigkeit. Mit diesem Vorzeichenwechsel zwischen zwei Inertialsystemen wechselt die Zuordnung der Eigenschaft des kontrahierten Systems gegenüber dem Partner-Inertialsystem.

10.5 Lorentz-Transformation und Additionstheorem im Kontext

Die LORENTZ-Transformation ist der Grenzfall des Additionstheorems, bei dem das Bezugssystem (im Beispiel: der Strand) mit dem Inertialsystem 1 (Schiff) zusammenfällt. (Das Schiff liegt noch am Strand vor Anker. Nur der Passagier (Inertialsystem 2) bewegt sich relativ zum Schiff. Nun gibt es auch für diesen Spezialfall zwei Alternativen der Zuordnung des Bezugssystems zu dem einen oder dem anderen Inertialsystem. In der LORENTZ-Transformation ist aber exklusiv die Variante abgebildet, die dem Inertialsystem 1 mit den Parametern x, t für Weg und Zeit die Rolle des Bezugssystems zuordnet. Inertialsystem 2 mit den Parametern x', t' ist dagegen das relativ zu Inertialsystem 1 kontrahierte System. Die Relativgeschwindigkeit v basiert auf den Parametern des unkontrahierten Inertialsystems 1, also: $v = \frac{dx}{dt}$.

Die Ergebnisse zum Additionstheorem erlauben nun auch in Rückkopplung, die Widerspruchsfreiheit zur LORENTZ-Transformation und deren sinnvolle Anwendungsmöglichkeiten zu hinterfragen. Dazu dient die nachfolgende Abbildung 13 und die entsprechenden mathematischen Beziehungen.

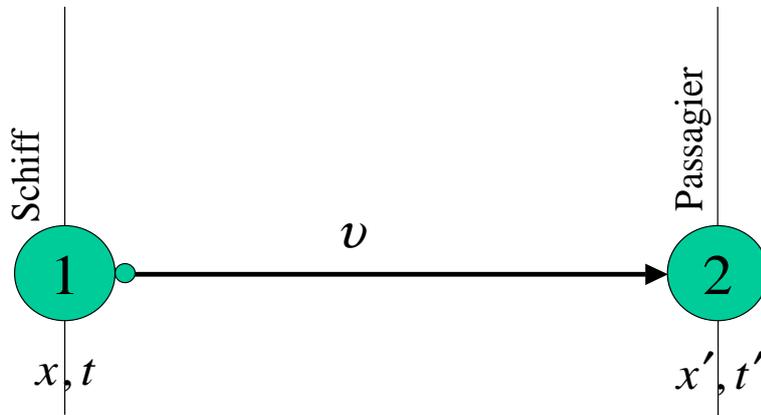


Abbildung 13: Zwei Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.40)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.41)$$

$$x' = \frac{x(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x'(1 + \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.42)$$

$$t' = \frac{t(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{t'(1 + \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.43)$$

$$x' = \frac{x'(1 + \frac{v}{c})(1 - \frac{v}{c})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10.44)$$

$$\frac{x'}{x} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \qquad (10.45)$$

In (10.40) und (10.41) ist die Originalform der LORENTZ-Transformation wiedergegeben. Weg und Zeit stehen in der LORENTZ-Transformation in gegenseitiger Abhängigkeit, wobei im Sinne der Ausbreitung mit konstanter Lichtgeschwindigkeit c gelten muss:

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c.$$

Nur unter dieser Voraussetzung stimmen die beiden linken Gleichungen von (10.40) und (10.41) überein sowie auch die beiden rechten Gleichungen miteinander. Der angegebene Grundfall der LORENTZ-Transformation ist gekennzeichnet durch räumliche und zeitliche Koinzidenz im Koordinatenursprung beider Inertialsysteme in Form der Beziehungen $x_0 = x'_0 = 0$ sowie $t_0 = t'_0 = 0$. (10.40) und (10.41) stimmen damit nicht nur überein, sie lassen sich darüber hinaus in eine einheitliche Form einbringen, und zwar nach (10.42), abgestellt auf den Weg sowie analog nach (10.43), abgestellt auf die Zeit.

Unbeschadet der zentralen Bedeutung dieses Grundfalles der LORENTZ-Transformation als Basis aller weiteren Ableitungen und Interpretationen kann für spezifische Anwendungen natürlich auch mit parallel auf der Achse von Weg oder Zeit verschobenen Funktionen operiert werden, ohne die Grundeigenschaften der LORENTZ-Transformation zu tangieren. Zu diesen Grundeigenschaften der LORENTZ-Transformation ist Folgendes festzuhalten:

- Gegenstand der LORENTZ-Transformation ist die Transformation der Variablen von Weg und Zeit vom Inertialsystem 1 (Bezugssystem) in die davon abweichenden Variablen von Weg und Zeit von Inertialsystem 2. Gedanklich und rechnerisch wird also mit der linken Gleichung von Inertialsystem 1 nach Inertialsystem 2 gesprungen und die Parameter x, t durch x', t' substituiert.
- Wird in einem weiteren Schritt mit Hilfe der Gegengleichung (rechte Gleichung) eine zweite Substitution durchgeführt, so entspricht dies dem Rücksprung von Inertialsystem 2 nach Inertialsystem 1.
- Die mit dem ersten Sprung verbundene Kontraktion wird mit dem Rücksprung wieder aufgehoben. Das Endergebnis dieser **Doppelsubstitution** nach (10.44) bewegt sich innerhalb ein und desselben Inertialsystems und ist stimmig. Das typische Größenverhältnis zwischen beiden Inertialsystemen ist dagegen in (10.45) dargestellt. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass den Faktoren $1 - \frac{v}{c}$ und $1 + \frac{v}{c}$ die Natur von Kontraktion beziehungsweise Dehnung innewohnt.

Nehmen wir jetzt Bezug auf die vorstehend für die Wechselbeziehungen der Inertialsysteme hervorgehobene Bedeutung der alternativen Interpretation im Sinne von Kontraktion (Kontraktionsfaktor $f(v)$) oder im Sinne von Dehnung (Dehnungsfaktor $1/f(v)$). Dabei ist mit Blick auf die LORENTZ-Transformation von besonderem Interesse, dass in linker und rechter Gleichungsseite der LORENTZ-Transformation nach (10.42) diese Inversion natürlich angelegt ist. Bildet man nämlich den Kehrwert des Quotienten von

$$\frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

von (10.42), so ergibt sich mit:

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

die Form:

$$\frac{1}{\frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Es besteht also Übereinstimmung mit der rechten Gleichungsseite von (10.42)! Damit erkennen wir die physikalische und mathematische Identität der beiden Gleichungen auf linker und rechter Seite von (10.42). Diese verkappte Identität innerhalb der LORENTZ-Transformation bedeutet zum einen, dass die Aufspaltung in Gleichungspaare auf linker und rechter Seite nur der Verwirrung Vorschub leistet und der Verschleierung der Identität. Weitere Konsequenz ist die völlige Übereinstimmung mit der Gesetzmäßigkeit der Inversion durch alternative Interpretation als Kontraktion (Ausgangswert) oder Dehnung (Kehrwert), wie sie aus den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen hervorgegangen ist.

Fundamentale Konsequenz dieser Identität ist die Erkenntnis, dass es zwischen zwei Inertialsystemen niemals Gleichberechtigung geben kann, so wie prinzipiell für alle Außenbeziehungen von Inertialsystemen Gleichberechtigung ausgeschlossen ist. Dem Inertialsystem, dem durch den Rechenansatz die Rolle des kontrahierten Systems zugewiesen wird, steht zwingend der Partner gegenüber, der relativ zum kontrahierten System gedehnt ist. Für beide Betrachtungsweisen ist die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Systemen nur an einem System, nämlich dem **nicht** kontrahierten System orientiert und am Gang seiner Uhr, denn beide Betrachtungsweisen liegt eine identische physikalische Gesetzmäßigkeit zugrunde. Für die Gegebenheiten des Additionstheorems kann von diesem Prinzip aber durchaus abgewichen werden, d.h., die Relativgeschwindigkeit auf die Parameter des kontrahierten Systems umgerechnet werden.

Zusammenfassend lässt sich die LORENTZ-Transformation mit

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c$$

auf nur eine Beziehung reduzieren:

$$\frac{x'}{x} = \frac{t'}{t} = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} \quad (10.46)$$

- Das Inertialsystem mit den Parametern x', t' unterliegt der Kontraktion von Weg und Zeit in Relation zum Inertialsystem mit den Parametern x, t .
- Das Inertialsystem mit den Parametern x, t unterliegt der Dehnung von Weg und Zeit in Relation zum Inertialsystem mit den Parametern x', t' .
- Gleichberechtigung zwischen beiden Inertialsystemen in ihrer gegenseitigen Beziehung ist ausgeschlossen. Die Relativgeschwindigkeit v ist für beide Fälle identisch und basiert auf dem Eichmaß der Zeit des **nicht** kontrahierten Inertialsystems.

Zur Darstellung der Kontraktion, der ein Stab in einem Inertialsystem unterliegt, das sich relativ zu einem Bezugssystem bewegt, gehen wir von der Gleichung auf der rechten Seite von (10.42) aus. x auf der linken Gleichungsseite ist der Parameter des unkontrahierten Bezugssystems. Addieren wir zu x die Länge L eines Stabes, muss sich dessen Kontraktion auf das Maß L' im kontrahierten Inertialsystem 2 auf der rechten Gleichungsseite abbilden. Im Zähler des Quotienten ist der Parameter x' des kontrahierten Inertialsystems 2 mit dem Klammerausdruck $(1 + \frac{v}{c})$ multipliziert, wobei sich hinter dem Teilterm $\frac{x'v}{c} = t'v$ die Zeitabhängigkeit verbirgt. Der Stab L im Bezugssystem muss aber zu ein und demselben Zeitpunkt, also zeitunabhängig in seiner auf L' kontrahierten Form abgebildet werden. Deshalb ist L' ohne Zeitabhängigkeit zu $x'(1 + \frac{v}{c})$ zu addieren. Damit ergibt sich zusammenfassend:

$$x + L = \frac{x'(1 + \frac{v}{c}) + L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.47)$$

und nach Differenzbildung mit der Ausgangsbeziehung auf der rechten Seite von (10.42):

$$\frac{L'}{L} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10.48)$$

In analoger Weise ergibt sich mit der linken Gleichung von (10.42)

$$x' + L = \frac{x(1 - \frac{v}{c}) + L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.49)$$

das gleiche Ergebnis von (10.48). Dies ist allein deshalb folgerichtig, da (10.49), umgeformt mit Hilfe von (10.6), der Beziehung (10.47) mit der nachstehend dargestellten Modifikation entspricht.

$$x \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} + L = \frac{x' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} (1 - \frac{v}{c}) + L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x + L \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} = \frac{x'(1 + \frac{v}{c}) + L' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Der für L und L' identische multiplikative Faktor, auf den sich die Modifikation gegenüber (10.47) beschränkt, führt schließlich zum identischen Ergebnis nach (10.48) für ihre Proportion. Zu betonen ist, dass linke und rechte Gleichung von (10.42) einer gemeinsamen Wurzel entstammen und einer eindeutigen Zuordnung der Parameter zum unkontrahierten Bezugssystem (Inertialsystem 1, Parameter x) beziehungsweise zum kontrahiertem Partner (Inertialsystem 2, Parameter x') unterliegen. Fehlerhaft wäre, einer Ambivalenz von linker und rechter Gleichung im Sinne von Gleichberechtigung zu unterstellen, wobei die Rolle von Bezugssystem und kontrahiertem Inertialsystem frei zu wählen wäre.

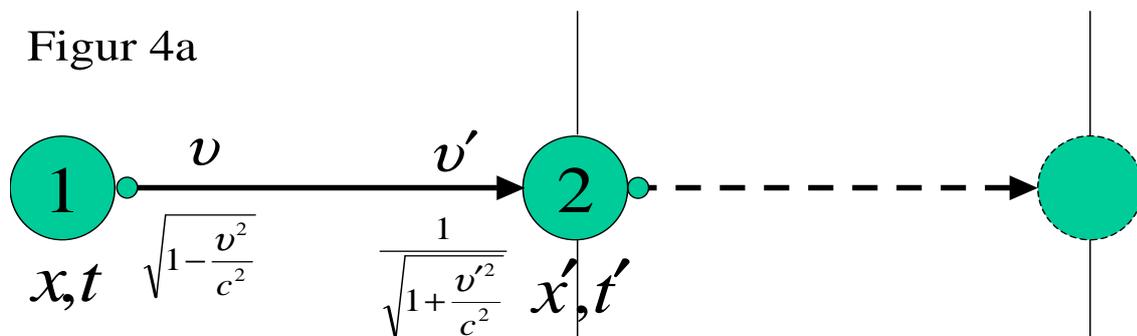
Aus Gleichung (10.48) ergibt sich, dass zu ein und demselben Zeitpunkt korrespondierende Wegabschnitte (im Beispiel die Stablänge L) in den beiden Inertialsystemen S und S' nicht übereinstimmen. In S ergibt sich im Beispiel die Stablänge L , im kontrahierten System S' die kontrahierte Länge L' . Ein Beobachter in S erkennt, dass ein Stab, der in seinem Inertialsystem die Länge L hat, im korrespondierenden Inertialsystem S' durch Kontraktion die Länge L' aufweist. Umgekehrt erkennt ein Beobachter in S' , dass ein Stab, der in seinem Inertialsystem die Länge L' hat, im korrespondierenden Inertialsystem S durch Dehnung die Länge L aufweist.

In analoger Weise ergibt sich, dass an ein und demselben Zeitpunkt korrespondierende Zeitabschnitte in den beiden Inertialsystemen S und S' nicht übereinstimmen. In S ergibt sich zum Beispiel das Intervall T , im kontrahierten System S' das kontrahierte Intervall T' . Ein Beobachter in S erkennt, dass ein Intervall, das in seinem Inertialsystem die Dauer T hat, im korrespondierenden Inertialsystem S' durch Kontraktion die Dauer T' aufweist. Umgekehrt erkennt ein Beobachter in S' , dass ein Intervall, das in seinem Inertialsystem die Dauer T' hat, im korrespondierenden Inertialsystem S durch Dehnung die Dauer T aufweist.

Die vorstehend angegebene Berechnung in (10.47) bis (10.49) unterscheidet sich grundsätzlich von der gängigen Methode in der wissenschaftlichen Literatur. Selbstverständlich ist es möglich, wie in (10.47) angegeben, aus der Beziehung (10.40) durch räumliche Parallelverschiebung eine abgeleitete Beziehung, im Beispiel: (10.47) zu gewinnen. Dann gilt im Beispiel: (10.40) bildet den Stabanfang ab und (10.47) das Stabende. Dazu ist es aber weder nötig noch zulässig, die prinzipielle Raum-/Zeitkoinzidenz von (10.40) zu verletzen. Werden dagegen isolierte

räumliche beziehungsweise zeitliche Koinzidenzen, wie in der wissenschaftlichen Literatur üblich, künstlich gesetzt, ergeben sich zwar rein formal Rechenergebnisse für die Kontraktion des Stabes, aber allein in der wahlweisen Zuordnung der Kontraktion der Längen zu linker oder rechter Gleichung von (10.40), also zu Inertialsystem S oder S' , zeigt die Willkürlichkeit und damit Fehlerhaftigkeit dieses Verfahrens.

Figur 4a



Figur 4b

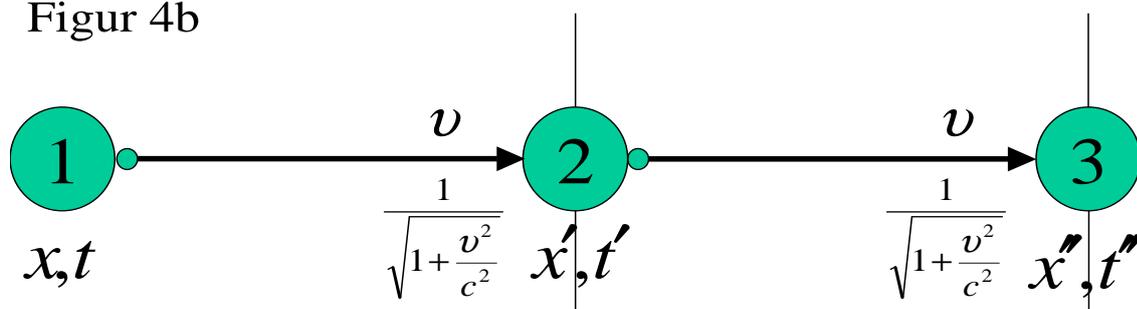


Abbildung 14: LORENTZ-Transformation und Additionstheorem

Aufbauend auf dieser Betrachtung kann nun auch der Nachweis geführt werden, dass die LORENTZ-Transformation und die Ergebnisse des Additionstheorems miteinander in Einklang stehen, wobei Abbildung 14 der Veranschaulichung dient.

Inertialsystem 1 v $\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = v'$	Inertialsystem 2 v' $v = \frac{v'}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}$	Inertialsystem 3 (10.50)
--	--	-----------------------------

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}}$	(10.51)
------------------------------	---	---------

$v' \rightarrow v$ $\frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$	$\frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$	(10.52)
--	--	---------

Summe: $\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$	$\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$	(10.53)
--	----------------------------------	---------

In Figur 4a ist v an Inertialsystem 1 und dem Gang seiner Uhr orientiert, v' ist an Inertialsystem 2 und dem Gang seiner Uhr orientiert. Inertialsystem 2 ist relativ zu Inertialsystem

1 entsprechend dem Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ kontrahiert und Inertialsystem 1 ist relativ zu Inertialsystem 2 entsprechend dem Faktor $\sqrt{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$ gedehnt. Diese Relation ist Beziehung (10.50) und (10.51) zu entnehmen.

Für die Darstellung des Additionstheorems wird in Figur 4b und Beziehung (10.52) v' durch v substituiert und das Ergebnis der Summenbildung für diesen Sonderfall von zwei gleich großen Geschwindigkeiten ist (10.53) zu entnehmen. Natürlich gilt das Additionstheorem auch ohne Beschränkung auf den Sonderfall, der hier nur für die logische Verknüpfung und Vergleichbarkeit mit der LORENTZ-Transformation gewählt ist.

Die Übereinstimmung mit der Ableitung zum Additionstheorem ist also damit hergestellt, dass v' durch v substituiert wird, was dem Vorgehen bei Gleichung (10.3) und (10.4) entspricht.

In Figur 4b haben wir eine Überlagerung zweier identischer Schritte vor uns, und zwar von Inertialsystem 1 über Inertialsystem 2 (als Brückenglied) nach Inertialsystem 3 mit einer resultierenden Verdoppelung der Geschwindigkeit

$$v + v = 2v$$

und der Kontraktion als Produkt zweier gleich großer Faktoren

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$v_r = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}.$$

10.6 Viertes Inertialsystem als Bezugssystem

Wird von dem als Bezugssystem ausgewählten Inertialsystem „Strand“ auf ein viertes Inertialsystem als neues Bezugssystem umgerechnet, das gegenüber dem Strand die Relativgeschwindigkeit v_4 hat, errechnen sich folgende Relativgeschwindigkeiten v_1' von Inertialsystem 1 (Schiff) und v_2' von Inertialsystem 2 (Passagier) gegenüber diesem neuen Bezugssystem (viertes Inertialsystem).

$$v_2' = \frac{v_4 + v_2}{1 + \frac{v_2 v_4}{c^2}}$$

$$v_1' = \frac{v_4 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_4}{c^2}}$$

Nachfolgend wird abgeleitet, dass sich unabhängig vom gewählten Bezugssystem immer der gleiche Wert der Relativgeschwindigkeit v zwischen zwei Inertialsystemen 1 (im Beispiel: Schiff) und 2 (im Beispiel: Passagier) errechnet.

$$v = \frac{v_2' - v_1'}{1 - \frac{v_1' v_2'}{c^2}} =$$

$$\frac{\frac{v_4 + v_2}{1 + \frac{v_2 v_4}{c^2}} - \frac{v_4 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_4}{c^2}}}{1 - \frac{(v_4 + v_1)(v_4 + v_2)}{(1 + \frac{v_1 v_4}{c^2})(1 + \frac{v_2 v_4}{c^2}) \cdot c^2}} =$$

$$\frac{(v_4 + v_2)(1 + \frac{v_1 v_4}{c^2}) - (v_4 + v_1)(1 + \frac{v_2 v_4}{c^2})}{(1 + \frac{v_1 v_4}{c^2})(1 + \frac{v_2 v_4}{c^2}) - \frac{(v_4 + v_1)(v_4 + v_2)}{c^2}} =$$

$$\frac{\cancel{v_4} + v_2 + \frac{v_1 v_4}{c^2} + \frac{v_1 v_2 v_4}{c^2} - \cancel{v_4} - v_1 - \frac{v_2 v_4}{c^2} - \frac{v_1 v_2 v_4}{c^2}}{1 + \frac{v_1 v_4}{c^2} + \frac{v_2 v_4}{c^2} + \frac{v_1 v_2 v_4}{c^4} - \frac{v_4^2}{c^2} - \frac{v_2 v_4}{c^2} - \frac{v_1 v_4}{c^2} - \frac{v_1 v_2}{c^2}} =$$

$$\frac{(v_2 - v_1)(1 - \frac{v_4^2}{c^2})}{(1 - \frac{v_1 v_2}{c^2})(1 - \frac{v_4^2}{c^2})} =$$

$$\frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Die Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen nach (10.37) bis (10.39) werden bei dem geschilderten Umstieg auf ein neues Bezugssystem in einfacher Weise angepasst, indem v_1, v_2 durch v_1', v_2' substituiert wird.

Zusammenfassend lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

Zwei relativ zueinander bewegte Inertialsysteme 1 und 2 sind in jedem Fall unterschiedlich kontrahiert, wobei für keines der Inertialsysteme das absolute Maß der Kontraktion bekannt ist oder bestimmbar wäre. Obwohl einem der beiden Inertialsysteme im Innenverhältnis der beiden Partner zwingend die Rolle des unkontrahierten Inertialsystems zukommt und dem anderen Inertialsystem die Rolle des kontrahierten Systems, ist keine Entscheidung darüber möglich, welchem Inertialsystem welche Rolle zukommt. Es wäre aber fehlerhaft, deswegen von einer Gleichberechtigung der beiden Inertialsysteme zu sprechen, nur weil die Rollenverteilung nicht bestimmbar ist. Als „Insider“ oder besser: „Gefangener in einem Inertialsystem“ messen wir eine subjektive Geschwindigkeit gegenüber unserem Partner und errechnen daraus einen subjektiven Wert der Kontraktion für den relativ zu uns bewegten Partner. Da wir uns nicht wie „Münchhausen aus dem Sumpf unserer begrenzten Orientierungsmöglichkeit ziehen können“, ist dieser subjektive Kontraktionsfaktor auch nicht identisch mit der echten Proportion der (unbekannten) echten Werte der Kontraktion beider Partner. Alle hier genannten Gegebenheiten bleiben unberührt, wenn gedanklich aus der Beschränkung der Betrachtung

auf das gegenseitige Verhältnis zweier Inertialsysteme ausbrechen und die Beziehungen dieser zwei Inertialsysteme zu einem dritten Inertialsystem betrachten, das als Bezugssystem dienen soll. Damit kommt das Additionstheorem ins Spiel und die daraus entwickelten Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen nach (10.34) bis (10.39). Mit den Relativgeschwindigkeiten v_1 von Inertialsystem 1 gegenüber dem Bezugssystem und v_2 von Inertialsystem 2 gegenüber dem Bezugssystem ist jetzt der Weg bereitet, basierend auf dem Bezugssystem eindeutige Relativgeschwindigkeiten und Kontraktionswerte der beteiligten Inertialsysteme definieren zu können.

Wird das gewählte Bezugssystem, das die Bezeichnung B tragen soll, durch ein beliebiges anderes Bezugssystem mit der Bezeichnung BB substituiert, dann hat das Inertialsystem 1 eine Relativgeschwindigkeit v_1 gegenüber B und v_1' gegenüber BB , das Inertialsystem 2 eine Relativgeschwindigkeit v_2 gegenüber B und v_2' gegenüber BB . Aus v_1' und v_2' errechnet sich die gleiche Relativgeschwindigkeit v von Inertialsystem 1 gegenüber Inertialsystem 2 wie aus v_1 und v_2 ; die Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen auf der Basis von Bezugssystem B mit den Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 stimmen dagegen **nicht** überein mit den Wechselbeziehungen zwischen Inertialsystemen auf der Basis von Bezugssystem BB mit den Relativgeschwindigkeiten v_1' und v_2' .

Bei der Wahl des neuen Bezugssystems mit der Relativgeschwindigkeit v_1' gegenüber Inertialsystem 1 und mit der Relativgeschwindigkeit v_2' gegenüber Inertialsystem 2 ist nach 3 Möglichkeiten zu unterscheiden:

- Die Richtungen von v_1' gegenüber Inertialsystem 1 und v_2' gegenüber Inertialsystem 2 stimmen mit den Richtungen von v_1 und v_2 überein.
- Die Richtungen von v_1' gegenüber Inertialsystem 1 und v_2' gegenüber Inertialsystem 2 stimmen **nicht** mit den Richtungen von v_1 und v_2 überein.
- Die Richtungen von v_1' und v_2' stimmen **nicht** überein. D.h.: Inertialsystem 1 bewegt sich gegenüber dem Bezugssystem in eine Richtung, Inertialsystem 2 in die Gegenrichtung. Innerhalb dieser 3. Kategorie gibt es weitere 3 Unterkategorien:
 - Das Bezugssystem fällt mit Inertialsystem 1 zusammen.
 - Das Bezugssystem fällt mit Inertialsystem 2 zusammen.
 - Inertialsystem 1 und 2 bewegen sich mit der gleichen Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Bezugssystem, aber in Gegenrichtung zueinander.

Das Kontraktionsgefälle zwischen Inertialsystem 1 und 2 bestimmt sich nach der Wahl des Bezugssystem entsprechend vorstehenden Varianten.

10.7 Überlagerung von Relativgeschwindigkeiten

Relativgeschwindigkeiten zwischen Inertialsystemen lassen sich, physikalisch und mathematisch korrekt, gedanklich in Komponenten auftrennen und umgekehrt wieder zusammenfügen. Wesensmerkmal dieser Komponenten ist es deshalb, dass ihre physikalische Aussage immer gleichzeitig sowohl individuell wie auch in Überlagerung gültig ist. Abhängig von dem gedanklich in ein Inertialsystem eingepprägten Koordinatensystem mag die Auftrennung in Komponenten und deren Überlagerung zunächst wie gedankliche Spielerei anmuten. Da aber die mit der Relativgeschwindigkeit verbundene Kontraktion ebenfalls durch das Wesensmerkmal der Überlagerung gekennzeichnet ist, kann deren Resultat **nicht** willkürlicher Natur sein. Vielmehr ist unabhängig davon, an welche Aufteilung in Komponenten auch immer gedacht wird, in jedem Fall für alle 3 Dimensionen des Raumes von einer gleichen Kontraktion auszugehen, die sich nach der resultierenden Relativgeschwindigkeit bestimmt. Ein Quader, der

in einem Inertialsystem ruht, das sich relativ zu einem anderen Inertialsystem bewegt, wird also **keinen** Unterschied erfahren, gleichgültig, wie lange und kurze Seite gegen die Richtung der resultierenden Relativgeschwindigkeit orientiert sind.

11 Kopie zu [1], [2] und [3] Literaturhinweise

Siehe nachfolgende Seiten:

Kopien zu [1]

Kopien zu [2]

Kopien zu [3]

31. Der Wechselstromkreis mit Induktivität 337

Die maximal vom Eisenkern aufgenommene magnetische Energie wird nach Gl. (17)

$$W_m = \frac{1}{2} I_m^2 L = I^2 L = 0,49 \text{ Ws} .$$

Die *komplexe Rechnung* läßt sich mit Vorteil anwenden, wenn die Induktivität als konstant angesehen werden kann. Dann gilt für die Selbstinduktionsspannung

$$\underline{U}_L = \underline{I} j \omega L . \quad (24)$$

Man kann daher analog zur Gl. (17.24) den Ausdruck

$$Z = j \omega L \quad (25)$$

als den der Induktivität L entsprechenden komplexen Widerstand auffassen. Der ohmsche Spannungsabfall ist

$$\underline{U}_R = \underline{I} R , \quad (26)$$

und es gilt

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{I} (R + j \omega L) . \quad (27)$$

Die Größe $R + j \omega L$ stellt den komplexen Widerstand der Spule dar, R ist der Wirkwiderstand, ωL der Blindwiderstand. Näheres über die komplexe Rechnung s. Abschnitt 36.

32. Wirbelströme

Befinden sich in einem magnetischen Wechselfeld elektrisch leitende Stoffe, so entstehen in diesen Stoffen nach dem Induktionsgesetz Wechselströme auf Bahnen, die mit den magnetischen Induktionslinien verkettet sind; man bezeichnet diese Ströme als *Wirbelströme*. In stromführenden Leitern überlagern sich die Wirbelströme dem Leiterstrom. Auch durch das magnetische Feld des Leiterstromes selbst werden Wirbelströme im Leiter hervorgerufen. Dadurch ergibt sich eine ungleichmäßige Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt, die man als *Stromverdrängung* bezeichnet. Die Wirbelströme erzeugen selbst ein Magnetfeld und wirken daher auch auf das ursprüngliche Feld zurück, es entsteht *Feldverdrängung*. Infolge der im Leiter entstehenden Stromwärme wird dem magnetischen Feld dabei Energie entzogen. Man bezeichnet als *Wirbelstromverluste* die Leistung, die infolge der Wirbelströme in Form von Wärme verlorengeht.

In einem Wirbelstromfeld sind elektrische und magnetische Feldstärke durch das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz miteinander verknüpft. Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke ist auf jedem geschlossenen Weg durch die Durchflutung des Weges bestimmt. Auch das Induktionsgesetz gilt in einem räumlich ausgedehnten Feld auf beliebigen Bahnen; das Linienintegral der elektrischen Feldstärke ist also auf jedem geschlossenen Weg gleich dem magnetischen Schwund dieses Weges.

Stromverdrängung im zylindrischen Leiter

Ein besonders einfacher Fall der *Stromverdrängung* liegt bei langen kreiszylindrischen Leitern vor. Wenn man sich auf die Betrachtung eines kurzen Längenabschnittes eines solchen Leiters beschränkt, so darf man annehmen, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke nur von dem Abstand r von der Achse abhängen, Abb. 32.1, und in jedem Leiterquerschnitt die gleichen Werte besitzen. Die magnetische Feldstärke hat überall die tangentielle Richtung, während die elektrische Feldstärke wie die Stromdichte axial gerichtet ist. Stromdichte und elektrische Feldstärke sind nach Gl. (6.4) verknüpft durch die Beziehung

$$\underline{J} = \sigma \underline{E} , \quad (1)$$

wobei hier durchweg vorausgesetzt wird, daß der Verschiebungsstrom im Leiter gegen den Leitungsstrom vernachlässigt werden kann (s. a. Abschnitt 44).

338

Drittes Kapitel: Das magnetische Feld

Wendet man daher das *Durchflutungsgesetz* auf einen Kreis vom Radius r an, so folgt für jeden Zeitpunkt

$$2 \pi r H = \int_0^r J 2 \pi r dr = 2 \pi \sigma \int_0^r E r dr, \quad (2)$$

oder durch Differenzieren:

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r} H = \sigma E. \quad (3)$$

H und E bedeuten die Augenblickswerte der Feldstärken.

Um das *Induktionsgesetz* anzuwenden, betrachte man ein in einer Achsenebene des Leiters liegendes Rechteck, Abb. 32.2, dessen eine lange Seite in die Achse fällt, und dessen andere davon den Abstand r hat; die Länge des Rechtecks sei l . Ein solches Rechteck wird von den magnetischen Feldlinien senkrecht durchsetzt, so daß der Gesamtfluß in dem Rechteck

$$\Phi = \int_0^r B l dr = \mu l \int_0^r H dr$$

beträgt, wenn unter μ die als konstant angesehene Permeabilität des Leitermaterials verstanden wird. Bei der Bestimmung des Linienintegrals der elektrischen Feldstärke hat man die angenommene Bezugsrichtung des Induktionsflusses im Sinne einer Rechtsschraube zu umkreisen. Dies ergibt

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E|_{r=0} l - E|_r l = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\mu l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r H dr; \quad (4)$$

die aus den Radien gebildeten Rechteckseiten tragen zu dem Linienintegral nichts bei, da die elektrische Feldstärke senkrecht auf diesen Seiten steht. Durch Differenzieren nach r ergibt sich

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5)$$

Differenziert man die Gl. (3) nach t und führt die eben gefundene Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (6)$$

Wenn sich die Feldgrößen zeitlich sinusförmig ändern, so kann man die komplexe Darstellung benutzen, indem man für die komplexen Augenblickswertesetzt (s. S.151)

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}(t) &= \underline{E} \sqrt{2} e^{j\omega t}, \\ \underline{H}(t) &= \underline{H} \sqrt{2} e^{j\omega t}, \\ \underline{J}(t) &= \underline{J} \sqrt{2} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Größen \underline{E} , \underline{H} und \underline{J} stellen für jeden Punkt des Raumes Zeiger in der komplexen Ebene dar. Die absoluten Beträge dieser Zeiger geben die Effektivwerte der Größen in dem betreffenden Raumpunkt an. Führt man die Ansätze (7) in die Gl. (6) ein, so folgt

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{E}}{dr} + k^2 \underline{E} = 0. \quad (8)$$

Dabei ist gesetzt

$$k^2 = -j \omega \sigma \mu; \quad k = (1 - j) \sqrt{\frac{1}{2} \omega \sigma \mu}. \quad (9)$$

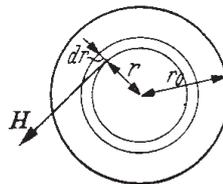


Abb. 32.1. Magnetische Feldstärke in einem zylindrischen Leiter

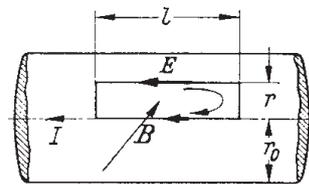


Abb. 32.2. Anwendung des Induktionsgesetzes

43. Grundgleichungen der elektromagnetischen Vorgänge

507

Die oben durchgeführte Überlegung gibt eine physikalische Begründung der AMPERESchen Formel Gl. (26.70). Die Stromstärke I in dem Leiterstück von der Länge ds ist gleichwertig einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Elektrizitätsmenge $Q = I dt = I \frac{dt}{ds} ds = I \frac{ds}{v}$, d.h. es ist

$$Q v = I ds. \quad (45)$$

Damit werden die Gl. (44) und (26.70) identisch.

Bei hohen Geschwindigkeiten v , die sich der Lichtgeschwindigkeit nähern, entsteht eine Verzerrung des in Abb. 43.8 dargestellten Feldes infolge der Rückwirkung des magnetischen Feldes gemäß dem Induktionsgesetz. Dadurch ändert sich auch die scheinbare elektromagnetische Masse, s. Gl. (8.3).

2. Es ist noch die Frage zu betrachten, was man unter der Geschwindigkeit v einer frei im Raum fliegenden Ladung zu verstehen hat.

Erfahrungsgemäß gelten die physikalischen Grundgesetze der Mechanik und der Elektrodynamik in jedem Koordinatensystem, das eine feste Orientierung gegen das Fixsternsystem hat, sowie in allen parallel dazu, also ohne Drehung, *gleichförmig bewegten* Koordinatensystemen. Solche Systeme nennt man *Inertialsysteme*. So kann ein in der Sonne verankertes Koordinatensystem, das fest gegen die Fixsterne orientiert ist, als ein Inertialsystem angesehen werden. Ein im Mittelpunkt der Erde verankertes derartiges System ist mit sehr großer Annäherung ein Inertialsystem, solange es sich um Vorgänge handelt, die kurz im Vergleich zu einem Erdumlauf um die Sonne, also zu einem Jahr, sind. Ein Koordinatensystem, das fest mit der Erdoberfläche verbunden ist (Laboratorium) ist zwar kein Inertialsystem, da es an der Erdrotation teilnimmt. Trotzdem kann auch ein solches System für viele Zwecke als Inertialsystem angesehen werden, wenn nämlich die Erddrehung während der Zeitdauer des betrachteten Vorganges unmerklich ist.

Streng genommen lautet daher die Antwort auf die oben gestellte Frage:

Unter v ist die Geschwindigkeit des Elektrons relativ zu einem Beobachter zu verstehen, vorausgesetzt, daß sich dieser in einem Inertialsystem befindet.

Für die Beobachtung auf der Erde ist dies praktisch gleich der Relativgeschwindigkeit der Elektronen gegen den Beobachter auf der Erde. Würde sich aber ein Beobachter mit seinen Meßgeräten mit gleichförmig fliegenden Elektronen mitbewegen, dann würde er ruhende Elektronen mit ihrem elektrostatischen Feld beobachten können, aber kein magnetisches Feld der oben geschilderten Art.

44. Elektromagnetische Wellen

Elementarform der elektromagnetischen Welle

Nach dem vorigen Abschnitt entsteht eine elektromagnetische Welle, sobald sich Ströme oder Spannungen zeitlich ändern. Zeitlich *konstante* Spannungen und Strömungen liegen vor, wenn sich Elektrizitätsmengen in Ruhe oder in *gleichförmiger* Bewegung befinden; Strom- und Spannungsänderungen werden durch *ungleichmäßig* bewegte Elektrizitätsmengen verursacht. Die einfachste elektromagnetische Welle entsteht daher, wenn eine punktförmige Elektrizitätsmenge in einem sonst von Ladungen und materiellen Körpern freien Raum ungleichförmig bewegt wird. Die bei allgemeinen Bewegungen von räumlich ausgedehnten Ladungen entstehenden Wellen lassen sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungsteilchen ausgehenden Wellen darstellen.

Da sich jede Bewegung nach FOURIER in zeitlich sinusförmige Bewegungen zerlegen läßt, so erhält man einen Einblick in diese Vorgänge, wenn man eine sinusförmige Bewegung von Ladungen betrachtet. Solche Bewegungen treten auch auf, wenn sich die Ströme und Spannungen in einem Stromkreis zeitlich sinusförmig verändern. In jedem kleinen Ausschnitt des vom Wechselstrom durchflossenen Leiters schwingt die Elektronenwolke gegenüber den feststehenden positiven Ladungen in der Längsrichtung des Leiters hin und her. Die von einem drahtförmigen Leiter ausgehende elektromagnetische Welle kann aus den von den Längenelementen des Leiters herrührenden Teilwellen zusammengesetzt gedacht werden. Die von einem sehr kurzen von Sinusstrom durchflossenen Leiterabschnitt ausgehende Welle bildet die *Elementarform der elektromagnetischen Welle*. Sie wird durch den Wechselstrom i in dem Leitungsabschnitt von der sehr kleinen Länge l erregt oder, was damit gleich-

508

Sechstes Kapitel: Das rasch veränderliche elektromagnetische Feld

wertig ist, durch eine Ladung Q , die mit der Geschwindigkeit v sinusförmig um eine Ruhelage schwingt. Beide Vorgänge sind gleichwertig, wenn gemäß Gl. (43.45)

$$vQ = \Pi. \quad (1)$$

Eine solche Erregungsstelle wird *Hertzscher Dipol* genannt.

Die Lage eines beliebigen Punktes P im Raum gegenüber der schwingenden Ladung werde durch die Koordinaten, Abb. 44.1, gekennzeichnet. Die z -Achse werde in die Bewegungsrichtung der Ladung gelegt. Aus Symmetriegründen hängen dann die Feldgrößen nur von den beiden Zylinderkoordinaten a und z ab. In dem Raum außerhalb des Dipols gelten die Feldgleichungen in der Form

$$\text{rot } \underline{H} = j \omega \varepsilon_0 \underline{E}, \quad (2)$$

$$\text{rot } \underline{E} = -j \omega \mu_0 \underline{H}, \quad (3)$$

wenn der Voraussetzung gemäß eine sinusförmige Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz ω eingeführt wird. Formal entspricht die Beziehung (2) der im stationären magnetischen Feld geltenden Beziehung (26.49), wenn \underline{J} an Stelle von $j \omega \varepsilon_0 \underline{E}$ eingeführt wird, und man kann auch hier die magnetische Feldstärke aus einem Vektorpotential ableiten, indem man gemäß Gl. (26.53) setzt

$$\underline{H} = \text{rot } \underline{V}. \quad (4)$$

Führt man dies in Gl. (3) ein, so folgt

$$\text{rot} (\underline{E} + j \omega \mu_0 \underline{V}) = 0. \quad (5)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß das Feld des in der Klammer stehenden Vektors wirbelfrei ist; daher kann dieser Vektor aus einem zunächst noch unbekanntem skalaren Potential φ abgeleitet werden; wir setzen

$$\underline{E} + j \omega \mu_0 \underline{V} = -\text{grad } \varphi \quad (6)$$

oder

$$\underline{E} = -\text{grad } \varphi - j \omega \mu_0 \underline{V}. \quad (7)$$

Führt man andererseits den Ansatz (4) in Gl. (2) ein, so folgt mit Hilfe der Rechenregel (26.47)

$$\text{grad div } \underline{V} - \Delta \underline{V} = j \omega \varepsilon_0 \underline{E} \quad (8)$$

oder

$$\underline{E} = \frac{1}{j \omega \varepsilon_0} \text{grad div } \underline{V} - \frac{1}{j \omega \varepsilon_0} \Delta \underline{V}. \quad (9)$$

Durch Vergleich dieser Beziehung mit Gl. (7) findet man

$$\varphi = -\frac{1}{j \omega \varepsilon_0} \text{div } \underline{V}, \quad (10)$$

$$\Delta \underline{V} = -\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \underline{V}. \quad (11)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792 \frac{\text{km}}{\text{s}}; \quad (12)$$

dann wird aus Gl. (11)

$$\Delta \underline{V} = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{V}. \quad (13)$$

Für die *Augenblickswerte* des Vektorpotentials gilt also die sog. *Wellengleichung*:

$$\Delta \underline{V} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{V}}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Die magnetischen Feldlinien sind aus Symmetriegründen Kreise, deren Mittelpunkte auf der z -Achse liegen. Es muß daher der Vektor \underline{V} parallel zur z -Achse gerichtet sein. Wir nehmen ferner an, daß genauso wie im Fall des stationären Feldes, Gl. (26.61), der Vektor \underline{V} nur von dem Abstand r des Punktes P von der Er-

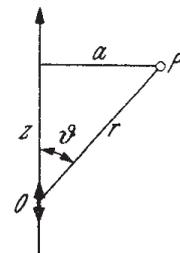


Abb. 44.1. Koordinaten der schwingenden Ladung

44. Elektromagnetische Wellen

509

regungsstelle abhängt. Es zeigt sich, daß man mit dieser Annahme alle Bedingungen des Problems erfüllen kann. In *Kugelkoordinaten* lautet nun die Gl. (13), da alle Komponenten von \underline{V} mit Ausnahme derjenigen in der z -Richtung Null sind, nach Gl. (14.18) mit \underline{V}_z statt φ

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_z}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2(r V_z)}{dr^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} V_z; \quad (15)$$

hieraus folgt

$$r \underline{V}_z = A e^{\pm kr}, \quad (16)$$

wobei

$$k = j \frac{\omega}{c} \quad (17)$$

und A eine zunächst noch unbestimmte Konstante darstellt. Da wir uns auf die Betrachtung von Feldern beschränken, die von dem Dipol ausgehen, so ist nur das negative Vorzeichen von k brauchbar, und es wird schließlich

$$\underline{V}_z = \frac{A}{r} e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (18)$$

Die Augenblickswerte bestimmen wir durch Multiplikation mit $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ und Projektion auf die imaginäre Achse:

$$V_z = \frac{A \sqrt{2}}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (19)$$

Das Vektorpotential ist also hier durch eine nach allen Richtungen hin fortschreitende Welle dargestellt, deren Geschwindigkeit c ist und deren Amplituden umgekehrt proportional mit dem Abstand r abnehmen.

Es lassen sich nunmehr die Feldgrößen mit Hilfe der Gl. (4) und (9) berechnen. Die *magnetische Feldstärke* hat überall die auf a und z senkrechte Richtung von α . Mit Gl. (3) und Gl. (26.43), deren r (Zylinderkoordinaten, Abb. 15.1) hier a entspricht, ergibt sich

$$\underline{H} = \text{rot}_\alpha \underline{V}_z = -\frac{\partial V_z}{\partial a} = -\frac{\partial V_z}{\partial r} \frac{dr}{da}.$$

Da nach Abb. 44.1

$$r = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (20)$$

ist, wird

$$\frac{dr}{da} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{a}{r}, \quad (21)$$

und mit Gl. (18) gilt:

$$\underline{H} = \underline{H}_\alpha = A \frac{a}{r^3} \left(1 + \frac{j \omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (22)$$

In der *unmittelbaren Nähe* der schwingenden Ladung, ($\omega r/c \ll 1$), wird daher

$$\underline{H} = A \frac{a}{r^3} \quad (23)$$

Andererseits ist nach AMPERESchen Formel, Gl. (26.70), der Effektivwert der magnetischen Feldstärke in der Umgebung eines geraden Stromleiters von der kleinen Länge l , der von einem Wechselstrom mit dem Effektivwert I durchflossen wird,

$$H = \frac{1}{4\pi} I \frac{a}{r^3} l. \quad (24)$$

Der Vergleich mit Gl. (23) zeigt, daß das berechnete Feld übergeht in das Feld des kurzen geraden Stromleiters, wenn man setzt

$$\boxed{A = \frac{I l}{4\pi}} \quad (25)$$

510 Sechstes Kapitel: Das rasch veränderliche elektromagnetische Feld

Ersetzt man den kurzen Stromleiter durch die bewegte Ladung Q gem. Gl. (44.1) so gilt auch

$$A = \frac{Q \hat{v}}{4 \pi \sqrt{2}}, \quad (26)$$

wobei \hat{v} den Scheitelwert der Geschwindigkeit der Ladungsbewegung (Schnelle) bedeutet.

Zur Berechnung der *elektrischen Feldstärke* benützen wir Gl. (9) und Gl. (11)

$$\underline{E} = \frac{1}{j \omega \varepsilon_0} \text{grad div } \underline{V} - j \omega \mu_0 \underline{V}. \quad (27)$$

Es ist nach Gl. (14.11) und mit Gl. (20)

$$\text{div } \underline{V}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r}. \quad (28)$$

Hieraus folgt mit den Gl. (14.20)

$$\text{grad}_z (\text{div } \underline{V}_z) = \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} = \left(\frac{z}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \frac{\partial V_z}{\partial r}, \quad (29)$$

$$\text{grad}_a (\text{div } \underline{V}_z) = \frac{\partial^2 V_z}{\partial a \partial z} = \frac{a z}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} - \frac{a z}{r^3} \frac{\partial V_z}{\partial r}, \quad (30)$$

$$\text{grad}_a (\text{div } \underline{V}_z) = 0. \quad (31)$$

Ferner ist mit Gl. (18)

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{A}{r^2} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} = \frac{A}{r^3} \left(2 + 2 j \frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (33)$$

Damit ergibt sich

$$\underline{E}_z = \frac{A}{r^5} e^{-j \frac{\omega r}{c}} \left[\frac{1}{j \omega \varepsilon_0} (3 z^2 - r^2) \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) + j \omega \mu_0 r^2 (z^2 - r^2) \right], \quad (34)$$

$$\underline{E}_a = \frac{A}{r^5} \frac{a z}{j \omega \varepsilon_0} e^{-j \frac{\omega r}{c}} \left[3 + 3 j \frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right], \quad (35)$$

$$\underline{E}_\alpha = 0. \quad (36)$$

Der Vektor der elektrischen Feldstärke liegt also in der durch den Punkt P gehenden Meridianebene; er steht daher überall senkrecht auf \underline{H} , Abb. 44.2.

Zerlegt man \underline{E}_z und \underline{E}_a in die beiden aufeinander senkrecht stehenden Richtungen r und ϑ , so kann man mit Hilfe der beiden schraffierten rechtwinkligen Dreiecke die Komponenten \underline{E}_r und \underline{E}_ϑ der elektrischen Feldstärke berechnen. Es ist

$$\underline{E}_r = \underline{E}_z \cos \vartheta + \underline{E}_a \sin \vartheta \quad (37)$$

und

$$\underline{E}_\vartheta = -\underline{E}_z \sin \vartheta + \underline{E}_a \cos \vartheta. \quad (38)$$

Ferner ist

$$a = r \sin \vartheta \quad \text{und} \quad z = r \cos \vartheta. \quad (39)$$

Führt man dies in Gl. (34) und (35) ein, so ergibt sich

$$\underline{E}_r = \frac{2 A \cos \vartheta}{j \omega \varepsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}} \quad (40)$$

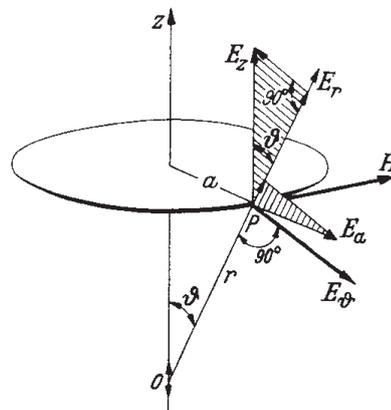


Abb. 44.2. Feldkomponenten der schwingenden Ladung

44. Elektromagnetische Wellen

511

und

$$\underline{E}_\vartheta = \frac{A \sin \vartheta}{j \omega \varepsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (41)$$

Ferner gilt nach Gl. (22)

$$\underline{H} = \frac{A \sin \vartheta}{r^2} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (42)$$

Dies sind die Feldgrößen der elektromagnetischen Elementarwelle (H. HERTZ 1888). Für $\omega \rightarrow 0$, also konstante Bewegungsgeschwindigkeit v des Ladungsträgers, gehen diese drei Beziehungen in die Gl. (43.39), (43.40) und (43.44) über.

Nahfeld der schwingenden Ladung

In unmittelbarer Nähe des Dipols ($\frac{\omega r}{c} \ll 1$) wird nach den Gl. (40) bis (42) angenähert

$$\underline{E}_r = \frac{2 A \cos \vartheta}{j \omega \varepsilon_0 r^3}, \quad (43)$$

$$\underline{E}_\vartheta = \frac{A \sin \vartheta}{j \omega \varepsilon_0 r^3}, \quad (44)$$

$$\underline{H} = \frac{A \sin \vartheta}{r^2}. \quad (45)$$

Der Vergleich mit Gl. (11.33) zeigt, daß die Struktur des elektrischen Feldes derjenigen eines statischen Dipolfeldes gleicht. Der Faktor j im Nenner der elektrischen Feldstärken zeigt an, daß die elektrische Feldstärke gegen die magnetische und damit gegen den Strom I um 90° phasenverschoben ist. Dies erklärt sich daraus, daß sich der Strom I im Luftraum als Verschiebungsstrom ($\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$) fortsetzt, der in Phase mit dem Strom schwingt; die elektrische Feldstärke eilt daher dem Strom um 90° nach.

Fernfeld der schwingenden Ladung

In der Funktechnik interessieren die Felder besonders in großer Entfernung von der Erregungsstelle. Hier kommen nur die Glieder mit den höchsten Potenzen von r zur Wirkung („Fernfeld“). Aus den Gl. (40) bis (42) folgt

$$\underline{E}_r = 0, \quad (46)$$

$$\underline{E}_\vartheta = j \omega \mu_0 \frac{A \sin \vartheta}{r} e^{-j \frac{\omega r}{c}}, \quad (47)$$

$$\underline{H} = j \omega \mu_0 \frac{A \sin \vartheta}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e^{-j \frac{\omega r}{c}}. \quad (48)$$

Magnetische und elektrische Feldstärke stehen räumlich senkrecht aufeinander und senkrecht zum Radius r (Abb. 44.2). Die beiden Felder breiten sich mit der Geschwindigkeit c in radialer Richtung aus. Der radiale Abstand zweier Punkte gleicher Schwingungsphase stellt die Wellenlänge dar:

$$\lambda = c \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}. \quad (49)$$

Die Gl. (47) und (48) sagen ferner aus, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke im Fernfeld zeitlich in Phase liegen. Dies erklärt sich aus der hier überwiegen- den Induktionswirkung des magnetischen Feldes. Jede Veränderung des magneti-

43. Grundgleichungen der elektromagnetischen Vorgänge

505

Bewegte nichtleitende Körper

Wird ein nichtleitender Körper ($\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$) mit der Geschwindigkeit v durch ein *stationäres magnetisches Feld* B bewegt, so wird in dem Körper nach Gl. (23.22) die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ induziert. Für die dadurch verursachte elektrische Flußdichte außerhalb des Körpers gilt jedoch nicht $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}_i$, sondern

$$\mathbf{D} = (\varepsilon - \varepsilon_0) (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (31)$$

da nur die materiellen Dipole bewegt werden und nur sie zur elektrischen Flußdichte beitragen.

Eine ähnliche Korrektur ist bei der Bewegung eines nichtleitenden Körpers in einem *elektrischen Feld* E notwendig. An den Oberflächen einer isolierenden Platte in einem Plattenkondensator beträgt die Ladungsdichte $D = \varepsilon E$. Darin rührt der Anteil $(\varepsilon - \varepsilon_0)E$ von den materiellen Dipolen der nichtleitenden Platte her. Wird die Platte mit der Geschwindigkeit v zwischen den feststehenden Plattenelektroden verschoben, so wirken diese Oberflächenladungen wie elektrische Ströme, die auf den beiden Oberflächen entgegengesetzte Richtungen haben. Der Strombelag ist nach Gl. (8.5)

$$v D = v (\varepsilon - \varepsilon_0) E, \quad (32)$$

und nach dem Durchflutungsgesetz entsteht in der Isolierstoff-Platte ein magnetisches Feld mit der Feldstärke

$$H = (\varepsilon - \varepsilon_0) v E. \quad (33)$$

Werden auch die Kondensatorplatten mitbewegt, so entsprechen die Oberflächenladungen εE auf den Kondensatorplatten elektrischen Strömen $v \varepsilon E$ in entgegengesetzten Richtungen. Die magnetische Feldstärke in dem Isolierstoff wird daher jetzt als Differenz

$$H = \varepsilon_0 v E. \quad (34)$$

Weitere Bewegungseffekte

Die übrigen elektromagnetischen Effekte, die bei Bewegungen von materiellen Körpern auftreten, haben wegen ihrer Kleinheit meist keine Bedeutung. Es sind im wesentlichen die folgenden:

1. Bewegte Raumladungen wirken wie elektrische Ströme von der Dichte

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (35)$$

und erzeugen daher ebenso wie diese magnetische Felder.

2. Auch bei der Bewegung *ungeladener* Leiter entstehen elektrische und magnetische Felder, wenn sich die Bewegungsgeschwindigkeit zeitlich ändert, da dann die Leitungselektronenwolke infolge ihrer Trägheit etwas voreilt oder zurückbleibt, so daß unkompenzierte Raumladungen auftreten.

3. Bei Bewegungsgeschwindigkeiten v , die nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c sind, treten in den Gl. (17) und (20) wegen des Gesetzes der konstanten Lichtgeschwindigkeit noch Faktoren von der Größenordnung $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ auf, die sich aus der Relativitätstheorie ergeben (s. S. 458 u. 463).

Bemerkungen

1. Das Feld in der Umgebung einer mit konstanter Geschwindigkeit v *frei fliegenden* Ladung Q , z. B. eines Elektrons, hat man sich folgendermaßen vorzustellen. In irgendeinem Punkt P in der Umgebung der Ladung, Abb. 43.7, finden wir gemäß Gl. (11.2) die Feldstärke

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

506

Sechstes Kapitel: Das rasch veränderliche elektromagnetische Feld

x und y seien Koordinaten eines Systems, in dessen Ursprung sich die Ladung befindet. Die x - und y -Komponenten der elektrischen Feldstärke im Punkte P sind

$$E_x = \frac{x}{r} E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (36)$$

$$E_y = \frac{y}{r} E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (37)$$

Infolge der Bewegung der Ladung nimmt während eines Zeitelements dt die Koordinate x des festen Raumpunktes P um $dx = v dt$ ab. Daher nehmen die Feldstärkekomponenten zu um

$$dE_x = -\frac{\partial E_x}{\partial x} dx, \quad dE_y = -\frac{\partial E_y}{\partial x} dx. \quad (38)$$

Diesen Änderungen der Feldstärke entsprechen Verschiebungsströme im Punkt P :

$$J_x = \epsilon_0 \frac{dE_x}{dt} = \frac{Qv}{4\pi} \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad (39)$$

$$J_y = \epsilon_0 \frac{dE_y}{dt} = \frac{Qv}{4\pi} \frac{3xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \quad (40)$$

Abb. 43.8 zeigt den dadurch bestimmten Verlauf der Linien des Verschiebungsstromes. Die x -Komponente wird Null für

$$y = \pm x\sqrt{2}. \quad (41)$$

Auf diesen Geraden verläuft also die Strömung senkrecht zur Flugbahn. In der Flugbahn selbst und auf der durch die Ladung gehenden, zur Flugrichtung senkrechten Ebene ist dagegen die y -Komponente der Strömung Null; die Strömung hat hier die Richtung der Flugbahn.

Mit der Strömung entsteht ein magnetisches Feld mit Feldlinien, die wegen der Symmetrie Kreisform haben. Die Ebenen dieser Kreise stehen senkrecht auf der Flugrichtung, ihre Mittelpunkte liegen in der Flugbahn. Die Durchflutung einer solchen Feldlinie mit dem Radius y ist

$$\Theta = \int_0^y J_x 2\pi y dy. \quad (42)$$

Die Integration läßt sich leicht ausführen und ergibt

$$\Theta = \frac{1}{2} Qv \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (43)$$

Wird das Durchflutungsgesetz auf die Feldlinie mit dem Radius y angewendet, $2\pi yH = \Theta$, so folgt für die magnetische Feldstärke

$$H = \frac{1}{4\pi} Qv \frac{y}{r^3} = \frac{1}{4\pi} Qv \frac{\sin \alpha}{r^2}. \quad (44)$$

Die magnetische Feldstärke ist an jeder Stelle des Raumes wie die Stromdichte proportional dem Produkt Qv . Die im magnetischen Feld aufgespeicherte Energie ist daher nach Gl. (28.43) und (28.44) proportional $Q^2 v^2$; sie wächst proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit wie die kinetische Energie $mv^2/2$ eines bewegten Körpers der Masse m . Bei den Elektronen ist eine andere Masse als diese „scheinbare elektromagnetische Masse“ nicht nachweisbar.

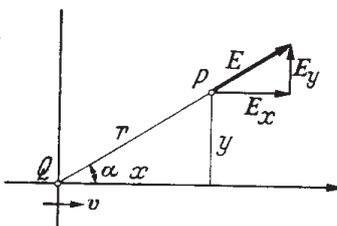


Abb. 43.7. Elektrisches Feld der bewegten Punktladung

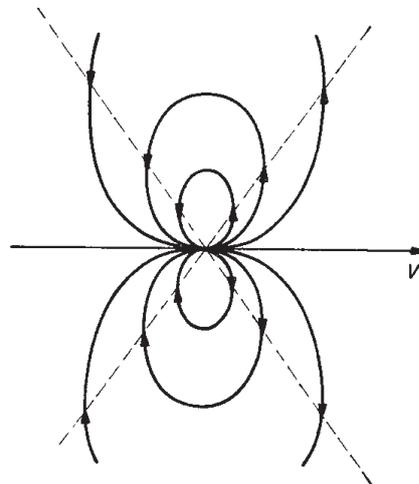


Abb. 43.8. Verschiebungsströme der bewegten Punktladung

12 Literaturhinweise

- [1] KÜPFMÜLLER, KARL / KOHN, GERHARD:
Theoretische Elektrotechnik und Elektronik,
14./15. Auflage, Drittes Kapitel, 32. Wirbelströme,
Seite 337, 338
- [2] KÜPFMÜLLER, KARL / KOHN, GERHARD:
Theoretische Elektrotechnik und Elektronik,
14./15. Auflage, Sechstes Kapitel, 44. Elektromagnetische Wellen,
Seite 507ff
- [3] KÜPFMÜLLER, KARL / KOHN, GERHARD:
Theoretische Elektrotechnik und Elektronik,
14./15. Auflage, Sechstes Kapitel, 43. Grundgleichungen elektromagnetischer Vorgänge,
Bemerkungen beginnend auf Seite 505
- [4] KÜPFMÜLLER, KARL / MATHIS, WOLFGANG / REIBIGER, ALBRECHT :
Theoretische Elektrotechnik: Eine Einführung
18. Auflage, Teil VII, 32. Die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes
Seite 519ff
- [5] HÖFLING, OSKAR:
Physik,
15. Auflage, Kapitel 8.2, Die Grundlagen der Atomistik, 8.2.5 Das *Rutherford*-Atommodell,
Textstelle auf Seite 747
- [6] PÖHLMANN, ADOLF:
Elektromagnetismus als Phänomen strömender Feinmasse